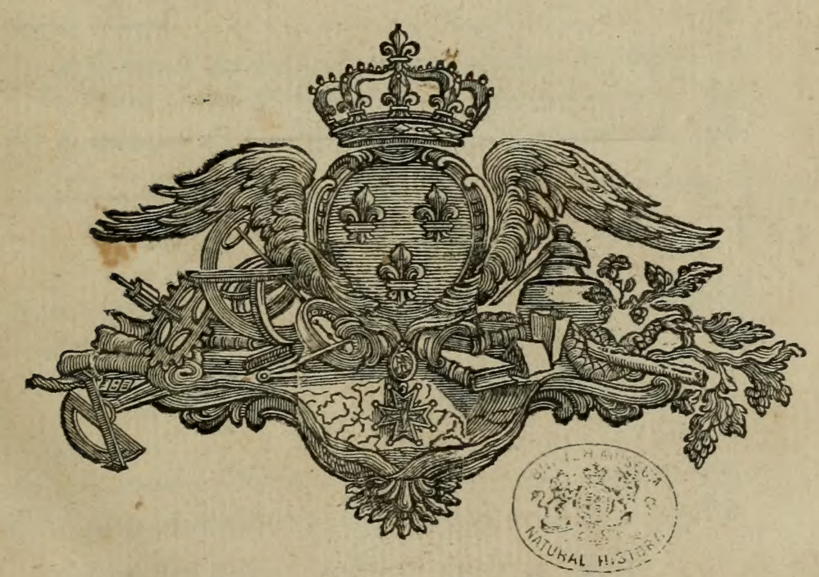
HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXII. Seconde Partie.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXVI.

TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

ALGÈBRE.

ASTRONOMIE.



TABLE
POUR LES MÉMOIRES.

TABLE.



ERRATA POUR L'HISTOIRE DE 1772. *II.e Partie.*

Page 5, ligne 26, celle, *lisez* celles.

Page 65, ligne 24, y périrent, *lisez* périrent.

Page 76, ligne pénultième, sur elles-mêmes : au milieu de leur longueur, ôtez les deux points, & les mettez après le mot longueur.

Page 82, ligne 30, & dans le jambier extérieur, *ôtez* &.

Page 83, ligne 28, Salzmaun, *lisez* Salzmann.

Page 108, ligne 26, après ces mots, de la Lune & de l'ombre, *ajoutez* & la conjonction.



HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXII. Deuxième Partie.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

SUR UN

INSECTE QUI S'ATTACHE À LA CHEVRETTE.

RIEN n'eſt peut-être plus avantageux au progrès des Sciences, que la deſtruction des préjugés, & l'Académie n'épargne pas même ceux qu'une fauſſe apparence de vérité lui auroit fait adopter en quelque ſorte, en les inſérant dans ſon Hiſtoire ou dans ſes Mémoires: V. les Mém. page 29.

en voici un de cette eſpèce dont la deſtruction eſt dûe aux recherches & aux obſervations de M. Fougeroux.

* Voy. Hiſt. 1722, p. 19.

On lit dans l'Hiſtoire de l'Académie de 1722 *, que M. Deſlandes ſon Correſpondant, ayant entendu dire, ſur les côtes de Bretagne, où il étoit alors, que les ſoles étoient produites par une eſpèce de petite écreviſſe de mer, qu'on nomme *chevrette*, *crevette*, & en quelques endroits *ſalicoque*, voulut voir ce qui avoit pu donner lieu à cette étrange opinion; pour s'en éclaircir, il mit dans une baille ou baquet pleine d'eau de mer, des ſoles & des crevettes, & dans une autre des ſoles ſans crevettes, les ſoles parurent également frayer dans les deux bailles, mais il n'aperçut de petites ſoles que dans la baille où il y avoit des crevettes; dans une autre obſervation, il trouva, entre les pieds de chevrettes nouvellement pêchées, pluſieurs petites veſſies collées par une matière viſqueuſe, dans leſquelles on voyoit au microſcope une eſpèce d'embrion qui avoit l'air d'une ſole, il n'en fallut pas plus pour lui perſuader que les veſſies qu'il avoit vues étoient des œufs de ſoles, il n'eſt pas rare de trouver des animaux qui donnent à d'autres le ſoin de couver & d'élever leurs petits, & les crevettes lui parurent non les mères, mais les nourrices des ſoles.

Voilà donc le merveilleux ôté, du moins M. Deſlandes s'en flatta, il s'étoit cependant encore trompé, & M. Fougeroux ayant eu occaſion, dans un Voyage qu'il fit en 1771, ſur les côtes de Normandie, de répéter ces obſervations, il trouva, par un examen plus réfléchi, que les crevettes n'étoient ni les mères ni les nourrices des ſoles, mais la proie d'une autre eſpèce d'animal que M. Deſlandes avoit pris pour de jeunes ſoles.

Ce qui avoit commencé à donner à M. Fougeroux des ſoupçons ſur l'exactitude de l'obſervation de M. Deſlandes, étoit que tous les pêcheurs l'aſſuroient, qu'en raclant le ſable du rivage, on y trouvoit du frai de ſoles; il y avoit donc des ſoles qui pouvoient éclore ſans le ſecours des crevettes, & en ce cas, de quelle utilité pouvoient leur être ces dernières,

& n'étoit-il pas très-naturel de penser que si M. Deslandes avoit pu voir réellement quelques œufs de sole attachés aux pattes & au ventre des crevettes, celles-ci les avoient ramassées en se promenant sur le sable?

Pour s'éclaircir sur cette matière, M. Fougeroux se fit apporter des crevettes soupçonnées de porter de jeunes soles, & voici ce qu'il remarqua.

Les chevrettes soupçonnées d'être chargées de jeunes soles ont, sur la plus grande écaille, du casque, un renflement bien marqué; en levant cette écaille, M. Fougeroux y trouva l'insecte plat que M. Deslandes avoit pris pour la jeune sole, & que selon M. Fougeroux, on ne peut confondre avec elle sans avoir l'esprit préoccupé, il ressemble beaucoup plus au coquillage nommé l'*escabrion*, dont il diffère cependant, en ce qu'il n'a point, comme ce dernier, de coquille articulée.

M. Fougeroux détacha l'insecte avec quelque peine du corps de la chevrette, & voici ce qu'il y remarqua; cet animal est figuré en cœur, une extrémité de son corps est arrondie, & l'autre est terminée en pointe; en regardant l'animal en dessous, on aperçoit près de la partie arrondie, qui est vraisemblablement sa tête, un mamelon ou trompe, semblable à celle des insectes suçeurs; le ventre de l'insecte est aplati & le dos un peu concave, tout le tour de son corps est garni de crochets avec lesquels il se cramponne sur le corps de la crevette, aux dépens de laquelle il vit, & il demeure emprisonné de la sorte sous son écaille, jusqu'à ce que la crevette soit prise ou mangée par quelqu'autre poisson, alors il partage son infortune & périt avec elle. Sous le ventre de l'insecte, on observe plusieurs bandes écailleuses, sous chacune desquelles on trouve, en les soulevant, un petit qui, vu à la loupe, paroît de même armé de crochets, & composé de plusieurs anneaux.

Pour examiner plus facilement cet insecte dans ces différens états, M. Fougeroux prit le parti d'aller lui-même à la pêche des crevettes, & voici ce qu'il remarqua; tant que les insectes sont petits, ils s'attachent aux pattes & à l'estomac de la

crevette, ils ne cherchent à se fourrer sous le casque, que lorsqu'ils sont devenus grands, & vraisemblablement quand ils ont déjà travaillé à la multiplication de leur espèce, ils sont alors dans toute leur grosseur, & ne cherchent cet asyle que pour y vivre tranquillement, sans que la chevrette puisse les détacher par ses secousses.

* Théol. des Insectes, trad. de M. Lesser, tome I, édition 1742, p. 144.

M. Lyonnet avoit très-bien remarqué * combien les recherches de M. Deslandes, sur ce point d'Histoire Naturelle, étoient imparfaites, il est bien démontré aujourd'hui par celles de M. Fougeroux, que l'animal pris par M. Deslandes pour une jeune sole, n'en est pas une, & qu'il ne donne point naissance aux soles, puisqu'il ne change point de forme durant sa vie, & qu'il produit des petits, qui, non plus que lui, ne ressemblent en aucune manière aux soles; qu'il faut remettre ces dernières dans la classe des poissons qui déposent leur frai sur le sable, & les chevrettes dans celles des animaux chargés d'insectes incommodes qui les sucent. L'exemple de M. Deslandes doit apprendre aux Physiciens avec combien de soin & d'attention on doit examiner les faits qui paroissent sortir de la règle générale.

SUR L'ANIMAL PORTE-MUSC.

V. les Mém. page 215.

IL ne paroît pas que l'espèce de parfum que nous connoissons sous le nom de *Musc*, ait été d'un usage fort ancien, du moins en Europe. Les Naturalistes Grecs & Latins n'en font aucune mention dans leurs Ecrits, & ce n'est guère que vers le VIIIe siècle de l'Ere chrétienne que Sérapion a donné une idée de cette substance, & de l'animal qui la produit; jusque-là on ne la connoissoit que parce qu'en avoient dit quelques auteurs Arabes, encore assez peu anciens, il ne faut pas même en être trop étonné. L'animal Porte-musc vivoit trop loin de l'Europe, & dans des contrées alors trop éloignées de son commerce, pour que les Européens pussent en avoir connoissance, on ne le trouve que dans les

royaumes de Boutan & de Tunquin, à la Chine, dans la Tartarie Chinoiſe, & dans quelques parties de la Tartarie Moſcovite, ſur-tout aux environs du lac *Baikal.*

Il a donc dû être très-difficile aux Naturaliſtes de claſſer cet animal, auſſi a-t-il été comparé au Chevreuil, au Bouc, au Cerf, au Chamois, à la Gazelle, au Chevrotin, ſans pouvoir déterminer exactement le genre auquel il appartenoit.

Heureuſement pour les Naturaliſtes, on fit préſent à M. le Duc de la Vrillière, d'un de ces animaux vivant, & ce Miniſtre Académicien, qui chérit les Sciences & s'intéreſſe à leur progrès, invita auſſitôt M. Daubenton à l'examiner, & à en donner la deſcription à l'Académie : voici ce qu'il y remarqua particulièrement.

Le Porte-muſc répand une très-forte odeur de muſc qui ſe répand à une aſſez grande diſtance, pour déceler d'aſſez loin l'animal dans ſa retraite, il a dans ſa figure & dans ſes attitudes beaucoup de reſſemblance avec la Gazelle, le Chevreuil & le Chevrotin, & pour le moins autant de légèreté, de ſoupleſſe & de vivacité dans ſes mouvemens, qu'aucun de ces animaux; mais le Chevrotin eſt celui de tous auquel, à la grandeur près, il paroît être le plus légitimement comparé par les deux défenſes ou longues dents canines qui tiennent à la mâchoire ſupérieure, & ſortent d'un pouce & demi hors des lèvres, dans une ſituation abſolument oppoſée à celle des défenſes du ſanglier.

Ces dents ſont une eſpèce d'ivoire comme celle du *Babirouſſa*, & de pluſieurs autres animaux, mais leur forme eſt très-particulière, elles reſſemblent à des petits couteaux courbes, dirigés obliquement de haut en bas, & de devant en arrière; on préſume qu'elles ont cette ſituation, pour permettre à l'animal de couper des racines de la groſſeur du doigt, dont il ſe nourrit; mais il eſt probable qu'il les emploie encore à bien d'autres uſages. Les animaux ſavent faire ordinairement tout l'uſage poſſible des organes qui leur ſont accordés.

Le Porte-muſc n'a point de cornes, ſes oreilles ſont longues,

droites & très-mobiles, ses deux défenses & les renflemens qu'elles causent aux lèvres, lui donnent, lorsqu'on le voit de face, un air singulier qui le distingue de tout autre animal que du Chevrotin.

Son poil est mélangé de teintes de brun, de fauve & de blanchâtre, ces teintes même paroissent changeantes, parce que les poils ne sont colorés qu'à leur extrémité, blancs dans le reste de leur longueur; cette propriété au reste lui est commune avec beaucoup d'autres animaux; ses oreilles sont mélangées de blanc & de noir, & il avoit une étoile blanche au milieu du front, mais M. Daubenton soupçonna que cette étoile n'étoit qu'une livrée qui devoit disparoître avec l'âge, & cela, parce qu'il n'avoit pas vu cette étoile sur deux peaux de cet animal données au Jardin du Roi, par M.de la Comtesse de Marsan, à laquelle elles avoient été envoyées des Indes, par M. l'abbé Gallois, aux soins duquel l'Histoire Naturelle doit plusieurs curiosités venues par son moyen du fond de l'Orient.

Le musc est renfermé dans une poche placée sous le ventre à l'endroit du nombril, du moins M. Daubenton l'a-t-il trouvée dans cette situation sur une des peaux envoyées par M. l'abbé Gallois, elle paroissoit avoir eu au moins un pouce & demi de diamètre; elle avoit au milieu un orifice très-sensible, duquel M. Daubenton tira du musc très-odorant, & elle étoit revêtue de poils blanchâtres, très-légèrement teints de fauve. Dans la description que donne M. Gmelin, de cet animal *, il place cette poche au-devant & un peu à droite du prépuce, car cet organe, de même que les défenses, est particulier au mâle, & la femelle est absolument privée de l'un & de l'autre. M. Daubenton n'a pu en vérifier la position sur le Porte-musc vivant, il n'a vu que de petites éminences sur le milieu de son ventre, mais il n'a pu les observer d'assez près, parce que l'animal ne se laissoit pas approcher, & qu'on n'auroit pu le saisir sans risquer de le blesser.

* *Mémoires de l'Acad. Imp. de Pétersbourg, tome IV.*

Quoique la situation de la poche du Porte-musc le distingue de tout autre animal; ce caractère n'est rien moins que suffisant

pour déterminer sa place parmi les quadrupèdes; beaucoup d'autres animaux, tels que le *Pecari*, le *Castor*, la *Civette*, ont, comme lui, des poches qui contiennent une matière odorante.

Il a donc fallu que M. Daubenton cherchât d'autres caractères pour assigner la classe d'animaux à laquelle appartient le Porte-musc, & voici ceux qu'il a trouvés, tant par l'inspection de l'animal vivant, que par la lecture des descriptions que quelques Naturalistes en ont données.

Les caractères extérieurs qu'il y a observés, sont les pieds-fourchus, les deux longues dents canines, & les huit dents incisives de la mâchoire de dessous, sans qu'il y en ait aucune dans celles de dessus, tous ces caractères le rapprochent beaucoup du Chevrotin, duquel il diffère cependant par la grandeur, celui-ci n'ayant qu'environ six pouces de haut, tandis que le Porte-musc a au moins un pied & demi de hauteur, il en diffère encore par le nombre des dents molaires, qui sont au nombre de six de chaque côté dans le Porte-musc, & dont le Chevrotin n'a que quatre; il en diffère aussi par la poche qui contient le musc, & par la couleur du poil.

M. Daubenton n'a pas aperçu de queue au Porte-musc vivant, M. Gmelin a trouvé, sur trois individus de cette espèce, un petit prolongement charnu d'environ un pouce de long, qui en tenoit lieu; M. Grew a observé ce même prolongement de deux pouces de longueur, mais il ne s'est pas assuré s'il contenoit des vertèbres.

M. Ray regarde comme douteux que le Porte-musc rumine, cependant M. Gmelin lui a trouvé, en le disséquant, les organes de la rumination, & spécialement les quatre estomacs, dont le premier a trois convexités, comme celui des animaux sauvages qui ruminent : si on joint à ce caractère les défenses du Porte-musc, on trouvera que le Chevrotin est celui de tous les animaux auquel il ressemble le plus, au cas que ce dernier rumine, comme il y a tout lieu de le croire.

Il auroit été facile de décider la question de la rumination;

ſi le Porte-muſc de M. le Duc de la Vrillière avoit vécu, mais ſa mort a privé de la poſſibilité de faire cette obſervation, & peut-être beaucoup d'autres extrêmement curieuſes; il réſulte ſeulement du voyage de cet animal en ce climat, dont il n'avoit pas paru fort incommodé, qu'avec du ſoin & de l'attention, nous pourrions eſpérer de naturaliſer en France pluſieurs eſpèces d'animaux qui deviendroient un objet d'agrément, & peut-être de commerce.

SUR LA

COMPARAISON DES DIFFÉRENTES TOISES

Qui ont ſervi à la meſure des Degrés Terreſtres.

V. les Mém. page 482.

L'OUVRAGE duquel nous avons à rendre compte dans cet article, eſt un phénomène ſingulier dans l'Hiſtoire de l'Académie, c'eſt un Mémoire de M. de la Condamine, lû par cet Académicien en 1758, oublié depuis par ſon Auteur, & retrouvé deux ans après ſa mort; l'objet qu'il y traite a paru aſſez intéreſſant à l'Académie, pour qu'elle ſe hâtât de le publier.

Perſonne n'ignore les travaux entrepris par l'Académie, dès les premières années de ſon inſtitution, pour parvenir à la connoiſſance de la grandeur & de la Figure de la Terre, qu'elle a eu enfin, de nos jours, la gloire de déterminer.

La première de ces opérations eut l'année 1668 pour époque, elle fut exécutée par M. Picard, qui meſura tout l'eſpace compris entre le tertre de Malvoiſine & Amiens, par une ſuite non interrompue de grands triangles, qui partoient tous d'une baſe de 5663 toiſes, meſurée dans la plaine de Long-boyau, depuis le moulin de Villejuive juſqu'au pavillon de Juviſi.

La toiſe de laquelle ſe ſervit M. Picard, étoit celle du Châtelet, dont on venoit de réformer l'étalon; non content d'avoir pris un très-grand ſoin pour y rendre ſa toiſe conforme,

conforme, M. Picard voulut en constater la mesure d'une manière encore plus invariable, en mesurant sur cette toise même, la longueur du pendule simple, qui bat les secondes sous le parallèle de Paris; il ajoute que la toise dont il s'est servi, sera très-soigneusement conservée à l'Observatoire, pour y avoir recours en cas de besoin.

Si cette dernière condition eût été remplie, il n'y auroit point eu d'ambiguité; toutes les mesures postérieurement faites, l'auroient été avec des toises bien étalonnées sur celle de M. Picard, & elles parleroient, pour ainsi dire, toutes la même langue, mais malheureusement ce dépôt a été mal conservé, & la toise de M. Picard est absolument perdue. Lorsque M.rs Cassini & de la Caille entreprirent, en 1739 & 1740, de vérifier la longueur de la Méridienne de France, depuis Dunkerque jusqu'à Collioure, ils partirent de Paris sans mesurer de nouvelle base, ayant seulement lié leurs triangles à celle de M. Picard; arrivés à Bourges ils mesurèrent une base pour vérifier leurs opérations, & furent très-surpris de trouver cette nouvelle base notablement plus courte, par leur mesure actuelle, qu'elle ne l'étoit par le calcul des triangles appuyés sur la base de Villejuive de M. Picard; l'exactitude de leurs opérations les porta à soupçonner cette dernière base de n'avoir pas été mesurée aussi exactement qu'on l'avoit cru jusqu'alors, mais M. Cassini le père, auquel ils communiquèrent leurs soupçons, n'en voulut rien croire, & ce ne fut qu'après qu'ils eurent une seconde fois recommencé toutes leurs opérations & tous leurs calculs, qu'il crut devoir vérifier de nouveau la base de M. Picard, qu'il trouva en effet plus courte d'environ une toise par mille, que ne l'avoit donnée M. Picard; il recommença trois fois la mesure, & trouva toujours la même différence; il en parla alors à l'Académie, qui nomma des Commissaires pour vérifier de nouveau cette base avec la plus grande authenticité; mais avant cette dernière mesure, M. Cassini en fit en particulier une quatrième, & toutes donnèrent la même différence.

Les perches qui servirent à cette mesure de M. Cassini,

avoient été ſcrupuleuſement étalonnées ſur deux toiſes de fer, dont une avoit appartenu à feu M. de la Hire, & celles de la meſure faite par les Commiſſaires de l'Académie, l'avoient été ſur la toiſe qui avoit été employée en Lapponie ; il réſultoit donc de l'identité des meſures que la toiſe de M. de la Hire, & celle du Nord, étoient ſenſiblement égales, & que celle qu'avoit employée M. Picard, en différoit environ d'un millième.

Cette différence qui ne va pas à une ligne, pouvoit venir de pluſieurs cauſes, il eſt très-poſſible que l'étalon du Châtelet, compoſé d'une barre de fer, avec deux talons, expoſé à toutes les injures de l'air, attaché à la muraille avec des clous, qui auront pu lui occaſionner de l'alongement en les frappant, dont les talons ont peut-être été frottés pluſieurs fois pour les dérouiller; il eſt très-poſſible, dis-je, qu'un tel étalon, quoique ſuffiſant pour les uſages ordinaires, n'eût pas gardé exactement ſa meſure primitive, peut-être même n'avoit-on pas trop cherché à lui procurer cette exactitude : on ignore d'ailleurs dans quelle ſaiſon il avoit été conſtruit, & à quel degré de chaleur on avoit étalonné la toiſe de M. Picard, il eſt du moins certain qu'elle étoit plus courte d'environ un millième, que celle qui a ſervi à la meſure du Degré de Lapponie, & que celle de M. de la Hire qui lui étoit égale; & ſi on en pouvoit douter, la meſure du pendule propoſée par M. Picard, confirmeroit encore cette aſſertion, & prouveroit l'erreur de la toiſe de M. Picard, qui a obligé de donner moins de toiſes au Degré, que cet Aſtronome ne lui en avoit aſſigné.

Des cinq toiſes qui avoient ſervi aux opérations de la Meſure de la Terre, en voilà donc une légitimement rejetée. Les quatre autres ſont, celle qui a ſervi à la meſure du Degré du méridien près de l'Équateur; celle qui a ſervi à la meſure du Degré du méridien proche le Cercle polaire; celle qui a ſervi à M. de la Caille pour meſurer un Degré du méridien, dans la partie auſtrale, au cap de Bonne-eſpérance; & enfin celle qui a ſervi aux célèbres obſervations du Pendule, faites par

M. de Mairan : nous ne parlons pas de celle de M. de la Hire, employée par M. Caſſini, elle eſt identique avec la toiſe du Nord.

Ces quatre toiſes étant actuellement exiſtantes, il a été facile de les comparer : & voici quel a été le réſultat de la comparaiſon ; en prenant pour terme de comparaiſon, la toiſe examinée en 1735, par l'Académie, & qui a ſervi au Pérou ; celle du Nord s'eſt trouvée plus courte d'environ un vingtième de ligne, on peut même en aſſigner la cauſe ; cette toiſe ayant été mouillée de l'eau de la mer dans le naufrage du Vaiſſeau où elle ſe trouvoit au retour, il eſt très-vraiſemblable qu'elle aura été rouillée, & que cette quantité preſque imperceptible, dont elle eſt plus courte, ne vient que de ce qu'on en a enlevé en la dérouillant; cette petite quantité même ne doit avoir influé en rien ſur l'opération, le naufrage qui l'a cauſée n'étant arrivé qu'au retour, & par conſéquent, eu égard à la meſure du Degré, celui du Nord & celui du Pérou ont été meſurés avec la même toiſe.

La toiſe de laquelle M. l'abbé de la Caille s'eſt ſervi pour la meſure d'un Degré du Méridien au cap de Bonne-eſpérance, avoit été faite par le feu ſieur Langlois, qui l'avoit étalonnée avec le plus grand ſoin, ſur le même étalon qui avoit ſervi à fixer la longueur préciſe des toiſes employées au Pérou & en Lapponie, & qui étoit en ſa poſſeſſion ; cette toiſe ne ſe trouve plus, mais on peut aſſez compter ſur l'exactitude de ce célèbre artiſte, très-exercé d'ailleurs dans les travaux de cette eſpèce, pour être ſûr que cette toiſe étoit exactement égale aux autres.

Reſte enfin la toiſe de M. de Mairan qui n'a pas ſervi aux opérations géodéſiques, mais que ce célèbre Académicien a employée pour les obſervations ſur la longueur du Pendule, dont il a rendu compte en 1735 *, elle avoit été, dit-il, meſurée ſur l'étalon du Châtelet, mais ſoit que cette meſure eût été faite par une température très-différente de celle de 13 degrés du thermomètre de M. de Reaumur, qui régnoit lorſque M. Godin avoit fait la comparaiſon de celle du Pérou,

* Voy. Hiſt. 1735, p. 81.

ſoit, ce qui eſt plus vraiſemblable, que la groſſièreté de cet étalon ne comportât pas une meſure très-exacte; cette toiſe comparée à celle du Nord & du Pérou, s'eſt trouvée de plus d'un dixième de ligne plus courte que cette dernière; quantité qui bien qu'inſenſible pour les uſages ordinaires de la vie, ne l'eſt nullement lorſqu'il s'agit de recherches Aſtronomiques & Phyſiques, qui ne ſouffrent pas la moindre inexactitude.

De tout ce que nous venons de dire, il eſt aiſé de conclure que la toiſe du Pérou, à laquelle celle du Nord & celle du cap de Bonne-eſpérance, ſont ou ont été lors des opérations abſolument égales, doit être regardée comme la véritable toiſe de l'Académie, il y a certainement bien moins d'inconvénient à corriger, de quelques centièmes de ligne, la ſeule longueur du pendule obſervée à Paris par M. de Mairan, qu'à altérer toutes les autres meſures du pendule faites en différens endroits de la Terre, & les réſultats de toutes les opérations qui ne cadreroient plus avec une toiſe différente d'un dixième de ligne, de celles avec leſquelles ces meſures ont été faites.

Il reſte encore un autre point à diſcuter; ce n'eſt pas aſſez que d'avoir déterminé avec ſoin la meſure de la toiſe, il n'eſt pas moins important de la conſerver d'une manière inaltérable; un étalon d'acier ne peut être ſuffiſant, la rouille ſeule peut le rendre inutile; des dimenſions priſes ſur des parties des bâtimens les plus ſolides ne ſe conſervent pas davantage: on ſait combien les murs & les voûtes ſont ſujets à travailler, ſans même qu'on s'en aperçoive; il faut donc avoir recours à une matière non ſujette à ſe détruire par elle-même, & qui ſoit aſſez dure pour qu'elle ne puiſſe s'uſer par le frottement des toiſes qu'on y voudra étalonner.

M. de la Condamine croit qu'on peut trouver cette matière dans quelques eſpèces de granit que nous avons en France, dans la Normandie, & ſur leſquels la lime n'a aucune priſe; on pourroit, ſelon lui, faire un étalon d'une de ces pierres, & on ſeroit ſûr que les talons entre leſquels ſeroit compriſe la longueur de la toiſe, ne pourroient ni s'altérer ni s'uſer;

on y fera entrer une verge de fer qui ferviroit au Châtelet de verge confervatrice pour le nouvel étalon qui feroit publiquement expofé. Et pour donner la facilité de prendre, avec un compas, la longueur exacte de la toife & de fes parties, on traceroit avec le diamant fur une tablette du même granite, une ligne fine terminée par deux points, & divifée en pieds, & au moins à fes extrémités en lignes, & fur une autre ligne parallèle à celle-ci, la longueur du Pendule.

Telles font les vues propofées par M. de la Condamine; dans le Mémoire dont nous venons de rendre compte, on y reconnoît par-tout le génie patriotique de cet Académicien, il aura la gloire d'avoir été Citoyen jufqu'après fa mort, & de tels fentimens ne peuvent que redoubler les regrets de tous ceux qui le connoiffoient, & fur-tout ceux de l'Académie.

SUR LA

DESTRUCTION DU DIAMANT PAR LE FEU.

LE fujet que nous avons à traiter dans cet article, eft un des plus intéreffans de toute la Phyfique; rien n'a peut-être été plus généralement adopté que la propriété de réfifter au plus grand feu, que l'on avoit accordée au Diamant; les Anciens en étoient fi perfuadés, que Virgile * n'avoit pas cru trouver de matière plus propre à réfifter aux torrens du feu qui environnoient l'entrée du Tartare, que d'en bâtir les piliers de diamant; fa rareté, peut-être autant que fa dureté, avoit pu donner lieu à ce préjugé, de même qu'aux émanations & aux vertus médicinales qu'on lui attribuoit, comme à toutes les pierres précieufes; le célèbre Boyle avoit lui-même cherché à donner des raifons phyfiques de ces propriétés *, mais toutes les expériences qu'il rapporte pour prouver les émanations du diamant ne prouvent autre chofe que la propriété commune au diamant & à plufieurs autres pierres précieufes, d'être fufceptibles d'électricité, & quelquefois phofphoriques; en un mot, il n'y a rien à tirer de

V. les Mém. p. 564.

* *Virg. Æneid. Liv. VI, vers 543.*

* *Specimen de Gemmarum origine & virtutibus.*

ceux qui nous ont précédés sur ce sujet, & nous ne pouvons partir dans la question que M. Lavoisier a entrepris de discuter, que des expériences faites de nos jours, par ordre de l'Empereur François I.er, elles nous ont appris que le diamant étoit un des corps qui résistoit le moins au feu, qu'à une chaleur égale à celle qu'on emploie à passer l'argent à la coupelle, il s'évapore & disparoît sans laisser le moindre vestige, & que Virgile n'avoit pas pu choisir plus mal ses matériaux pour bâtir la porte du Tartare.

Le même Prince répéta les mêmes expériences, non-seulement sur le diamant, mais encore sur plus de vingt pierres précieuses différentes; comme on les examinoit de fort près, on reconnut que le diamant commençoit d'abord à perdre son poli, qu'ensuite il se feuilletoit, & qu'enfin il s'évaporoit entièrement, qu'au bout de vingt-quatre heures l'émeraude s'étoit fondue & attachée au creuset, mais que le rubis n'avoit subi aucune altération.

Les mêmes expériences furent encore faites à Florence, par ordre du même Prince, mais avec cette différence, qu'au lieu d'employer le feu des fourneaux, le diamant & les autres pierres furent soumises au foyer d'un verre ardent de Tschirnausen, ayant deux tiers d'aune de Florence de diamètre, & dont on avoit raccourci le foyer, par le moyen d'une seconde lentille. Le diamant exposé à ce feu, commença à s'altérer au bout d'environ trente secondes, il perdit son éclat, sa couleur & sa transparence; au bout de cinq minutes il se forma des bulles à sa surface, & bientôt il se brisa en morceaux si petits, qu'on n'en retrouva qu'un petit fragment, qui se réduisit sous la lame d'un couteau, en une poudre fine, qu'on ne pouvoit aperçevoir sans le secours d'un microscope; plusieurs diamans exposés au même foyer eurent le même sort, sans qu'on eût pu y remarquer aucun commencement de fusion, quoique dans la vue de la faciliter, on y eût mêlé différentes matières qui servent ordinairement de fondans.

Les rubis furent soumis aux mêmes épreuves, mais ils résistèrent beaucoup plus, ils devinrent d'abord luisans,

comme si on les avoit enduits de graisse, il s'y forma des bulles, & un d'entr'eux, après avoir été tenu pendant trois quarts-d'heure au foyer, perdit une grande partie de sa couleur; ses angles s'arrondirent, & il se ramollit au point de recevoir l'empreinte d'un cachet de jaspe, & de se laisser entamer par un couteau, mais il ne perdit rien de son poids ni presque de sa forme.

Les rubis mis en poudre parurent se réunir promptement en une masse, mais on les sépara aisément, il ne s'étoit fait aucune fusion. En augmentant la force du foyer par l'interposition d'une troisième lentille, la poudre de rubis se fondit, mais imparfaitement, & la masse couleur de chair qui en résulta, étoit graveleuse par les grains non-fondus qui s'y trouvoient mêlés avec le verre; le rubis, mêlé avec du verre en poudre, parut se fondre, mais on vit bientôt que le verre seul s'étoit fondu, & que le rubis étoit tombé au fond, sans s'y unir en aucune manière.

Un rubis tenu au foyer pendant 30 secondes, fut jeté dans l'eau froide, il ne se brisa point, mais on aperçut dans son intérieur plusieurs gersures; un autre mis à la même épreuve pendant 6 minutes, & aussi jeté dans l'eau ne put résister à la pression d'un instrument de fer, & se cassa en plusieurs morceaux irréguliers : en général les rubis traités de cette manière n'avoient pas plus de dureté qu'un cristal, il en faut cependant excepter un beaucoup plus gros que les autres qui n'avoit perdu sa dureté qu'à la surface, & l'avoit conservée dans son intérieur; c'est en général, de toutes les pierres précieuses, celle qui paroît résister le plus à l'action du feu poussé à son plus grand degré de force.

L'émeraude au contraire s'y fondit très-promptement, elle devint blanche, légère, tendre, cassante, & perdit sa transparence; quelques-unes tenues plus long-temps au foyer, changèrent plusieurs fois de couleur : on observa qu'elles étoient toujours plus luisantes quand on les retiroit brusquement du foyer, que lorsqu'on les en faisoit sortir peu-à-peu.

Tel est l'exposé très-abrégé des expériences faites par

ordre de l'Empereur, & en même temps de l'état de nos connoiſſances ſur cet article, lorſque M. Darcet entreprit de les répéter.

Ces premières expériences furent faites ſur deux petits diamans très-brillans, il les mit chacun dans un creuſet de porcelaine, l'un étoit exactement fermé, le couvercle de l'autre étoit percé de quelques petits trous, ils furent mis dans le four de porcelaine, & ils ſe diſſipèrent en entier ſans qu'il en demeurât aucun veſtige.

Quelque bien conſtaté que parût ce fait, lorſque M. Darcet en fit part à l'Académie, elle crut devoir, pour mieux s'en aſſurer, l'engager à répéter l'expérience.

Dans cette vue, M. Darcet fit uſer les bords d'un creuſet de porcelaine, & le fit ajuſter très-exactement avec ſon couvercle, pour en faire une eſpèce de vaiſſeau clos ; il y plaça un diamant, & expoſa le tout dans le four de porcelaine, pendant toute la durée de la cuite ; le tout étant refroidi, on ouvrit le creuſet, & on n'y trouva pas le moindre veſtige du diamant.

Il prit enſuite de la pâte de porcelaine, & en fit une boule qu'il coupa en deux, & ayant formé au centre une petite cavité où il mit un diamant, il rapprocha les deux moitiés de la boule qu'il ſouda avec de la barbotine ; cette boule fut expoſée au feu de porcelaine, d'où elle ſortit parfaitement cuite, on l'ouvrit avec précaution, on trouva la petite cavité où étoit le diamant, le diamant même enduit d'une eſpèce de noir de fumée, il étoit légèrement terni à ſa ſurface, ſa couleur qui étoit un peu noirâtre s'étoit diſſipée, il étoit devenu blanc ſans avoir perdu ſenſiblement de ſon poids ni de ſa dureté, & ayant été retaillé, il reprit tout ſon brillant.

Ce même diamant remis au feu dans le même appareil, ne ſoutint pas cette ſeconde épreuve, il diſparut, à deux très-petits fragmens près, qu'on reconnoiſſoit encore cependant pour du diamant ; un ſecond diamant jaune expoſé à la même épreuve, ſe fondit & forma une eſpèce de vernis dans

la cavité où il étoit contenu, il est vrai que M.rs Rouelle & Darcet soupçonnèrent qu'on leur avoit, dans cette expérience, donné un Péridot pour un Diamant; un quatrième diamant exposé au feu de la même manière, disparut sans laisser aucune trace sensible de son existence.

M. Darcet exposa ensuite des diamans sous une moufle, dans des petites capsules de porcelaine; en cinq heures de feu modéré, ils disparurent tous, & il remarqua que ces diamans, en s'évaporant, se feuilletoient sensiblement.

Les mêmes expériences furent répétées sur les autres pierres précieuses, & il en résulta qu'aucune n'a la propriété de s'évaporer comme le diamant; le Rubis ni la Topase orientale n'ont subi aucune altération, même par le feu de porcelaine; l'Hyacinte y a perdu un peu de sa couleur; les Topases de Saxe & du Bresil, & l'Améthiste, y sont devenues blanches; l'Émeraude a perdu sa transparence; le Saphir oriental s'y est ramolli; le Péridot y a coulé comme le verre, & le Grenat s'est fondu & s'est réduit sous la forme d'une écaille de fer.

Depuis la publication de ces expériences, elles furent encore répétées d'abord par M. Macquer, qui mit un diamant brillant sous la moufle, il s'aperçut, en ouvrant sa moufle, au bout de 20 minutes, que le diamant étoit devenu comme phosphorique, & qu'il brilloit d'une lumière singulière, la moufle fut refermée, & ayant été r'ouverte au bout de 20 autres minutes, on ne trouva plus dans la capsule aucun vestige du diamant; cette même flamme qui environnoit le diamant au moment de sa destruction, & qui avoit été aperçue pour la première fois par M. Macquer, pendant cette expérience, fut encore plus sensiblement remarquée dans une autre expérience faite aux Écoles de Médecine, sur un diamant beaucoup plus gros, & en présence de M. de Sartine.

L'expérience de l'évaporation du diamant sous la moufle, fut encore répétée avec toute l'authenticité possible, le 16 Août 1771, chez M. Rouelle; on y plaça trois diamans sur autant de petites capsules de porcelaine, ils y furent chauffés

par degrés, les diamans & les capſules commencèrent à rougir; mais bientôt après la lumière des diamans devint beaucoup plus vive que celle des capſules, ils diminuèrent de volume; un d'eux diſparut entièrement, & on retira les deux autres avant qu'ils fuſſent entièrement diſſipés, mais il ne leur reſtoit plus qu'une petite partie de leur poids; il y arriva même une aventure ſingulière : un Joailler perſuadé que l'évaporation du diamant étoit dûe à l'air, crut mettre un diamant, qu'il ſoumit à l'expérience, à l'abri de ſon action, en le mettant dans un creuſet rempli de poudre de charbon mêlée avec de la craie, & recouvert avec une légère couche de craie, détrempée avec de l'eau; tout cet appareil fut mis dans la même mouſle où avoient été faits les autres eſſais, & y reſta pendant près de trois heures, au bout deſquelles on laiſſa refroidir les vaiſſeaux, & ayant ouvert le creuſet, on n'y trouva qu'une maſſe de craie calcinée, ſans aucun veſtige de poudre de charbon ni de diamant, il n'en reſtoit plus que l'empreinte qu'il avoit formée dans la craie.

Après les expériences dont nous venons de rendre compte, il n'étoit plus permis de révoquer en doute l'évaporabilité du diamant; mais cela même ſuppoſé, il reſtoit encore bien des points à éclaircir; cette évaporation étoit-elle une véritable volatiliſation, une réduction de la ſubſtance du diamant en vapeurs ? Étoit-ce une eſpèce de combuſtion, ou enfin n'étoit-ce qu'une décrépitation ou une diſperſion des parties du diamant en une pouſſière imperceptible ? Pour s'aſſurer ſi la diſparition du diamant étoit une véritable évaporation, on le diſtilla dans des vaiſſeaux clos, c'eſt-à-dire dans une petite cornue de grès bien lutée, à laquelle on avoit adapté un matras percé d'un petit trou pour laiſſer échapper les vapeurs, ſi elles devenoient trop abondantes ou trop élaſtiques; il n'en fut pas beſoin, au bout de trois heures d'un feu très-violent, on laiſſa refroidir l'appareil, & ayant déluté les vaiſſeaux, on n'y trouva qu'un peu de vapeurs aqueuſes, provenues de la décompoſition du lut qui avoit commencé à ſe détruire; les diamans furent retrouvés dans la cornue,

à peu-près tels qu'ils étoient lorsqu'on les y avoit mis, mais presque tous dépolis, enduits d'une espèce de vernis d'un brun noir, de même que le dedans de la cornue; mais ils avoient perdu plus de deux grains de leur poids, il est vrai qu'il y avoit quelques-uns des plus petits diamans qui étoient demeurés collés au fond de la cornue, au moyen de quelque portion de la terre du lut qui y étoit tombée, & avoit commencé à fondre.

Le feu, dans cette dernière expérience, avoit été beaucoup plus fort qu'il ne falloit pour évaporer le diamant, il en résultoit donc que le défaut du contact de l'air retardoit cette évaporation; pour s'en assurer mieux, on profita de l'offre que fit M. Maillard, Joaillier, de soumettre trois diamans qu'il avoit apportés, à telle expérience & tel degré de feu qu'on jugeroit à propos; on les mit dans une tête de pipe remplie de poudre de charbon, & cette tête fut fermée par une petite lame de tôle, recouverte & enveloppée de toutes parts de lut fait avec le sable des Fondeurs, détrempé avec de l'eau salée; cette pipe fut placée dans un creuset, enduit de craie sèche, lequel étoit lui-même enfermé dans deux autres creusets abouchés l'un à l'autre, & lutés avec le même lut.

Cet appareil bien séché, fut successivement placé dans un fourneau où il essuya deux heures d'un feu assez vif, & ensuite dans le grand fourneau de M. Macquer, où il éprouva, pendant deux heures, un feu si violent que le creuset se ramollit & rentra sur lui-même, la terre & le lut se fondirent & formèrent une masse de verre adhérente à la pipe, qui avoit seule résisté; dès qu'on l'eut cassée, on en vit sortir le charbon aussi noir & aussi entier qu'on l'y avoit mis, & les trois diamans sans aucune autre altération que d'avoir été un peu noircis, ils n'avoient rien perdu de leur poids, & étant repolis, ils reprirent leur première beauté.

Cette opération faisoit voir clairement que la destruction du diamant n'étoit pas une véritable volatilisation, & qu'on ne pouvoit l'attribuer qu'à une combustion semblable à celle du charbon & de quelques autres matières qui résistent à la

plus grande violence du feu, dans des vaiſſeaux fermés, & s'enflamment à l'air libre avec la plus grande facilité, ou à la réduction du diamant, en une poudre très-fine, occaſionnée par le contact de l'air, & qui échappe abſolument à la vue.

Ce fait ſi ſingulier méritoit cependant qu'on s'en aſſurât, & M. Macquer ſe chargea de faire placer un appareil ſemblable dans le fourneau de la porcelaine dure de Sèvres, où il éprouva, pendant vingt-quatre heures, le plus grand degré de feu qu'on connoiſſe; le tout étant parfaitement refroidi, on trouva que le creuſet extérieur, fait de la même terre que les gazettes à porcelaine, avoit réſiſté, mais le ſablon qui ſervoit à y contenir le reſte de l'appareil, s'étoit combiné avec le ſable des Fondeurs, & avoit coulé avec lui; les creuſets de Heſſe étoient percés, mais la pipe étoit entière, & entourée ſeulement de ces matières fondues; la plaque de fer qui lui ſervoit de couvercle s'étoit convertie en une grenaille de fer; le diamant qu'elle contenoit paroiſſoit engagé à moitié dans un de ces grains, mais la partie libre avoit conſervé ſon éclat, à une légère teinte de noir près; en eſſayant de ſéparer le diamant de ce grain de fer, on s'aperçut que la partie qu'on y croyoit engagée étoit détruite, & que le diamant avoit perdu près de la moitié de ſon poids; mais quelle que fût la cauſe de cette deſtruction, il n'en étoit pas moins vrai que l'autre moitié avoit ſupporté, pendant vingt-quatre heures, l'extrême violence du feu, ſans en être altérée ſenſiblement, & que la deſtruction du diamant à l'air libre, n'étoit point une vraie volatiliſation. Mais comment accorder ces faits avec les expériences de M. Darcet, faites avec des diamans enfermés dans des boules de pâte de porcelaine, où ils ſe ſont conſtamment détruits? Pour éclaircir cette queſtion, M. Macquer enferma, dans pluſieurs boules de pâte de porcelaine, de la poudre de charbon, & plaça ces boules dans le four à porcelaine de Sèvres; lorſque la fournée fut cuite, on caſſa les boules dans leſquelles il ne ſe trouva pas le moindre veſtige de charbon: on mit de la même poudre de charbon dans un petit vaiſſeau de porcelaine cuite, qu'on couvrit d'un

couvercle de même matière, bien luté, & auquel on fit éprouver la même violence de feu, sans que la poudre de charbon y éprouvât la plus petite altération; il étoit alors bien aisé de voir que la pâte de porcelaine est une substance bien plus poreuse que ne l'avoit pensé M. Darcet, qu'elle ne défend pas du contact de l'air les corps qu'on y enferme, & qu'elle n'en empêche pas la combustion. M. Mitouard répéta de son côté les mêmes expériences, il mit trois diamans dans trois têtes de pipes, l'un avec de la poudre de charbon, l'autre avec de la craie, & enfin le troisième dans une pipe vide, elles furent fermées & enveloppées comme les précédentes, & il leur fit éprouver pendant deux heures & demie, la plus grande violence de feu du fourneau de M. Macquer. Le diamant mis dans la poudre de charbon, n'éprouva aucune altération, celui qui étoit dans la craie perdit un cinquième de son poids, il fut dépoli, ses angles s'émoussèrent, & il se couvrit d'une croûte semblable à celle des diamans bruts; enfin celui qui avoit été mis dans la pipe sans intermède, perdit également un cinquième de son poids, son poli fut altéré, & il devint d'un noir de jayet.

Pour s'assurer que la nature du diamant n'avoit aucune part à ce phénomène, M. Mitouard changea les siens d'intermède, il mit dans le charbon celui qui avoit été dans la craie, &c. & il obtint toujours les mêmes résultats; celui du charbon ne souffrit aucune altération, & les autres en éprouvèrent plus ou moins, ce qui lui donna lieu de penser que le phlogistique, dont le charbon abonde, pourroit occasionner ce phénomène, comme il empêche le zinc & l'antimoine de brûler lorsqu'ils sont enfermés avec lui.

Les expériences que fit M. Cadet, lui donnèrent à peu-près les mêmes résultats.

Il restoit cependant un point bien intéressant à éclaircir, c'étoit de savoir si un feu plus violent & plus long-temps continué, n'acheveroit pas de détruire le diamant qui n'avoit été qu'altéré dans les vaisseaux fermés, & n'attaqueroit pas même celui que la poudre de charbon avoit préservé de toute

altération, dans les expériences précédentes. C'est le but que M.rs Rouelle & Darcet se sont proposé dans une longue suite d'expériences qu'ils ont faites dans des boules & des creusets de porcelaine, & desquelles il résulte :

1.° Que le diamant qui se détruit en si peu de temps à l'air libre, & par un degré de feu assez médiocre, est un corps très-réfractaire lorsqu'on le garantit du contact de l'air :

2.° Qu'il ne peut soutenir, même dans une boule de porcelaine cuite, sept heures de feu très-violent, sans être sensiblement altéré :

3.° Que cette même violence de feu continuée plusieurs jours, l'altère & le détruit à la fin, quoiqu'enfermé dans une boule de porcelaine cuite lorsqu'il est sans intermède :

4.° Que lorsqu'il y est suffisamment entouré de poudre de charbon, il peut résister pendant huit jours au feu du four à porcelaine, sans éprouver la moindre altération :

5.° Que lorsque l'intérieur des boules est trop petit pour recevoir la quantité de charbon nécessaire, l'extrême violence du feu attaque le diamant, & lui fait subir quelqu'altération; mais qu'on observe en ce cas que le charbon a été aussi un peu attaqué, ce qui donne lieu de penser que la fixité du diamant est à peu-près égale à celle du charbon dans des vaisseaux clos :

6.° Que le diamant réduit en vapeurs passe à travers les boules & les creusets de porcelaine la mieux cuite, lorsqu'ils sont rouges & embrasés, à moins qu'il ne passe par les jointures même les mieux lutées, ce qui fait qu'il est au moins permis de douter qu'on les puisse regarder comme vaisseaux fermés.

Tel est le rapport très-abrégé des nombreuses expériences qui ont été tentées sur la destruction du diamant par le feu des fourneaux; mais il est un feu bien plus actif & bien plus puissant, celui des rayons du Soleil réunis au foyer d'un grand verre ardent; il en existoit un de cette espèce entre les mains de l'Académie, connu sous le nom de lentille du Palais Royal, parce qu'il avoit appartenu à feu M. le Duc d'Orléans Régent, qui l'avoit donné à feu M. d'Onz-en-Brai, & celui-ci à

l'Académie ; on peut bien juger que cet agent si puissant fut employé; & nous allons présenter une légère idée des expériences qui furent faites par son moyen, qui composent le second Mémoire de M. Lavoisier. V. les Mém. p. 591.

Un diamant ayant été exposé brusquement au foyer du verre ardent a décrépité, s'est fendillé comme du cristal de roche, il s'en est détaché plusieurs éclats, dont un étoit assez sensible, même à la vue simple; en l'examinant au microscope, après l'avoir retiré, on a remarqué un grand nombre d'éclats prêts à se détacher; un autre diamant a été exposé au foyer, mais avec précaution, il a rougi, & ayant été retiré après dix minutes, il s'est trouvé diminué d'un trente-deuxième de son poids; vu à la loupe, il paroissoit criblé de trous, on le remit au foyer d'abord sur un support de grès dur, puis sur un support de porcelaine, il a présenté les mêmes phénomènes, & en vingt minutes de temps il a été totalement évaporé; on avoit cru apercevoir pendant l'expérience une vapeur ou poussière légère qui s'élevoit du diamant, mais on aperçut la même chose en présentant le grès seul au foyer, & on en a conclu que cette apparence avoit pour cause le mouvement du courant d'air occasionné par la chaleur du foyer.

La poudre de diamant exposée au foyer dans une capsule de porcelaine, a pareillement disparu, mais elle a laissé sur la porcelaine une tache jaune, que M. Lavoisier attribue, avec beaucoup de vraisemblance, à quelques parcelles des instrumens qui servent à pulvériser le diamant, & qu'il en avoit détachées pendant cette opération.

Ces expériences confirmoient bien l'évaporabilité du diamant, mais que devenoit-il dans sa destruction ? Pour essayer de s'en assurer, M. Lavoisier fit faire une cornue de verre de trois pintes de capacité, ayant à son fond une grande ouverture, par laquelle on introduisit un piédestal de verre, surmonté d'une capsule de porcelaine, dans laquelle étoient onze diamans, pesant quinze grains ; il est aisé de voir, qu'au moyen de cet appareil, si le diamant se réduisoit en vapeurs,

elles ſeroient retenues & rendues ſenſibles, au moins par l'odeur qu'exhaleroit le bec de la cornue : le tout ayant été mis au foyer, on crut voir s'en élever une fumée ſenſible; M. Lavoiſier vit même un des diamans bouillonner, mais il ne ſe condenſa rien, & on ne ſentit d'autre odeur que celle du maſtic qui tenoit le ſupport à la cornue qui s'échauffoit, & qui finit par ſe fondre en laiſſant tomber tout l'appareil; il eſt donc impoſſible de rien conclure de cette expérience, & il eſt plus que probable que l'eſpèce de fumée qui a paru, n'étoit dûe qu'à l'évaporation du maſtic.

Il fallut donc s'y prendre d'une autre manière; le ſupport de porcelaine réfractaire, contenant neuf diamans, fut placé ſur un pied de verre, au milieu d'une jatte de faïence remplie d'eau diſtillée, le tout fut recouvert d'une cloche de verre de ſix pouces & demi de diamètre, & fut expoſé au foyer. Pour cette fois il n'y eut point de fumée, mais l'on vit, comme dans l'expérience précédente, le diamant placé au centre du foyer bouillonner & jeter des bulles; en un quart-d'heure, il perdit les trois quarts de ſon poids, & l'endroit de la porcelaine, ſur lequel il poſoit, ſe trouva creuſé & vitrifié, en 20 minutes le diamant fut entièrement détruit. La cloche ayant été levée avec attention, on n'y trouva aucune odeur ſenſible; les gouttes de liqueur qui s'y étoient attachées, ne parurent aucunement différentes de l'eau diſtillée, & pour plus grande précaution, on la lava avec deux onces de cette même eau, qu'on réſerva avec celle qui étoit dans la jatte, pour les ſoumettre enſuite au plus ſcrupuleux examen.

Les huit diamans reſtans qui peſoient 11 grains $\frac{3}{16}$ quand on les avoit ſoumis à l'expérience, ne peſoient plus que 7 grains $\frac{2}{16}$, ils avoient perdu 4 grains $\frac{1}{16}$ de leur poids; ils étoient les uns noirs, les autres bruns, & les autres gris, & à demi tranſparens, mais ils paroiſſoient tous ſpongieux & comme caverneux à peu-près comme des pierres meulières ou du mâchefer, un ſeul étoit creuſé en forme de calotte; vus au microſcope, ils paroiſſoient détruits, en grande partie caverneux,

caverneux, aucun cependant ne paroiſſoit fondu ni vitrifié; le ſupport de porcelaine qui les portoit étoit parſemé de taches qui paroiſſoient des points vitrifiés, ſur la plupart deſquels on apercevoit des parcelles de diamant, & le tout étoit entouré d'une tache ou maculature jaunâtre & ſuperficielle; il paroît donc que pendant l'évaporation du diamant, il s'en eſt détaché des petites parcelles qui ont ſauté ça & là, & qui ont procuré la vitrification de la porcelaine aux endroits où elles ſe ſont trouvées, puiſqu'elle n'a été altérée en aucun autre endroit.

Nous avons dit ci-deſſus, que l'eau qui avoit ſervi aux expériences précédentes, avoit été ſoigneuſement raſſemblée pour examiner ſi elle n'avoit rien retenu des diamans qui s'étoient détruits ſous les cloches de verre, elle fut en effet ſoumiſe à toutes les épreuves que preſcrit la Chimie, ſans qu'on ait pu en obtenir autre choſe qu'un léger ſédiment terreux, tel que le laiſſe ordinairement l'eau diſtillée, de laquelle celle-ci ne différoit en aucune manière.

Toutes les expériences précédentes avoient été faites par un ciel bien ſerein; un ſoleil moins vif & moins actif préſenta de nouveaux phénomènes.

Six diamans furent expoſés au foyer du même verre ardent, dans le même appareil que celui des expériences précédentes, ils furent bien moins promptement & bien moins vivement attaqués; ce ne fut qu'au bout de 7 minutes que le plus gros commença à bouillonner à ſa ſurface, la plupart devinrent très-noirs, & ayant été retirés au bout de 35 minutes, on trouva que ce noir ne leur étoit point adhérent, qu'il s'attachoit aux doigts & noirciſſoit le papier, comme auroit fait du charbon ou du noir de fumée; que vus au microſcope, ils paroiſſoient ſpongieux & caverneux, & que dans ce noir on voyoit des filets blancs cotonneux & un peu ramifiés, ils avoient perdu environ un quart de leur poids; & dépouillés de leur noir, ils étoient à demi tranſparens, & d'une couleur griſâtre, excepté un ſeul qui avoit conſervé une teinte brune; d'où il ſuit que le diamant

peut être réduit en charbon, dans quelques circonſtances, qu'il eſt par conſéquent, comme M. Macquer l'avoit avancé le premier, dans la claſſe des corps combuſtibles, que cet effet n'a lieu qu'à ſa ſurface, que la plus grande partie de cette matière charbonneuſe ne lui eſt point adhérente, mais qu'une petite partie s'y joint plus intimement, & donne au diamant la couleur plus ou moins foncée qu'on y a obſervée en les tirant du foyer.

Ces mêmes phénomènes furent encore obſervés dans une ſeconde expérience ; mais dans une troiſième on en remarqua un duquel on ne s'étoit pas encore aperçu; les diamans ayant été expoſés pendant 16 minutes au feu, on retira l'appareil, & on s'aperçut qu'à meſure que la cloche de verre ſe refroidiſſoit, l'eau montoit en dedans au-deſſus de ſon niveau, ce qui indiquoit une diminution de l'air qui y avoit été enfermé; & par les meſures les plus exactes, cette diminution fut trouvée de huit pouces cubiques : on laiſſa l'appareil au même état qu'on l'avoit retiré pendant quatre jours, dans un lieu dont la température ne varioit que bien peu; alors ayant retourné la cloche avec précaution, on y verſa 15 à 16 onces d'eau de chaux, qui ſe précipita comme elle le fait avec le *gas* ou l'air qui a ſervi à la combuſtion du charbon; les diamans dans cette expérience avoient perdu la moitié de leur poids, & offroient les mêmes phénomènes que dans les expériences précédentes.

La terre ainſi précipitée de l'eau de chaux, n'offrit plus aucune des propriétés de la chaux, elle n'étoit plus ni cauſtique ni ſoluble dans l'eau, elle étoit devenue une véritable craie, & avoit repris la propriété de faire efferveſcence avec les acides, propriété dûe en ce cas au dégagement de l'air fixe, & qui n'a jamais lieu dans la combinaiſon des acides & de la chaux.

D'après cette expérience, il eſt difficile de ne pas croire que l'air dans lequel on a fait évaporer du diamant, acquiert au moins en partie les propriétés de l'air fixe, & celle de ſe

combiner avec les terres calcaires & les alkalis, propriétés que n'a pas l'air de l'atmoſphère dans l'état naturel; il paroît ſeulement que cet air fixe, produit par l'évaporation du diamant, ſe combine plus difficilement avec l'eau que l'air fixe ordinaire, puiſqu'il eſt demeuré quatre jours ſur de l'eau, ſans aucune diminution ſenſible de ſon volume.

Malgré cette propriété, M. Lavoiſier a voulu le mettre tout-à-fait hors d'état de ſe combiner avec l'eau, & pour cela il a ſubſtitué le mercure à l'eau de la jatte; les effets ont été abſolument les mêmes, l'eau de chaux a été précipitée de la même manière par l'air fixe, produit par l'évaporation du diamant, mais il n'y a eu preſque aucune diminution du volume d'air contenu dans la cloche; d'où il ſuit que cette diminution n'a lieu que lorſque l'air n'étant encore qu'en partie converti en air fixe, rencontre un fluide avec lequel il puiſſe ſe combiner.

Il réſulte de ce que nous venons de dire, que le diamant peut être mis au nombre des corps combuſtibles; comme eux lorſque la chaleur n'eſt pas trop vive, & qu'il eſt renfermé dans une portion d'air qui ne ſe renouvelle pas, il ſe réduit en une matière charbonneuſe; comme eux il fait éprouver une diminution à cet air, lorſqu'il a le contact de l'eau, il le change en une eſpèce de *gas* combinable avec les terres calcaires, comme le pourroit faire du charbon qu'on y brûleroit. M. Lavoiſier a voulu voir ſi cette analogie ſe ſoutiendroit en tout; ſi le diamant eſt véritablement un corps combuſtible, il ne doit, comme eux, brûler que dans l'air ordinaire, & non dans le vide ni dans l'air fixe; c'eſt effectivement ce qui eſt arrivé, du moins en grande partie; le diamant exposé au foyer dans un appareil rempli d'air fixe, a eu une évaporation infiniment plus lente, elle a duré $1^h\ 10'$, au lieu de $10'$, $15'$ & $20'$, & il demeure conſtant que ce corps, dans des circonſtances favorables, ſe détruit à une chaleur modérée; mais que lorſque ces mêmes circonſtances s'oppoſent à la combuſtion, il devient très-réfractaire, & ne cède qu'à l'action long-temps continuée d'un agent très-violent.

Cette propriété n'eſt pas particulière au diamant, un grand nombre de corps combuſtibles ſont dans le même cas; un degré de ſeu très-léger ſuffit pour les allumer à l'air libre, tandis qu'ils réſiſtent à un degré de feu beaucoup plus conſidérable dans les vaiſſeaux clos.

Nous avons vu dans les expériences précédentes, bien de la conformité entre la manière de brûler du diamant, & celle du charbon; M. Lavoiſier a voulu voir ſi cette conformité ſe ſoutiendroit, il a expoſé au foyer de la poudre de charbon, comme il avoit fait des diamans, ſous une cloche remplie d'air fixe, il s'en eſt conſumé, dans les premiers inſtans, une petite partie qui s'eſt réduite en cendres, & ces cendres ont été bientôt vitrifiées, mais le reſte s'eſt diſſipé ſans combuſtion en rempliſſant le vaiſſeau d'une vapeur ſemblable à une fumée qui rendoit très-viſible le cône de lumière.

Après cette opération, qui dura environ une heure, on retira l'appareil, & on le laiſſa refroidir; le mercure qu'on avoit élevé exprès dans la cloche, en ſuçant avec un ſiphon, s'eſt fixé, en refroidiſſant, un pouce neuf lignes plus bas qu'il n'étoit en commençant, & des dimenſions du vaiſſeau, on a conclu qu'il s'étoit produit environ trente-un pouces cubiques d'air; la cloche ayant été retournée, s'eſt trouvé avoir une odeur de foie de ſoufre ou de leſſive de ſoude; l'eau de chaux qu'on y a verſée, a fait un précipité, & alors l'odeur eſt devenue ſavonneuſe; le charbon s'eſt trouvé diminué de cinq grains ſur douze qui y avoient été mis.

Dans une ſeconde expérience, le charbon fut mis au foyer avec le même appareil, mais plein d'air ordinaire, il s'en brûla d'abord une partie, mais bientôt la vapeur de cette partie brûlée eut converti l'air ordinaire en air fixe, & il ceſſa de brûler, le reſte ſe volatiliſa en grande partie, comme dans l'expérience précédente : on retourna enſuite le vaiſſeau avec précaution, & on y introduiſit une bougie allumée qui s'éteignit à l'inſtant; l'eau de chaux introduite dans ce vaiſſeau s'eſt troublée, mais la précipitation en a été lente & incomplète; il paroît donc que le charbon qui, à l'air libre

ſe brûle ſi aiſément, devient très-réfractaire quand cet air lui manque; qu'alors l'extrême chaleur, au lieu de le conſumer, le volatiliſe, ſans cependant qu'il donne aucune vapeur bien ſenſible ni aucun ſublimé; que comme le diamant, il convertit l'air ordinaire en air fixe, qui s'unit à l'eau de chaux & aux alkalis; qu'il donne, lors de ſa combuſtion, une petite quantité de cendre vitrifiable.

Dans les expériences que nous venons de rapporter, on a pu remarquer que malgré l'analogie qui ſe trouve à bien des égards entre le diamant & le charbon, ce dernier ſe volatiliſoit bien plus tôt que l'autre, mais il n'y a pas lieu d'en être ſurpris, l'un eſt blanc & tranſparent, & laiſſe par conſéquent paſſer une partie des rayons, ſans en être affecté; l'autre au contraire eſt noir & opaque, & les reçoit tous; il n'eſt donc pas étonnant que le même foyer agiſſe plus vivement ſur lui.

Ces expériences, quelque curieuſes, quelque multipliées qu'elles ſoient, laiſſent encore bien des doutes à éclaircir, & M. Lavoiſier lui-même en avertit au commencement de ſon Mémoire; il en réſulte ſeulement que le diamant, à l'air libre, eſt un corps combuſtible à un degré de feu, à peine capable de fondre l'argent; qu'il produit, en ſe conſumant, une matière noire & comme charbonneuſe à ſa ſurface; enfin, que comme tous les corps combuſtibles, il convertit partie de l'air dans lequel il brûle en une eſpèce de gas qui précipite l'eau de chaux, & qui reſſemble beaucoup à celui qui ſe dégage des efferveſcences & des fermentations.

Telles ſont les inductions qu'on peut légitimement tirer des expériences contenues dans le Mémoire de M. Lavoiſier, mais il ſe propoſe bien de les continuer avec un agent encore plus puiſſant; la loupe ou lentille de quatre pieds de diamètre, qu'a fait conſtruire M. Trudaine, va fournir de nouveaux moyens, & nous tranſporter dans un ordre de choſes tout nouveau, dont les avantages ſeront toujours dûs au zèle & à l'amour pour les Sciences de ce Magiſtrat Académicien,

& l'Académie ne manquera pas d'informer le Public des obſervations & des découvertes qui ſe feront par le ſecours du nouvel inſtrument.

SUR LA

PESANTEUR SPÉCIFIQUE DES CORPS.

V. les Mém. page 1.

CET objet eſt un des plus importans de toute la Phyſique expérimentale; c'eſt auſſi un de ceux ſur leſquels les Phyſiciens ſe ſont le plus exercés: on trouve un grand nombre de Tables qui expriment le rapport qu'ont entr'eux les mêmes volumes de différentes matières, mais ces Tables ne s'accordent ni entr'elles ni aux expériences qu'on en peut faire de nouveau. Tel eſt le cas où s'eſt trouvé M. Briſſon, ayant voulu ſe ſervir, dans quelques-unes de ſes expériences, de la Table de M. Muſſchenbroëck, qui paſſe pour une des plus exactes, il y a trouvé des fautes aſſez conſidérables, pour l'inviter à reprendre ce travail en entier, & il a fait part cette année à l'Académie, de la manière avec laquelle il s'étoit propoſé de le conduire, & du réſultat de ſes expériences ſur les Métaux; il ſe propoſe d'examiner de même tous les corps, & de donner à l'Académie, dans une ſuite de Mémoires qui paroîtront ſucceſſivement, une Table dont il expoſera tous les élémens, & ſur laquelle il ſera par conſéquent juſte de compter plus que ſur toutes celles qui ont été publiées juſqu'ici : nous allons eſſayer de donner une idée de ſa méthode.

Il pèſe tous les corps ſoumis à ſes expériences hydroſtatiquement, c'eſt-à-dire, qu'il examine ce qu'ils perdent de leur poids, en les plongeant dans un même fluide, & ce fluide eſt de l'eau de pluie bien pure ou de l'eau de rivière diſtillée, & enſuite repoſée; & pour ſe procurer ces réſultats avec certitude, il s'eſt pourvu de deux balances hydroſtatiques très-exactes, l'une pour peſer les corps qu'on peut avoir

aiſément en grand volume, & l'autre pour peſer ceux qu'on ne peut ſe procurer qu'en très-petit volume.

On juge bien que dans le nombre des corps que M. Briſſon s'eſt propoſé de peſer hydroſtatiquement, il n'a pas compris ceux qui, comme les ſels ſont diſſolubles à l'eau, ni ceux qui s'en laiſſent pénétrer, il a fallu pour ceux-ci avoir recours à d'autres moyens que nous expoſerons en leur lieu.

Les fluides n'étoient pas non plus ſuſceptibles d'être peſés comme les corps ſolides en les plongeant dans l'eau, M. Briſſon s'eſt ſervi, à leur égard, de l'aréomètre de verre; & comme la très-grande différence de denſité des différens fluides ne permettoit pas d'employer toujours le même, il s'eſt procuré pluſieurs de ces inſtrumens, de la proportion deſquels il s'eſt ſoigneuſement aſſuré; & comme la chaleur peut faire changer la peſanteur ſpécifique de l'eau qu'il prend pour ſon terme de comparaiſon, & celle des différens fluides ſoumis à ſes expériences, elles ont toutes été faites à la température de 14 degrés au-deſſus de la glace du thermomètre de M. de Reaumur, température qu'il a conſtamment procurée au lieu dans lequel il opéroit.

Les métaux ont été les premiers corps que M. Briſſon a ſoumis à ſes expériences; l'importance dont il eſt ſouvent, dans une infinité de circonſtances, de bien connoître leur peſanteur ſpécifique, l'a déterminé, à commencer par-là ſes recherches, & cet examen eſt le ſujet du Mémoire dont nous avons à parler.

L'or a été éprouvé par M. Briſſon en quatre états, ſavoir; pur & ſans aucun alliage, allié au titre de l'Orfévrerie, à celui de la Monnoie de France, & enfin à celui de la Bijouterie, & ces quatre ſortes ont été éprouvées, ou ſimplement fondues ou fortement écrouies.

Il auroit peut-être été difficile à M. Briſſon de ſe procurer de l'or parfaitement pur ou à vingt-quatre karats, ſi M. Tillet n'avoit engagé M.rs les Affineurs de la Monnoie à lui en faire avoir de cette eſpèce; un morceau de cet or a été choiſi

dans un endroit des plus pleins, d'un de ces lingots qui pèſent quelquefois juſqu'à 40 marcs.

Ce morceau choiſi entre pluſieurs autres, peſoit 1 marc 1 once 5 gros 69 grains $\frac{3}{4}$, il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 3 grains $\frac{1}{2}$, ce qui donne le rapport de ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau, comme 192581 eſt à 10000, & par conſéquent la peſanteur du pouce cube d'or pur 1 marc 4 onces 3 gros 62 grains, & celle du pied cube 1348 livres 1 once 0 gros; & 41 grains d'autres morceaux ſoumis à la même expérience, ont donné les mêmes réſultats, avec des différences ſi petites, qu'on les peut regarder comme nulles; un morceau du même or écroui, autant qu'il a pu l'être, s'eſt trouvé avoir augmenté ſa denſité d'un 186.e, le pouce cube alors peſoit 1 marc 4 onces 4 gros 28 grains, & le pied cube 1355 livres 5 onces 0 gros 28 grains.

L'or allié au titre de l'Orfévrerie, doit contenir 22 parties ou karats d'or, & deux autres de cuivre rouge; le titre de la Monnoie eſt le même, ſi ce n'eſt qu'on accorde aux Monnoyeurs $\frac{10}{32}$ de karat de remède, ce qui fait 347 parties d'or, & 37 parties d'alliage.

Enfin, l'or qu'on emploie à la Bijouterie, doit être à 20 karats, c'eſt-à-dire, contenir 20 parties d'or & 4 d'alliage.

Ces trois eſpèces d'or ont été ſucceſſivement examinés, tant ſimplement fondus qu'écrouis, & il eſt réſulté de cet examen, que le pouce cube d'or allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, pèſe 1 marc 3 onces 2 gros 48 grains, & le pied cube 1224 livres 0 onces 5 gros 18 grains; le pouce cube de ce même or écroui, autant qu'il pouvoit l'être, pèſe 1 marc 3 onces 3 gros 15 grains, & le pied cube 1231 livres 4 onces 1 gros 2 grains;

Que le pouce cube d'or allié au titre de la Monnoie de France, pèſe 1 marc 3 onces 2 gros 17 grains, & le pied cube 1218 livres 2 onces 3 gros 51 grains; que le pouce cube de ce même or écroui par le balancier, pèſe 1 marc 3 onces 3 gros 36 grains, & le pied cube 1235 livres 5 onces 0 gros 51 grains. Il a eſſayé de même une Guinée, & il eſt

il eſt réſulté de cet eſſai, que l'or de la Monnoie de France eſt d'un 980me plus peſant que celui de la Monnoie d'Angleterre, & par conſéquent un peu plus pur.

Enfin, le pouce cube de l'or allié au titre de la Bijouterie, pèſe 1 marc 2 onces 1 gros 33 grains, & le pied cube 1099 livres 10 onces 0 gros 46 grains; le pouce cube du même or écroui, pèſe 1 marc 2 onces 1 gros 57 grains, & le pied cube 1104 livres 3 onces 4 gros 30 grains.

Il eſt rare qu'une recherche Phyſique, ſuivie par un habile Phyſicien, ne lui fourniſſe pas quelque phénomène acceſſoire, différent du but qu'il s'étoit propoſé; c'eſt auſſi ce qui eſt arrivé à M. Briſſon, il lui avoit été aiſé, en connoiſſant la peſanteur ſpécifique de l'or pur, & celle du cuivre rouge qui ſert, comme on ſait, d'alliage, de calculer quelle devoit être celle des différens mélanges de ces métaux, c'eſt-à-dire, de l'or différemment allié; mais il fut extrêmement ſurpris de trouver toujours la peſanteur ſpécifique de ces différens or ſenſiblement plus grande que ne la donnoit le calcul; d'où il réſulte néceſſairement que dans la fonte des deux métaux, il ſe fait une pénétration mutuelle qui diminue leur volume; cette eſpèce d'affinité du cuivre & de l'or doit au reſte d'autant moins ſurprendre, qu'on ſait que dans les mines de cuivre, l'or eſt preſque toujours mêlé à ce métal.

L'argent a été ſoumis aux mêmes expériences que l'or, & M. Briſſon l'a éprouvé dans trois états, très-pur & ſans aucun alliage, allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, c'eſt-à-dire, contenant cent trente-ſept parties d'argent & ſept de cuivre rouge, & enfin allié au titre de la Monnoie, c'eſt-à-dire, contenant vingt-neuf parties d'argent & trois de cuivre.

Le pouce cube de l'argent, abſolument pur, s'eſt trouvé peſer 6 onces 6 gros 22 grains, & par conſéquent le pied cube 733 livres 3 onces 1 gros 52 grains; le pouce cube du même argent écroui, autant qu'il a été poſſible, a peſé 6 onces 6 gros 36 grains, & le pied cube 735 livres 11 onces 7 gros 43 grains.

Le pouce cube de l'argent allié au titre de l'Orfévrerie de

Paris, peſoit 6 onces 4 gros 55 grains, & par conſéquent le pied cube 712 livres 4 onces 1 gros 57 grains; le pouce cube du même argent bien écroui, s'eſt trouvé peſer 6 onces 5 gros 58 grains, & le pied cube 726 livres 5 onces 5 gros 32 grains.

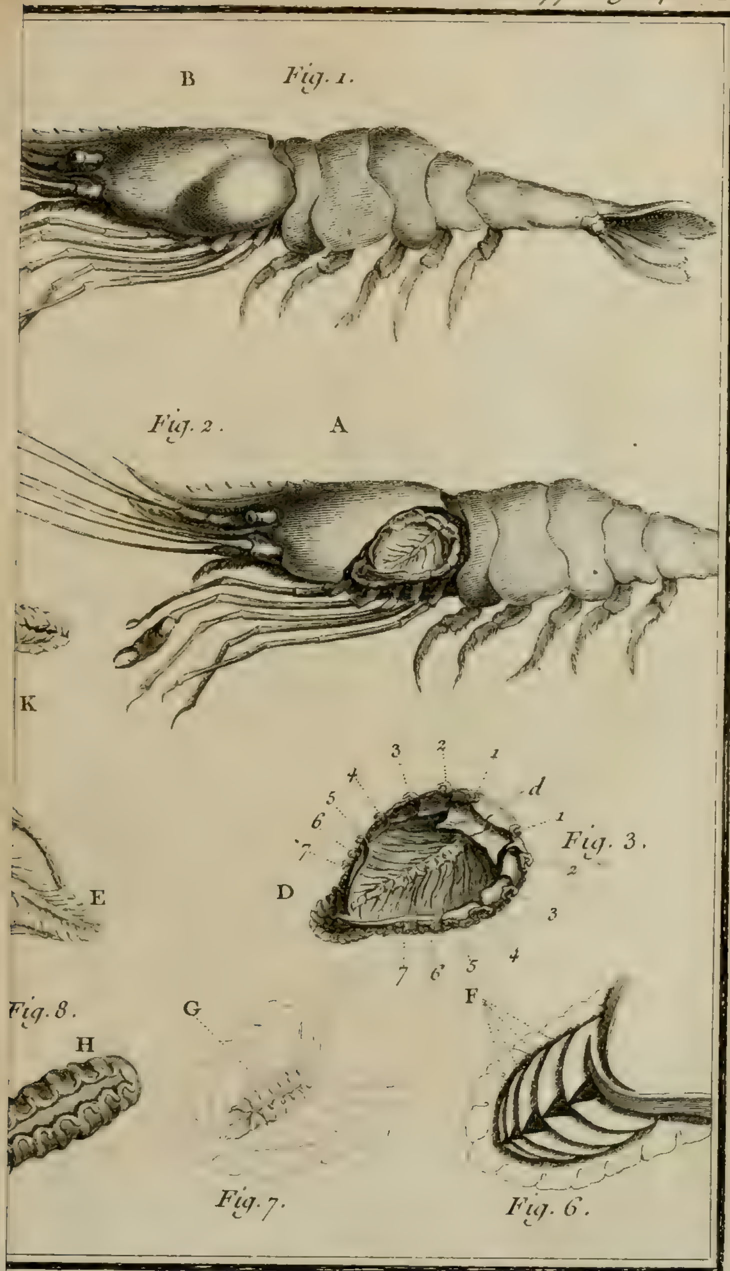
Le pouce cube de l'argent allié au titre de la Monnoie de France, a peſé 6 onces 4 gros 55 grains, & le pied cube 712 livres 4 onces 1 gros 57 grains; écroui par le balancier, c'eſt-à-dire, dans l'état de Monnoie, le pouce cube a peſé 6 onces 5 gros 70 grains, & le pied cube 728 livres 8 onces 4 gros 1 grains.

On juge bien que les expériences faites ſur l'or avoient mis M. Briſſon en garde contre la pénétration des métaux, mais il a trouvé ici le contraire : loin que la peſanteur ſpécifique de l'argent allié ſe ſoit trouvée plus grande que ne la donnoit le calcul, elle s'eſt trouvée au contraire plus petite, d'où il ſuit que non-ſeulement il n'y a pas eu de pénétration, mais que même les parties ne ſe ſont pas rapprochées autant qu'elles pourroient l'être, puiſque la denſité du métal composé ſe trouve moindre qu'elle n'auroit dû l'être.

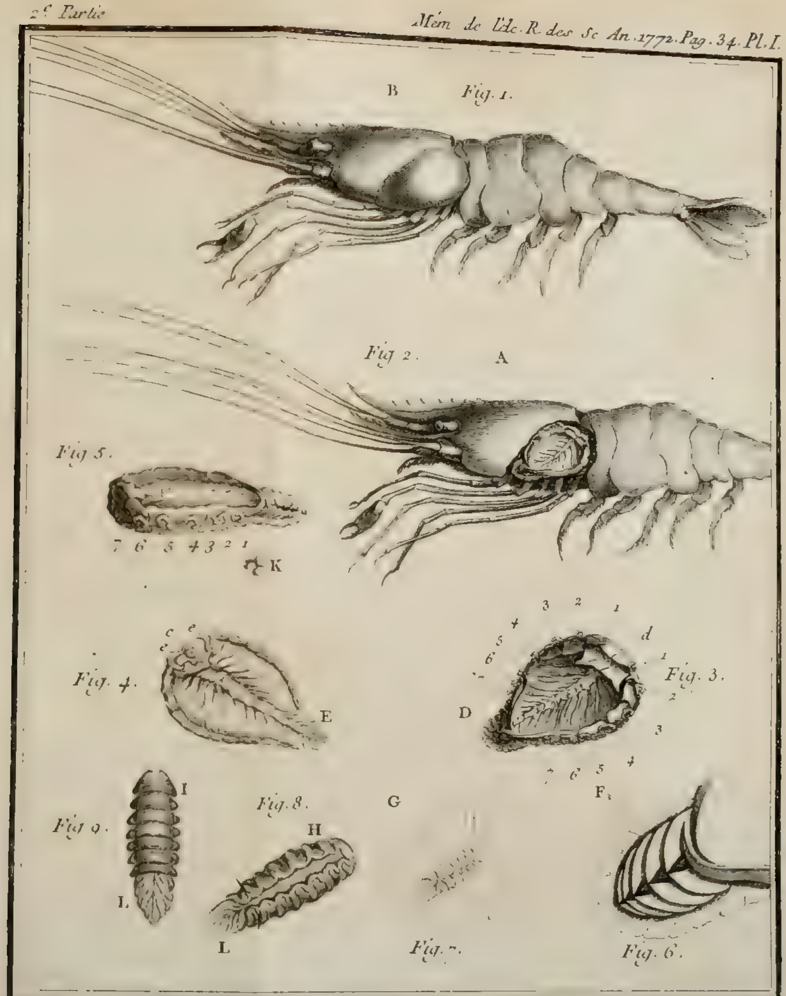
M. Briſſon a ſoumis à ſes expériences les deux eſpèces de cuivre connus, le cuivre rouge & le cuivre jaune ou laiton, & l'un & l'autre ont été éprouvés ſimplement fondus, puis comprimés par une grande force.

Le pouce cube de cuivre rouge, ſimplement fondu, a peſé 5 onces 0 gros 28 grains, & le pied cube du même métal 545 livres 2 onces 4 gros; le pouce cube du même cuivre comprimé par la filière où on l'a tiré en cylindre, peſoit 5 onces 6 gros 3 grains, & le pied cube 621 livres 7 onces 7 gros 26 grains.

Le pouce cube du cuivre jaune ſimplement fondu, a peſé 5 onces 3 gros 38 grains, & par conſéquent le pied cube 587 livres 11 onces 2 gros 26 grains; le pouce cube du même cuivre tiré en cylindre à la même filière où avoit paſſé le cuivre rouge, a peſé 5 onces 4 gros 22 grains, & par conſéquent le pied cube 598 livres 1 once 3 gros 10 grains.



Y. le Gouaz sculp



Fossier del. Y. le Gouaz Sculp.

Pour peu qu'on examine les deux derniers articles, on ne peut s'empêcher d'être ſurpris, en voyant que le pied cube de cuivre de roſette non comprimé, eſt moins peſant que le même volume de cuivre jaune dans le même état, tandis que le cuivre de roſette comprimé au même degré que le cuivre jaune devient au contraire ſpécifiquement plus peſant que ce dernier. M. Briſſon donne une raiſon très-plauſible de cette eſpèce de phénomène.

Le cuivre rouge ou de roſette eſt un métal ſimple, & le cuivre jaune eſt un mélange de ce même cuivre & d'environ un cinquième de zinc; dans ce mélange il ſe fait une pénétration du cuivre & du zinc, qui entrent mutuellement dans les pores l'un de l'autre, & il en réſulte néceſſairement que le compoſé eſt ſpécifiquement plus peſant que ne l'exigent les denſités particulières des deux matières compoſantes; & en ſecond lieu, qu'il réſiſte plus à la preſſion que le cuivre rouge, parce que ſes pores étant remplis, ſes molécules ne peuvent pas ſe rapprocher ſi aiſément, ce qui fait que dans ce dernier cas, le cuivre rouge qui ſe laiſſe plus aiſément comprimer, devient ſpécifiquement plus peſant, dans un plus grand rapport que le cuivre jaune.

Le fer a été ſoumis aux expériences de M. Briſſon, dans quatre états différens; dans l'état de fer fondu, dans celui de fer en barre, écroui ou battu à froid, & enfin battu à chaud.

Le pouce de fonte de fer très-pure, a peſé 4 onces 5 gros 27 grains, & le pied cube 504 livres 7 onces 6 gros 52 grains.

Le pouce cube du fer en barre a peſé 5 onces 0 gros 28 grains, & le pied cube 545 livres 2 onces 4 gros 35 grains.

La denſité du fer en barre n'augmente pas ſenſiblement en l'écrouiſſant: bien loin de-là, elle diminue ſi la barre eſt battue en deux ſens, M. Briſſon en fait apercevoir la raiſon; le fer eſt compoſé de lames, & le martinet qui l'a réduit en barres, les a appliquées fortement les unes ſur les autres, comme les feuillets d'un livre bien battu; il eſt donc preſque

impoſſible de les ſerrer davantage de ce ſens, mais ſi on les bat à froid de l'autre ſens, on écarte ces lames, on les courbe, & on forme dans la ſubſtance du fer une infinité de vides qui en augmentent le volume & en diminuent la denſité; d'où il ſuit encore qu'en battant le fer à froid, on court riſque de l'affoiblir & d'y produire des gerſures; les mêmes barres ayant été rougies & fortement battues à chaud, ont repris la denſité que l'écroui, en deux ſens, leur avoit fait perdre, ce qui confirme encore l'explication qu'a donnée M. Briſſon de ce phénomène.

Non-ſeulement le fer ſe trouve dans l'état de fonte & dans celui de barre, mais on le fait encore paſſer, au moyen d'une opération connue, de ce dernier état, dans celui d'acier. Sous cette dernière forme il acquiert la propriété ſingulière de ſe durcir très-conſidérablement, ſi l'ayant fait rougir, on le trempe ſubitement dans l'eau froide.

M. Briſſon a éprouvé l'acier, ſans être écroui ni trempé, étant écroui & non trempé, étant trempé & non écroui, & enfin étant écroui & enſuite trempé.

Le pouce cube de l'acier dans ſon état naturel, a peſé 5 onces 0 gros 44 grains, & le pied cube 548 livres 5 onces 0 gros 41 grains.

Le pouce cube du même acier, bien écroui, a peſé 5 onces 0 gros 47 grains, & le pouce cube 548 livres 13 onces 1 gros 71 grains.

Le pouce cube de ce même acier écroui, trempé enſuite de tout ſon dur, a peſé 5 onces 0 gros 39 grains, & le pied cube 547 livres 4 onces 1 gros 20 grains; d'où il ſuit que la trempe diminue la denſité de l'acier beaucoup plus que l'écroui ne l'augmente.

Le pouce cube du même acier trempé de toute dureté, ſans avoir auparavant été écroui, a peſé 5 onces 0 gros 38 grains & le pied cube 547 livres 2 onces 2 gros 3 grains.

L'acier perd donc conſtamment par la trempe de ſa denſité, en même temps qu'il acquiert de la dureté, mais il eſt, avant qu'on le trempe, ſpécifiquement plus peſant que le fer, ce

qui semble indiquer que les matières étrangères qu'on emploie pour le rendre acier, le pénètrent & remplissent les vides qu'il contenoit dans l'état de fer; sans cette pénétration, elles devroient, étant plus légères que le fer, rendre l'acier spécifiquement moins pesant que ce métal, aussi l'acier offre-t-il les deux caractères des métaux alliés, la plus grande fusibilité & la plus grande dureté.

Le plomb a été éprouvé, d'abord simplement fondu, & ensuite fortement battu à coups de marteau.

Le pouce cube de plomb simplement fondu, a pesé 7 onces 2 gros 62 grains, & le pied cube 794 livres 10 onces 4 gros 44 grains, mais on a eu beau le battre, il n'a pas acquis sous le marteau le moindre degré sensible de densité; dans une seule des expériences, il se trouva $\frac{1}{348}$.^e d'augmentation de densité, ce qui venoit probablement de quelques soufflures qui s'étoient trouvées dans le plomb simplement fondu, & que les coups de marteau avoient fait disparoître.

Le dernier des métaux examiné par M. Brisson, a été l'étain, il en a éprouvé six sortes différentes, d'abord simplement fondu, & ensuite bien écroui.

Les six espèces d'étain soumises à ses expériences, ont été l'étain pur de Cornwall en Angleterre, dont M. Duhamel lui avoit donné un morceau, qu'il avoit obtenu par le crédit de Mylord Duc de Richemond; l'étain de Malac, & les quatre espèces d'étain des Potiers, savoir; l'étain neuf, l'étain fin, l'étain commun & la *claire-étoffe;* le pouce cube de l'étain de Cornwall, pèse 4 onces 5 gros 58 grains, & le pied cube 510 livres 6 onces 2 gros 68 grains.

Le pouce cube de cet étain bien écroui, a pesé 4 onces 5 gros 61 grains, & le pied cube 510 livres 15 onces 2 gros 45 grains.

Le pouce cube de l'étain de Malac, simplement fondu, a pesé 4 onces 5 gros 60 grains, & le pied cube 510 livres 11 onces 6 gros 61 grains.

Le pouce cube du même étain, fortement écroui, a pesé 4 onces 5 gros 64 grains, & le pied cube 511 livres 7 onces 2 gros 17 grains.

Le pouce cube de l'étain neuf des Potiers, s'eſt trouvé peſer 4 onces 5 gros 62 grains, & le pied cube 511 livres 1 once 3 gros 47 grains.

Le pouce cube du même étain, fortement écroui, a peſé 4 onces 5 gros 66 grains, & le pied cube 511 livres 12 onces 7 gros 3 grains.

Le pouce cube d'étain fin des Potiers s'eſt trouvé peſer 4 onces 6 gros 56 grains, & le pied cube 523 livres 8 onces 2 gros 68 grains.

Le pouce cube du même étain, fortement écroui, a peſé 4 onces 6 gros 71 grains, & le pied cube 526 livres 5 onces 5 gros 59 grains.

L'étain commun a donné pour poids du pouce cube 5 onces 1 gros 5 grains, & pour celui du pied cube 554 livres 6 onces 3 gros 14 grains.

L'étain nommé *claire-étoffe*, a donné pour poids du pouce cube 5 onces 4 gros 0 grains, & pour celui du pied cube 594 livres 1 once 2 gros 45 grains.

Ces deux dernières ſortes d'étain n'ont pas ſenſiblement changé de denſité en les écrouiſſant, peut-être la quantité de plomb qui entre dans leur alliage en eſt-elle la cauſe; d'ailleurs, ſelon la remarque de M. Briſſon, l'étain lui-même augmente peu de denſité par l'écroui, qui n'augmente preſque pas non plus l'élaſticité de ces deux métaux.

Tel eſt le réſultat des expériences de M. Briſſon, ſur la peſanteur ſpécifique des Métaux, elles ſont bien propres à faire deſirer de voir publier promptement la ſuite de ce travail intéreſſant, & à faire voir à quel prix on achette l'exactitude dans les Recherches Phyſiques.

SUR LE VARECH.

V. les Mém. p. 25.

* Voy. Hiſt. de 1771, p. 25.

L'ACADÉMIE a rendu compte, en 1771 *, du Voyage de M.rs Tillet & Fougeroux ſur les côtes de Normandie, & de la circonſtance qui y avoit donné lieu; elle y ajoutoit que les deux Académiciens qui s'étoient empreſſés de répondre

à ce qui intéressoit le plus le Gouvernement, dans l'objet de leur mission, réservoient pour un autre Mémoire les observations qu'ils avoient faites sur la nature du Varech, & dont quelques-unes même pouvoient être utiles à l'objet qui avoit principalement occasionné leur voyage; c'est de cette promesse qu'ils s'acquittent dans le Mémoire dont nous avons à parler.

Nous prierons le Lecteur, de se souvenir que le principal objet du Voyage de M.rs Tillet & Fougeroux, étoit de décider si on devoit permettre aux Habitans des côtes de la Normandie, de récolter le varech pour le brûler, & en tirer une espèce de soude extrêmement utile aux Verreries : on prétendoit, qu'ôter le varech, étoit priver les poissons d'une retraite utile pour leurs œufs, & pour les jeunes poissons qui en devoient éclore, & que la fumée des fourneaux où l'on brûloit cette plante, pouvoit introduire, dans le canton, des maladies épidémiques très-dangereuses.

L'examen le plus scrupuleux des deux Académiciens, n'a pu leur faire apercevoir la moindre réalité dans aucune de ces objections; ils se sont pleinement convaincus que les poissons ne se servoient point du varech pour y déposer leur frai, ni pour y chercher une retraite dans leur jeune âge, & que la fumée n'avoit d'autre inconvénient que la mauvaise odeur d'herbes brûlées, sans qu'elle n'ait jamais pu causer aucune maladie, ni aux Habitans voisins, ni aux ouvriers qui y sont continuellement plongés, ni à eux-mêmes qui l'ont exprès affronté assez long-temps pour en avoir dû ressentir les mauvais effets si elle avoit été capable d'en produire; & le résultat de toutes leurs expériences, a été de laisser subsister la récolte de cette plante marine, & sa conversion en soude devenue un objet de travail & de commerce pour les Habitans de ces cantons, & de nécessité pour les Verreries qui en sont à portée.

La récolte du varech étant reconnue pour utile, il devenoit important de s'assurer des moyens de la rendre plus abondante, & d'empêcher sur-tout qu'une mauvaise manière de

la faire, ne pût la faire diminuer, c'est ce qui ne pouvoit se faire sans connoître la nature de ces plantes, & la manière dont elles se multiplient.

Nous disons de ces plantes, car sous le nom de *varech*, *Sar* ou *Goëmon*, on comprend plusieurs espèces, M.[rs] Tillet & Fougeroux en ont trouvé jusqu'à huit dans le nombre de celles qui composent le grand varech, qui est celui qu'on brûle de préférence; ces huit espèces sont toutes du genre des *fucus;* ces plantes ne viennent, ni sur la vase, ni même sur le sable, on ne leur trouve aucune racine, mais une espèce d'empattement, quelquefois formé en griffe, par lequel elles s'attachent aux rochers, aux pierres éboulées des falaises ou bords escarpés de la mer, à des coquilles; en un mot, à des corps incapables de leur fournir aucune nourriture, mais seulement de les garantir de l'agitation des vagues, qui malgré ce secours, en arrachent cependant une assez grande quantité qu'elles jettent & laissent au rivage.

Ces plantes ne se soutiennent droites sur leurs tiges, que lorsqu'elles sont couvertes d'eau, lorsque la mer les découvre en se retirant, elles se couchent sur le rocher qui les porte, & alors il est très-difficile d'y marcher, ces plantes ayant une certaine viscosité qui rend le chemin très-glissant.

Pour être en état de prescrire les moyens les plus propres à favoriser la multiplication des plantes qui composent ce qu'on nomme *varech*, il étoit nécessaire de connoître leurs graines, & par conséquent les organes de la fructification; ce travail avoit autrefois été commencé sur quelques-unes de ces plantes qui croissent sur les côtes d'Aunis & de Poitou, par feu M. de Reaumur, & il avoit consigné ses observations dans les Mémoires de l'Académie de 1711 *.

* Voy. Hist. 1711, p. 55.

Dans le nombre de ces plantes, il s'en trouve une dont les feuilles sont garnies de filets blancs, qu'on peut regarder comme la partie mâle de la plante, il est vrai que ces filets n'offrent pas, à leur extrémité, les sommets que portent les étamines des plantes terrestres, & d'où sort la poussière fécondante, mais il y a d'autres plantes du même genre qui ont

ont des filets ſemblables, & qui ſont cependant bien reconnus pour organes fécondans; vers le mois de Septembre, nos Obſervateurs ont aperçu aux extrémités des feuilles, des petits tubercules qu'on pourroit prendre pour les capſules des graines.

Dans une autre plante, ces capſules ſont bien mieux marquées, celle-ci les porte aux extrémités de ſes feuilles, elles y paroiſſent ſous la forme de veſſies plus ou moins groſſes, placées aux extrémités des feuilles; on n'y voit point de filets, ce qui a fait croire à M. de Reaumur, & à quelques autres Naturaliſtes, que la première plante, dont nous avons parlé, eſt l'individu mâle, & celle-ci l'individu femelle; mais les boutons ou tubercules que M.rs Tillet & Fougeroux ont obſervés ſur le prétendu individu mâle, les porteroient à croire qu'il rentre plutôt dans la claſſe la plus générale des plantes, & qu'il eſt hermaphrodite.

Dans une autre de ces plantes, ils trouvèrent auſſi des véſicules, mais celles-ci n'étoient pas conſtamment placées aux extrémités des feuilles, elles étoient ſemées çà & là ſur leur ſurface; celles-ci ne contenoient ni la graine ni l'eſpèce de mucilage qui l'accompagne dans toutes ces plantes, & nos Obſervateurs ne peuvent leur aſſigner d'autre uſage que de contribuer à faire tenir la plante droite, en la rendant beaucoup plus légère que le volume d'eau qu'elle déplace; auſſi celles qui paroiſſent le plus chargées de ces véſicules ſont préciſément celles qui ont le plus de beſoin de ce ſecours.

Une autre eſpèce porte aux extrémités de ſes branches des ſiliques qui ſont comme compoſées d'articulations.

A en juger par l'analogie de ces ſiliques, avec celles des plantes terreſtres, on ſeroit tenté de chercher la graine de la plante dans l'intérieur de ces ſiliques, on ne l'y trouveroit cependant pas, quoique les ſiliques la contiennent, elle y eſt placée ſous l'enveloppe extérieure, & les loges de la ſilique ne ſont remplies que par des filets déliés.

Il paroît en général que, conformément au ſentiment de Donati, le ſyſtème de la fructification des plantes marines,

diffère de celui de la fructification des plantes terrestres, en ce que, dans ces dernières, la partie fécondante est une poussière qui a l'air pour véhicule, & que les graines destinées à rouler, ou à être emportées par le vent, ont des formes relatives à cet usage, au lieu que dans les plantes marines, la partie fécondante est une liqueur visqueuse qui procure le double avantage de féconder les graines, & de les coller ensuite aux corps durs sur lesquels elles doivent germer & croître.

Les plantes qui composent le varech, qu'on brûle sur les côtes de Normandie, se trouvent souvent chargées de polypiers de différentes espèces, M.[rs] Tillet & Fougeroux y en ont trouvé quelques-unes, la plupart connues des Naturalistes.

La fructification de ces plantes étant connue, il auroit été bien avantageux, pour trouver le moyen de les multiplier, de connoître la germination de leurs graines, ou ce qui est la même chose, la manière dont elles se développent, mais ce développement, qui se fait vraisemblablement sous les eaux de la mer, doit être extrêmement difficile à saisir, aussi a-t-il échappé aux recherches les plus assidues de nos Observateurs.

Au défaut de cette connoissance, ils se sont tournés d'un autre côté, & ont cherché à connoître s'il étoit plus avantageux de couper le varech que de l'arracher.

L'Ordonnance rendue à ce sujet, prescrit de le couper, & elle s'exécute dans quelques provinces, mais dans la Normandie on l'arrache, & la raison qu'en donnèrent les ouvriers aux deux Académiciens, c'est qu'en arrachant les plantes au mois d'Avril, on ménage les jeunes qui donnent une seconde récolte au mois de Septembre, & que d'ailleurs les tiges cassées ou coupées, ne produisent plus rien, & nuisent à la pousse des jeunes plantes; ils en firent en effet voir plusieurs de cette espèce.

Ces raisons méritoient d'autant mieux d'être écoutées, que la méthode usitée en Normandie, d'arracher le varech, au lieu de le couper, est plus longue & plus pénible que cette

dernière, & que par conséquent, ce ne pourroit être l'intérêt qui les fit parler.

Pour n'avoir cependant rien à se reprocher sur un article si important, ils résolurent de consulter le véritable oracle des Physiciens, l'expérience.

Pour cela ils choisirent, vers la fin d'Avril, un canton de varech qui fut partagé en trois; dans la première partie, le varech fut arraché entièrement; dans la seconde, plusieurs rangées furent coupées à deux pouces de l'empattement, d'autres à quatre, & enfin les dernières aux trois quarts de la hauteur de la plante; dans la troisième enfin, on laissa le varech sans y toucher, avec ordre exprès de le respecter; le but de M.rs Tillet & Fougeroux étoit de s'assurer du temps jusqu'auquel le varech peut croître sans se détériorer, mais des circonstances imprévues les mirent hors d'état de pouvoir rien prononcer sur cet article; revenons aux deux autres, c'est-à-dire, au varech coupé & au varech arraché.

Les deux Observateurs étant revenus le 25 Septembre, ils trouvèrent que la partie où le varech avoit été arraché entièrement, étoit garnie de nouvelles plantes qui avoient deux à trois pouces de hauteur, & qui au 25 Novembre se trouvèrent crûes jusqu'à six pouces, & quelques-unes jusqu'à neuf.

Dans le canton où le varech avoit été coupé, il étoit encore dans le même état, au moins pour celui qui avoit été coupé près de l'empattement, la partie de tige demeurée, étoit devenue plus noire, & principalement près de la section; on ne voyoit dans toute cette partie, que quelques jeunes plantes venues de graine dans les endroits éloignés des tiges coupées; les plantes coupées plus haut avoient, en quelques endroits, quelques houpes de nouvelles feuilles qui ne promettoient pas de belles productions; au 25 Novembre toutes ces tiges étoient fannées, & dans tout ce canton, il ne s'est trouvé qu'un seul pied coupé sur la racine duquel on ait vu une nouvelle tige, d'environ un pouce & demi, qui y étoit venue de graine.

Ces expériences ſemblent prouver que la méthode d'arracher le varech eſt infiniment préférable à celle de le couper, & la quantité de ces plantes qui ſe reproduiſent ſur les côtes de Normandie où l'on eſt dans l'uſage de les arracher, eſt au moins une preuve ſans replique que cette opération ne nuit pas à leur reproduction, & qu'on doit réformer ou ne pas ſuivre à la lettre l'article de l'Ordonnance, qui ordonne de couper le varech.

Ceci même ſemble très-conforme à la bonne Phyſique; les fucus, ſuivant l'idée de M. le Comte Marſigli, ſont une plante toute racine, entourée de toutes parts de l'eau de la mer, dont elle tire ſa nourriture; d'où il ſuit qu'en coupant les feuilles, & ne laiſſant que la tige, on empêche néceſſairement ſa reproduction; cette petite théorie parfaitement d'accord avec l'expérience, ſemble demander auſſi que le varech ſoit arraché & non coupé, & qu'on ne l'arrache que dans le temps auquel il a déjà donné ſa graine; on peut s'en fier ſur ce point à ceux qui ſont ce commerce, de l'intérêt deſquels il eſt de favoriſer la reproduction de cette matière.

SUR LA

SUPÉRIORITÉ DES PIÈCES D'ARTILLERIE, longues & ſolides, ſur les Pièces courtes & légères.

V. les Mém. p. 77.

L'OBJET de ce Mémoire eſt auſſi ſingulier qu'intéreſſant, il ſemble qu'il ne doive y avoir aucune queſtion ſur ce ſujet, qui devroit être très-peu ſoumis à l'empire de la mode, & le Mémoire de feu M. de Vallière, dont nous allons eſſayer de donner une idée, eſt deſtiné à préſenter les véritables principes par leſquels doit être décidée cette queſtion.

La longueur & le poids des pièces d'Artillerie, ne ſont nullement arbitraires, il y a un *maximum*, s'il m'eſt permis d'employer ce terme, dans cette matière en-deçà ou au-delà duquel on tombe dans des inconvéniens d'autant plus graves,

qu'on s'en éloigne davantage ; feu M. de Vallière le père ne se détermina pour les calibres qu'il prescrivit dans l'Ordonnance de 1732, que sur les observations sans nombre qu'il avoit eu occasion de faire pendant les vingt-huit dernières années du règne de Louis XIV, sur les effets & les inconvéniens des différentes artilleries de l'Europe, & qu'il avoit eu tout le loisir de méditer & de combiner pendant la paix qui accompagna le commencement du règne de Louis XV.

Malgré l'autorité de cet illustre Officier, si digne d'être Législateur en cette partie, le système des pièces courtes & légères qui s'étoit accrédité dans le Nord, a pénétré jusqu'en France, où il a trouvé des partisans qui ont porté leur zèle jusqu'au point de vouloir absolument supprimer les pièces longues de 12, de 8 & de 4, établies par l'Ordonnance de 1732, & leur substituer uniquement les pièces courtes & légères.

C'est à cette prétention que M. de Vallière fils a cru devoir s'opposer, & il a consigné, dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte, les raisons qui le portent à proscrire cette nouvelle espèce d'artillerie; essayons d'en mettre le précis sous les yeux du Lecteur.

Il est tout naturel de penser que plus une arme à feu a de longueur, plus aussi elle a de justesse & de portée ; un fusil de même calibre qu'un pistolet, porte bien plus loin avec la même charge, & la justesse du tir en est sans comparaison plus grande ; & une tradition constante assure que les coulevrines portoient beaucoup plus loin que les autres pièces.

Toutes ces assertions fondées sur des faits connus de tout le monde, se trouvent encore fondées dans la saine théorie ; il ne faut pas s'imaginer que toute la poudre de la charge d'une pièce d'artillerie, soit efficacement employée à chasser le boulet, une partie est jetée hors de la pièce sans être brûlée, & celle qui se brûle en formant ce long cylindre de feu qu'on voit sortir de la bouche des pièces, ne contribue presque point à chasser le boulet ; il est donc constant que du moins jusqu'à un terme, dont la plus longue artillerie n'approche

pas, plus la pièce ſera longue, & moins il y aura de poudre conſumée inutilement; c'eſt auſſi ce que les expériences de Robins & de M. le Chevalier d'Arcy, de cette Académie, ont pleinement confirmé.

En vain allégueroit-on, comme font les partiſans de l'artillerie légère, l'exemple d'une coulevrine, dont un morceau de deux pieds & demi près de la volée ayant été emporté par le boulet, la pièce chaſſa enſuite ſon boulet plus loin; l'accident même fait voir évidemment que l'ame de cette pièce n'étoit pas droite, & que la partie emportée faiſoit obſtacle au boulet; ce n'eſt pas tout, les avantages attribués aux pièces longues, leur ont été, diſent-ils, attribués ſans preuves, & ſans être appuyés ſur l'expérience : jamais aſſertion ne fut plus dénuée de fondement, quand les pièces longues n'auroient, pour les appuyer, que l'uſage conſtant qu'on en a fait à la guerre, on ne pourroit pas dire qu'elles n'ont pas pour elles l'expérience, mais elles en ont de faites expreſſément pour décider cette queſtion : écoutons parler M. de Montecuculi, ſi bien connu dans toute l'Europe militaire.

Il fit fondre quantité de pièces, depuis la plus courte juſqu'à la plus longue, & depuis la plus légère juſqu'à la plus peſante; il fit tendre enſuite des toiles d'eſpace en eſpace dans la ligne du coup; il fit auſſi tirer pluſieurs coups contre une terre argilleuſe, pour juger de la force & de la direction des coups des différentes pièces; & d'un très-grand nombre d'expériences, il conclud que l'artillerie trop légère ne peut faire un grand effet, qu'elle recule trop, qu'elle s'échauffe en peu de temps, & qu'elle ne tire pas toujours juſte, & que les coulevrines, dont l'ame a depuis trente-deux juſqu'à trente-ſix calibres de longueur, portent plus loin que les autres pièces. Veut-on conſulter M. Robins, il établit pour maxime que, de deux pièces de même calibre de différente longueur, la plus longue avec la même charge, imprime à ſon boulet une plus grande vîteſſe que l'autre, & il cite à ce ſujet une coulevrine de ſoixante calibres de longueur, qui ayant été réduite à vingt, ne put, avec la même charge, enfoncer ſon boulet qu'à

la moitié de la profondeur où elle l'enfonçoit quand elle en avoit ſoixante.

Veut-on encore une autorité de plus, M. d'Antoni, Directeur de l'École d'Artillerie de Turin, regarde dans ſon excellent ouvrage intitulé : *Examen de la poudre*, la ſupériorité des pièces longues comme inconteſtable, & elle s'y trouve démontrée par le raiſonnement & par pluſieurs expériences, & ce qui mérite bien d'entrer en ligne de compte, ces expériencs avoient été faites dans d'autres vues.

La théorie en ce point parfaitement d'accord avec l'expérience, prononce donc en faveur des pièces longues, & fait voir qu'à charge égale, leur boulet a plus de vîteſſe, & va plus loin que celui des pièces courtes de même calibre.

Mais, diront les défenſeurs de la nouvelle artillerie, nous pouvons parvenir au même point, en donnant plus d'élévation à nos pièces, & en diminuant le vent de leurs boulets, au lieu que les partiſans de l'ancienne artillerie augmentent celui des leurs beaucoup au-delà de l'Ordonnance de 1732.

La preuve de cette dernière aſſertion eſt ſur-tout ſingulière, on a trouvé, dit-on, dans quelques arſenaux des boulets qui avoient plus de vent que ne le preſcrit l'Ordonnance; mais ces boulets ne ſeroient-ils point de calibre étranger ? ne ſeroient-ils point antérieurs à l'Ordonnance ? & quand ils lui ſeroient bien poſtérieurs, que ſeroient-ils ? qu'une infraction de la loi qui auroit échappé à la vigilance des Officiers chargés de la maintenir, & qui ne peut lui porter aucune atteinte.

Quant au plus d'élévation des pièces, & à la diminution du vent, c'eſt-à-dire, du jeu des boulets dans les pièces, il eſt clair qu'on n'en pourroit tirer aucune induction en faveur de l'artillerie courte, puiſque ces mêmes opérations étant ou pouvant être communes aux pièces longues & aux pièces courtes, ne donnent à ces dernières aucun avantage ſur les autres, & nous allons bientôt voir que cet avantage n'exiſte point.

Pour faire mieux comprendre ce qui concerne l'élévation des pièces, il ne ſera peut-être pas inutile de rappeler au

Lecteur, qu'un boulet de canon ne décrit point, en ſortant de ſa pièce, une ligne droite; la peſanteur agit ſur lui en même temps que l'impulſion de la poudre, & lui fait décrire une courbe, en ſorte que ſi la ligne de mire étoit exactement parallèle à l'ame du canon, le boulet porteroit toujours plus bas que le point qu'on auroit voulu atteindre, mais comme pour pointer on ſuit le deſſus du canon, & que la pièce eſt beaucoup plus épaiſſe à la culaſſe qu'à la volée, la direction de l'ame fait, avec la ligne de mire, un angle qui compenſe à une certaine diſtance l'abaiſſement du boulet cauſé par la peſanteur.

Il ſuit encore de la même théorie, 1.° que plus la vîteſſe imprimée au boulet par la poudre, ſera grande, moins il baiſſera par l'effet de la peſanteur; 2.° qu'en élevant la pièce on augmente ſa portée juſqu'à un certain point, & ce point a été déterminé par M. de Borda *, en ayant égard à la réſiſtance de l'air à 42 degrés 10′, mais dans ce dernier cas le boulet perd de ſa vîteſſe, & n'eſt preſque, à la fin de ſa courſe, animé que par la ſeule peſanteur, auſſi eſt-il très-rare de voir pointer le canon ſous cet angle : on ſavoit donc bien qu'on augmentoit la portée des pièces en les élevant, & ſi l'on ne ſe ſervoit pas de ce moyen, c'eſt qu'il avoit paru plus utile de ſe ſervir de boulets vifs & dans toute leur force, que de boulets morts; on en peut dire autant de la diminution du vent, pratiquée dès le règne de Louis XIII, de laquelle les pièces longues même profiteroient plus que les courtes, parce que la poudre enflammée, retenue plus long-temps dans l'ame de la pièce, doit communiquer une bien plus grande vîteſſe au boulet; mais voici, ſelon M. de Vallière, quelque choſe de bien plus fort, les pièces longues ont plus de juſteſſe que les pièces courtes, tant du côté du pointement, que du côté du tir; du côté du pointement, parce que la collimation eſt d'autant plus exacte, que l'inſtrument eſt plus grand; & du côté du tir, parce que le boulet étant chaſſé avec plus de vîteſſe, arrive plus promptement au but, a moins à eſſuyer l'effet de la peſanteur, & pourra conſerver une bien plus grande

* Voy. Hiſt. 1769, p. 119.

grande ſorce, que celui qui n'arriveroit à la même diſtance, qu'en élevant davantage la pièce, & qui a dans ce cas aſſez perdu de la ſienne pour ne pouvoir faire de ricochet; la pièce longue a donc ſur la courte la ſupériorité de juſteſſe.

Pour remédier à cet inconvénient, les partiſans de la nouvelle Artillerie ont imaginé d'adapter une hauſſe mobile à leurs canons, mais M. de Vallière prétend que cette hauſſe ne remédie à rien, 1.° parce qu'elle ſera ſujette à ſe rompre ou à ſe fauſſer, 2.° parce qu'en la ſuppoſant dans le meilleur état, elle ne ſervira qu'à donner de l'élévation à des pièces qui en ont déjà trop, & à faire lancer des boulets qui retomberont au haſard, & qui dans le cas le plus favorable, ne pourroient au plus bleſſer qu'un homme, tandis que le boulet des pièces longues peut en mettre quelquefois, d'un ſeul coup, huit ou dix hors de combat par ſes ricochets; mais il y a plus, cette hauſſe eſt un moyen infaillible de détruire toute la juſteſſe du pointement; un champ de bataille n'eſt preſque jamais un terrein de niveau, pour peu qu'une des roues de l'affût ſoit plus baſſe que l'autre, la hauſſe déclinera vers la roue la plus baſſe, le rayon de mire obtenu par ſon moyen, ne ſera plus dans le même plan vertical que l'axe de la pièce, & le coup ne portera pas où l'on a pointé.

Il n'eſt donc pas poſſible de retrouver, dans les pièces courtes, une égalité de portée & de juſteſſe avec les pièces longues, elles n'ont pour elles que leur légèreté, encore comme nous le verrons bientôt, ce prétendu avantage eſt-il très-illuſoire, mais il en réſulte un inconvénient très-réel, c'eſt un recul beaucoup plus grand que celui des pièces longues; ce recul eſt inévitable, il eſt cauſé, tant par le moins de peſanteur, que par la plus grande mobilité que l'on donne aux roues des affûts de ces pièces, en faiſant les eſſieux de fer, & garniſſant de cuivre l'intérieur des moyeux; les expériences faites à Grenoble, prouvent que le recul de ces pièces du nouveau modèle, eſt plus que triple de celui des pièces de l'ancien; inconvénient terrible, tant par l'empla-

cement, ſouvent précieux qu'exige ce recul, que par le danger qu'il fait courir à ceux qui ſervent ces pièces.

M. de Vallière ne ſe diſſimule pas que la peſanteur de notre Artillerie eſt un inconvénient, mais ſi on ne peut la diminuer ſans en diminuer auſſi les effets, eſt-il raiſonnable de vouloir l'entreprendre? & avons-nous à nous plaindre ſi nous comparons notre Baliſtique à celle des Anciens, & les effets de notre Artillerie à ceux de leurs machines?

Mais, diront les défenſeurs de la nouvelle Artillerie, c'eſt en cela même que conſiſte l'avantage de nos pièces légères; des hommes les portent par-tout ſans le ſecours des chevaux: oui, pour la pièce de quatre, car aucun des calibres ſupérieurs ne peut être manœuvré à bras. Mais quand on lui accorderoit cet avantage, ces pièces, dont l'effet eſt ſi médiocre, n'ont-elles pas beſoin, comme les pièces longues, que leurs munitions les ſuivent; leur multitude n'embarraſſera-t-elle pas plus qu'un train d'Artillerie ordinaire qui produiroit des effets terribles, dont celles-ci ſont incapables; il y a plus, les épreuves ont décidé qu'il falloit employer la pièce de huit courte, pour remplacer celle de quatre longue, & ainſi du reſte; ces pièces courtes conſommeront donc au moins une moitié en ſus de munitions de plus que les pièces longues, ou auront un tiers de coups de moins à tirer; & c'eſt-là, dit M. de Vallière, ce qu'on nomme *Artillerie légère.*

Le dernier refuge des défenſeurs des pièces courtes & légères, eſt de dire que quand les pièces anciennes auroient ſur les nouvelles toute la ſupériorité que M. de Vallière leur attribue, cette ſupériorité de portée & de juſteſſe ſeroit inutile à la guerre, & que la nouvelle Artillerie a de quoi ſatisfaire à tous les cas qui peuvent ſe préſenter. C'eſt à réfuter cette aſſertion que M. de Vallière emploie la ſeconde partie de ſon Mémoire, dans laquelle il fait voir l'importance à la guerre, de la ſupériorité des pièces longues : & voici ſur quoi il la fonde.

Dans tous les cas où le théâtre de la guerre ſe trouvera loin des frontières, il ſaudra y faire parvenir un double

équipage d'Artillerie, un pour les siéges, & l'autre pour la campagne, au lieu que dans l'ancien système, quelques pièces de seize & de vingt-quatre ajoutées au train d'Artillerie, remplissoient toutes les vues.

N'eût-on à attaquer qu'une bicoque, capable cependant de soutenir quelques coups de canon, il faudra s'y morfondre & perdre un temps, souvent précieux, pour attendre des pièces de siéges? & si on en surcharge l'équipage, ne sera-t-on pas exposé à les traîner, souvent inutilement, pendant toute la campagne, sans trouver une seule fois l'occasion de les employer? au lieu qu'avec l'Artillerie ordinaire, on est à portée de saisir toutes les circonstances heureuses.

Veut-on construire quelqu'ouvrage ou fortifier quelque poste, que fera-t-on avec des pièces trop courtes pour servir dans des embrasures, il en faudra donc faire venir exprès au hasard d'en être ensuite très-embarrassé?

La supériorité de portée & de justesse des pièces longues, n'a-t-elle donc pas un avantage réel dans une infinité d'occasions? tant qu'on combattra Artillerie contre Artillerie, quel avantage n'aura pas celle qui portera ses coups plus juste & plus loin? auroit-on pu éteindre, avec deux seules batteries, tout le feu du front d'attaque de Berg-op-zoom, si on n'avoit eu que des pièces courtes. Des pièces longues capables de tirer de flanc, aidées de quelques mortiers, éteignirent en deux jours tout le feu que les nombreuses batteries qu'on lui avoit opposé, n'avoient pu seulement diminuer pendant plusieurs semaines.

Ce n'est donc pas toujours, comme l'a reconnu le Roi de Prusse, bon juge en pareille matière, le nombre des pièces d'Artillerie qui assure le succès des expéditions, mais la manière de les employer.

Nous dirons des batailles, ce que nous venons de dire des siéges, il faut de même que l'Artillerie y soit employée avec intelligence; mais pour qu'un moindre nombre de pièces puisse suffire, il faut qu'elles soient capables des effets qu'on leur demande. Or, c'est ce qu'on ne peut espérer d'obtenir des

pièces courtes & légères. Par les épreuves faites à Strasbourg en 1740, en présence de M.rs les Maréchaux de Broglie & d'Asfeldt, pour comparer la vivacité du feu de la pièce de quatre longue, & de la pièce de quatre courte, il fut bien reconnu, qu'à la vérité, la pièce courte tiroit onze coups dans le temps que la pièce longue n'en tiroit que neuf, mais que la première s'échauffant plus vîte, il falloit interrompre son feu, tandis que l'autre continuoit encore son service, sans avoir besoin d'être rafraîchie; il n'y a donc rien à gagner pour la vivacité du feu, & tous les inconvéniens que nous avons exposés, subsistent sans la moindre compensation: revenons aux différens usages auxquels l'Artillerie peut être employée dans une campagne, & suivons pas à pas, dans toutes ces circonstances, la comparaison des pièces longues & des pièces courtes.

Veut-on défendre ou tenter le passage d'une rivière, il s'agit, principalement dans la défense, de maîtriser par son canon l'embouchure des rivières affluentes où l'ennemi fera vraisemblablement ses préparatifs; or, en pareil cas peut-on hésiter sur l'espèce d'Artillerie qu'on doit choisir? ne sera-ce pas celle qui a la plus longue portée, & le plus de justesse dans le tir; si l'on pouvoit avoir sur ce point quelqu'incertitude, l'exemple que nous allons rapporter ne la laisseroit pas subsister long-temps.

M. le Maréchal de Coigny ayant ordonné d'établir une batterie de dix pièces de quatre à la rive gauche du Rhin, pour battre l'embouchure du Necker, & couler bas les bateaux qui s'y présenteroient; on y employa des pièces à la Suédoise, c'est-à-dire, des pièces de quatre courtes & des pièces de quatre longues, qu'arriva-t-il? les premières qui ne pouvoient arriver au but qu'en les pointant fort haut, plongeoient & ne ricochoient point, au lieu que les boulets des autres portoient beaucoup plus loin, & faisoient, sur la surface de l'eau, après l'avoir touchée, plusieurs ricochets.

Si l'ennemi veut traverser une rivière, n'est-il pas avantageux de le battre dès qu'il paroît sur la rive opposée, pendan

qu'il s'embarque, & pendant le trajet, la longue portée sert pour le premier cas, & la justesse du tir pour tous les trois; le même avantage se retrouvera encore s'il s'agit de nettoyer le bord d'une rivière qu'on veut passer en présence de l'ennemi, ou s'il s'agit de lui faire abandonner, par la canonnade, un poste où l'on ne peut l'aller aborder.

Un des plus utiles usages de l'Artillerie dans la guerre de campagne, est de troubler l'ordre d'une armée ennemie qui se dispose à combattre, & d'empêcher les corps de se former; des pièces de quatre longues peuvent, sous l'élévation de quatre degrés, porter à la distance de mille toises, & y faire des ricochets, bien plus propres à troubler les manœuvres, que les coups de plein fouet; si l'ennemi se forme & s'avance, elles peuvent prendre des directions obliques, & mettre à chaque coup sept à huit hommes hors de combat, que feront-là des pièces courtes de même calibre, qui ne peuvent tirer que directement & jusqu'à cinq cents toises sans pouvoir faire des ricochets, & ne peuvent au plus mettre que trois hommes hors de combat? tandis que la pièce longue, placée avantageusement, en peut mettre quelquefois quinze à dix-huit hors d'état de nuire; une batterie de pièces longues peut être employée avec succès à démonter le canon de l'ennemi, elle peut, au gré du Général, porter le trouble & le désordre sur telle partie de la première ligne qu'il veut faire attaquer, & frayer par-là le chemin à la victoire; elle peut empêcher les bataillons ennemis de se porter secours mutuellement, & préparer à chaque instant de nouvelles attaques; les pièces courtes ne peuvent presque rien exécuter de tout cela, tant à cause de leur peu de portée, que parce que l'étendue de leur recul ne permet souvent pas de les placer, où des pièces longues le seroient très-commodément.

Si ce que nous venons d'avancer avoit besoin de preuves, les batailles de Raucoux, de Dettinghen & d'Hastembeck en fourniroient de bien fortes, quelles pièces employa à Raucoux, M. le Maréchal de Saxe, pour rompre la colonne ennemie qu'il voyoit se former? des pièces de seize longues, qui eurent

bientôt décidé le gain de la bataille, & de quel poids n'est pas en cette matière le choix de ce grand Général?

A Dettinghen, qu'eussent fait des pièces de la nouvelle Artillerie contre l'armée angloise, qui se formoit à sept cents toises de la nôtre, & bien au-delà de sa portée? une seule batterie de pièces longues, avantageusement placée, rompit toutes les mesures des ennemis, & leur fit perdre beaucoup de monde.

A Hastembeck, qu'auroit-on pu faire, s'il avoit fallu attendre que l'ennemi fût à cinq cents toises pour tirer sur lui? on lui auroit laissé le moyen de former, sans risque, une colonne formidable que les feux de front, d'écharpe & de revers, que la portée des pièces longues permirent de prendre sur lui, mirent en déroute, nous procurant une victoire complète, presque sans aucune perte.

La prééminence des pièces longues, sur les pièces courtes, se trouve donc absolument prouvée, tant à raison de leur solidité, qu'eu égard à leur plus grande portée, à leur justesse dans le tir, à la médiocrité de leur recul, &c. mais à tous ces avantages, M. de Vallière ajoute une réflexion, c'est qu'elles procurent encore de l'économie; les pièces de quatre longues font avec avantage l'office des pièces de huit courtes, & celles de huit longues, celui des pièces de douze courtes; il s'ensuit donc que dans un train d'Artillerie de pièces anciennes, il faut plus d'un tiers de poudre, & un tiers de poids de boulets moins que dans un équipage de cette Artillerie prétendue légère, & qui exige cependant un beaucoup plus grand nombre de chevaux & de voitures.

En vain les partisans de la nouvelle Artillerie objecteront-ils à M. de Vallière, que la portée de cinq cents toises est plus que suffisante, que l'excédant de portée n'est qu'une superfluité plus que compensée par la promptitude avec laquelle se manœuvre la nouvelle Artillerie; qu'au-delà de cinq cents toises on ne peut porter que des coups incertains; & qu'enfin, il faut, avec ses ennemis, se battre à armes égales, si l'on ne veut être battu.

.54. Pl. II.

b

E

A

S

O

Nº I.

f

Fig. 2.

b

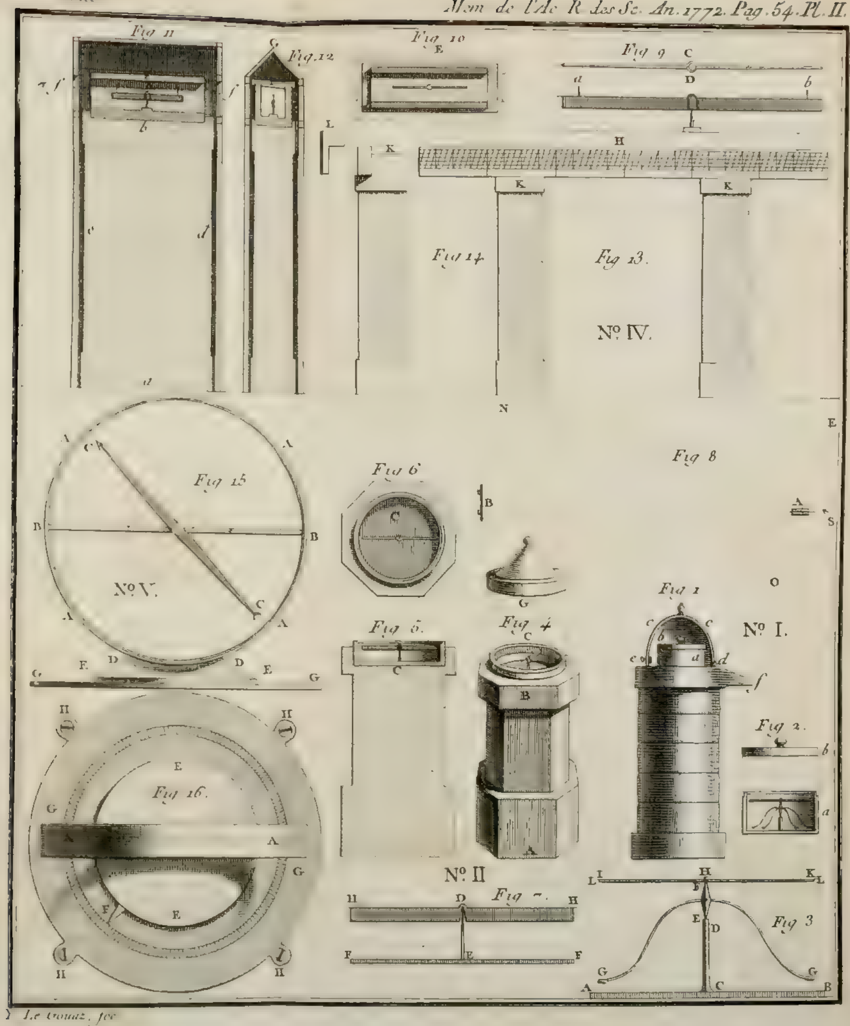
a

K L

Fig. 3.

G

B



Y. Le Gouaz, fec.

Oui, répond M. de Vallière, ſi l'on n'en a pas de meilleures, mais ſi on en poſsède qui, à ſept ou huit cents toiſes, atteignent vigoureuſement l'ennemi, & mettent le déſordre dans ſes troupes, comme il pourroit faire dans les nôtres à cinq cents toiſes, faudra-t-il attendre qu'il ſoit arrivé à cette diſtance? tandis qu'avec une Artillerie meilleure que la ſienne, on peut, avec ſécurité, l'empêcher d'arriver à la diſtance où il pourroit nuire, & de plus, le fatiguer avant qu'il puiſſe nous atteindre & rompre les troupes qu'il voudroit faire avancer; il y a plus, le retranchement de matière qu'on a fait dans les pièces courtes, les rend bien plus ſuſceptibles de s'échauffer, & les empêche de pouvoir ſoutenir long-temps un feu vif & continu, ſi néceſſaire dans bien des occaſions.

Telles ſont les judicieuſes réflexions puiſées dans la plus ſaine théorie, & appuyées de près de cinquante années d'expériences, que M. de Vallière a cru devoir dépoſer dans les regiſtres de l'Académie; mais pour ne rien laiſſer à deſirer, il a terminé, à la prière de l'Académie, ce Mémoire, par un tableau qui contient la comparaiſon de l'ancienne & de la nouvelle Artillerie, à nombre égal de pièces, & qui fait voir combien la dernière augmente les embarras, le nombre de voitures, de chevaux, de conducteurs, & combien elle eſt plus diſpendieuſe. Il en réſulte que l'ancienne Artillerie réunit en ſa faveur la plus grande juſteſſe du tir, & ſous un moindre degré d'élévation, l'étendue des portées & la force néceſſaire aux effets; la ſimplicité dans la conſtruction & dans le ſervice, ſoit qu'on tire à barbette, c'eſt-à-dire à découvert, ou à embraſures, le moindre embarras dans les marches, la ſolidité néceſſaire à la ſûreté & à la durée, la légèreté réelle, l'économie de la poudre, celle du terrein pour les reculs, celle de la dépenſe; & enfin les ſuccès confirmés par une longue expérience à la guerre; que de motifs pour la conſerver!

SUR LA VARIATION ET L'INCLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE.

V. les Mém. p. 457.

* V. 1.re Part. 1772, Mém. page 157.

M. LE MONNIER a rendu compte, dans la première partie des Mémoires de cette année *, des attentions ſcrupuleuſes avec leſquelles il s'étoit aſſuré de la variation de l'Aiguille à Paris, & de la comparaiſon qu'il en avoit faite, avec quelques autres obſervations faites en baſſe Bretagne : mais voici quelque choſe de bien ſingulier ; M. Maraldi, de cette Académie, des obſervations duquel l'exactitude eſt bien connue, a obſervé avec deux bouſſoles différentes, 8 degrés de différence entre la variation obſervée à Périnaldo, dans le comté de Nice, & celle qui a été obſervée dans le même temps à Paris.

Cette énorme différence a piqué la curioſité de M. le Monnier, il a recherché dans les obſervations anciennes, les différences obſervées entre les variations à Paris & dans les différentes villes d'Italie ; & pour s'aſſurer que cette différence ne venoit pas des obſervations de Paris, il les a comparées avec celles de Londres, & cette comparaiſon lui a donné une marche aſſez conſtante.

Venons aux obſervations d'Italie; en 1670, ſelon M.rs Auzout & Picard, la différence de variation entre Rome & Paris, étoit de 45 minutes; en 1695, ſelon M.rs Caſſini & de la Hire, cette même différence étoit de 42 minutes ; veut-on remonter plus haut, Varenius & Creſcentius la donnent, l'un en 1602, & l'autre en 1610, égale à Rome & à Paris, c'eſt-à-dire, de huit degrés à l'Eſt, comme elle étoit alors ; la variation étoit donc très-peu différente à Paris & dans toute l'Italie; voyons ce que donnent des obſervations plus récentes, en 1756 M. de la Condamine obſerva à Notre-Dame de Lorette la variation de l'Aiguille de 15 degrés 35 minutes, différente de celle qui fut alors obſervée à Paris, d'environ 2 degrés, ce qui ſe rapproche de l'obſervation récemment faite par M. Maraldi, mais n'en donne cependant que

que le quart de la différence qu'il a observée : on trouve * que la variation avoit été observée à Périnaldo de 8 degrés en 1696, tandis qu'elle n'étoit que de 7 à Paris ; comment expliquer une aussi grande différence que celle que M. Maraldi vient d'y trouver ? supposera-t-on quelque mine de fer dans les montagnes qui avoisinent Périnaldo ? mais il vaut mieux remettre au temps & aux observations, l'explication de ce phénomène, que de s'efforcer d'en deviner la cause, c'est aussi ce qu'a fait M. le Monnier.

* *Voyez dans les Mémoires de l'Acad. avant 1699, p. 521.*

A l'Écrit dont nous venons de parler, il a joint des remarques sur la carte Suédoise, de l'inclinaison de l'aimant, publiée par M. Wilcke en 1768 ; cette carte est une carte réduite, qui comprend les deux hémisphères, jusqu'à la mer glaciale au Nord, & jusqu'au cap Horn au Sud.

V. les Mém. page 461.

Il seroit certainement à desirer que les observations de l'inclinaison de l'aiguille aimantée fussent plus multipliées, il en résulteroit vraisemblablement bien des connoissances, qui mèneroient peut-être un jour, sinon à celle de la cause physique des phénomènes de l'aimant, du moins à celle des phénomènes généraux en cette matière, & de la manière dont ils se particularisent.

Dans la disette où nous sommes de bonnes observations sur cette matière, on ne pouvoit certainement faire mieux que de rassembler sur une même carte, toutes celles que nous avons ; feu M. Halley avoit eu cette idée pour les variations horizontales, & l'avoit exécutée en 1700 ; mais il n'y avoit encore que Musschenbroëck qui eût pensé à rassembler, dans une même carte, toutes ces observations d'inclinaison, ce n'est cependant que de cette manière qu'on peut parvenir à se former une idée de l'action du magnétisme dans les différentes parties de notre globe ; tous ceux qui s'intéressent à l'avancement de la Physique, doivent donc applaudir au travail de M. Wilcke, mais en même temps que M. le Monnier s'acquitte de cette dette, en publiant de nouveau cette carte, il a cru devoir y joindre quelques réflexions relatives à des erreurs dans lesquelles il semble que soit tombé M. Wilcke, & il propose

en même temps les obſervations à faire pour éclairer tous ſes doutes. Il les propoſe avec d'autant plus de raiſon, qu'il croit d'un côté que l'Auteur de cette carte n'a été conduit à ces erreurs, que par la ſuite du ſyſtème des quatre pôles magnétiques, qu'il ſemble avoir adopté, & que M. le Monnier ne croit pas, à beaucoup près, aſſez ſolidement établi, & que de l'autre les aiguilles d'inclinaiſon qu'il propoſe d'employer, ſont exemptes de pluſieurs défauts qui altèrent la juſteſſe des aiguilles ordinaires; la flexion, par exemple, que la peſanteur occaſionne dans les aiguilles, lorſqu'elles ſont près de la ſituation horizontale, eſt ſi bien compenſée par le moyen qu'il propoſe, que le centre de gravité ne ſort point de la verticale. A l'aide des obſervations que propoſe M. le Monnier, & de quelques poſitions qu'il a ajoutées à la carte, & ſur-tout la direction actuelle de la ligne ſans déclinaiſon qui paſſe par Kola, au cap Comorin, & juſque dans la nouvelle Hollande, on pourra beaucoup éclaircir cette importante matière, juſqu'ici ſi peu connue.

V. les Mém. page 44. Tandis que M. le Monnier s'occupoit de mettre dans un certain ordre les obſervations connues de l'aimant, M. Duhamel travailloit à établir, à ſa terre de Denainvilliers, des bouſſoles capables d'en procurer de très-exactes, tant ſur la déclinaiſon que ſur l'inclinaiſon de l'aiguille aimantée; dans la vue d'éloigner ſes bouſſoles de tout fer, il les a ſoigneuſement écartées du bâtiment, & les a placées dans les différens boſquets de ſon parc.

Nous n'entrerons point ici dans les détails de conſtruction que M. Duhamel a expoſés dans ſon Mémoire, où ils ſont accompagnés de figures qui en facilitent beaucoup l'intelligence : nous nous contenterons de donner une idée de ce que cet exact Obſervateur a cru devoir y ajouter, pour rendre les obſervations plus préciſes.

Ces bouſſoles ſont au nombre de ſix, quatre de déclinaiſon, & deux d'inclinaiſon.

La première eſt conſtruite ſuivant l'idée de M. Antheaume, publiée par l'Académie en 1750 *, que M. Duhamel a

* Voy. Hiſt. 1750, p. 6.

employée par préférence, pour donner le plus de mobilité possible à son aiguille; elle est comme toutes les autres dont nous allons parler, établie sur un pilier de pierre de taille, dans la construction duquel on a soigneusement évité d'employer ni brique ni mortier de ciment, de peur qu'un peu de fer contenu dans l'argile, & revivifié par la cuisson, ne pût agir sur les boussoles & les déranger; cette aiguille n'a que six pouces de longueur.

Celle de la seconde boussole a quinze pouces de longueur, un pouce de large, & une ligne d'épaisseur; ces dimensions lui ont été données par M. Duhamel, parce qu'ayant remarqué que des barreaux un peu forts, prenoient, en les aimantant, plus de vertu que les autres; il a voulu voir si dans une aiguille de ce volume, il y auroit plus à gagner du côté de la force magnétique qu'à perdre sur la mobilité, & comme dans une largeur aussi grande, il pourroit y avoir des parties qui s'aimantant plus que les autres, feroient détourner l'aiguille de sa direction, il a pris le parti de la mettre sur le champ.

Il a même poussé l'attention jusqu'à ôter la glace qui couvroit cette boussole, pour obvier aux dérangemens qu'on soupçonne que peut causer l'électricité, & à y substituer un fort carton, percé vis-à-vis du limbe, & dont l'ouverture, en cet endroit, étoit fermée par une lame de corne très-transparente.

Pour être même plus sûr de son fait, M. Duhamel a fait construire une boussole avec une aiguille de même grandeur, mais extrêmement légère, il s'est trouvé, par l'expérience, que l'aiguille pesante étoit au moins aussi sensible que la légère.

Pour avoir, avec plus de précision, la quantité de variation des aiguilles, M. Duhamel a employé un moyen très-ingénieux; il a fait faire une caisse oblongue de pierre, qui représente une portion d'une grande boussole, & l'a fait placer sur un pilier de pierre à peu-près dans la direction de l'aiguille, c'est-à-dire, faisant, avec la Méridienne, un angle d'environ 20 degrés à l'Ouest; les deux bouts de cette caisse sont fermés

par des glaces, & il y a mis une aiguille large, de quatorze pouces de longueur, composée de deux lames mises de champ, qui se touchent dans toute leur longueur, excepté au milieu où elles sont courbées pour recevoir la chape, & cette longue aiguille porte à sa partie supérieure deux pointes très-déliées, qui servent comme de pinnules.

A cinquante-deux pieds de distance, & dans la direction de la longueur de cette boussole, il a fait élever perpendiculairement à cette direction, deux piliers qui supportent une pierre, dans la face antérieure de laquelle est encastrée une forte barre de fer de six pieds de long, sur six pouces de large, sur laquelle il a fait marquer les degrés d'un cercle, qui auroit pour centre le pivot de la boussole; ces degrés ont un pied, & sont divisés en 60 minutes; il est évident qu'en pointant à travers les glaces des extrémités de la boîte, par les deux pinnules de l'aiguille, on a le point où le rayon visuel se termine sur le limbe, & que la grandeur de ses divisions ne permet pas de craindre d'erreur sensible.

Les deux dernières boussoles sont d'inclinaison, les pivots de leurs aiguilles roulent sur deux feuillets d'agate très-polis, pour en diminuer le frottement, & la boîte verticale qui les enferme, est attachée sur un plateau rond horizontal qui peut tourner sur un autre plateau attaché à la pierre; le but de cette construction tient à un principe d'expérience, connu de tous ceux qui ont travaillé sur l'aimant; une boussole d'inclinaison ne donne la véritable élévation du pôle magnétique, que lorsqu'elle est placée exactement dans le plan du Méridien magnétique, ou ce qui revient au même, sur la ligne de variation; or cette ligne est variable, il falloit que la boussole la pût suivre, & c'est pour cela que M. Duhamel a rendu le plateau qui la porte mobile sur un centre, il y a ajouté un index, & au plateau fixe une division qui indique la position dans laquelle on place la boussole; ces deux dernières ne diffèrent, qu'en ce que l'aiguille de l'une est bien plus légère que celle de l'autre, & il en est arrivé ce qu'on devoit naturellement attendre: l'aiguille légère éprouvant

moins de frottement, a éprouvé plus de variations que l'autre.

Tout cet appareil, au reste, a plutôt pour but d'observer exactement les variations diurnes & accidentelles qu'on commence à remarquer dans les boussoles, que de fixer la quantité de la variation ordinaire. Il s'en faut bien que tous les phénomènes de l'aimant nous soient encore connus, & on ne peut que savoir gré à ceux qui, comme M. Duhamel, n'épargnent aucun soin pour porter le flambeau de l'expérience dans cette obscure recherche.





ANATOMIE.

SUR LES
CHANGEMENS QU'ÉPROUVE L'OS appelé le Canon, *dans certains Quadrupèdes.*

V. les Mém. page 502.

ON trouve dans l'étude de l'Anatomie des exemples ſans nombre d'Os qui s'uniſſent & qui ſe ſoudent enſemble, les ſutures du crâne & les épiphyſes des os longs en fourniſſent d'aſſez frappans, mais on n'en connoiſſoit aucun de deux os longs ſimplement contigus dans le fœtus, qui s'uniſſent peu de ſemaines après la naiſſance, & finiſſent au bout de quelques mois par former un ſeul os; la cloiſon oſſeuſe formée par les parois réunies des deux os, ſe trouvant entièrement détruite.

La connoiſſance de ce phénomène ſingulier eſt dûe aux recherches de M. Fougeroux, il a lieu dans les os de la jambe de tous les animaux à pied-fourché, que nous connoiſſons, ſi cependant on en excepte le Cochon & le Sanglier, qui ſont, pour le dire en paſſant, les ſeuls de cette claſſe qui ne ruminent point, du moins parmi les animaux de nos contrées: voici les remarques que M. Fougeroux a faites ſur ce ſujet, & principalement ſur les bœufs & ſur les moutons.

Dans les fœtus de Vaches & de Brebis, l'avant-dernière portion de la jambe, à laquelle les pinces ſont articulées, & dont l'os ſe nomme *Canon*, eſt compoſée de deux os longs cylindriques, ayant chacun leur arioſte, leur canal médullaire

& leurs épiphyſes, alors ces os ſont ſéparés l'un de l'autre; peu de temps après que les épiphyſes ſont devenues adhérentes aux os, ceux-ci ſe ſoudent eux-mêmes & deviennent adhérens, de façon qu'il eſt impoſſible alors de les ſéparer; ſi dans cet état on les ſcie tranſverſalement, on voit encore diſtinctement, dans l'intérieur, les deux canaux médullaires ſéparés par une cloiſon oſſeuſe, formée par la réunion des parois des deux os qui ſe ſont ſoudés; quelques mois après cette cloiſon devient plus mince, elle ne forme plus qu'un tiſſu réticulaire; & enfin elle diſparoît entièrement d'abord dans la partie moyenne de l'os, & enſuite vers les épiphyſes; alors les deux os n'en forment plus qu'un, ſans garder d'autre veſtige de leur premier état, qu'un ſillon aſſez profond à la partie antérieure; ce ſillon étoit connu des Anatomiſtes, mais ils étoient bien éloignés d'en pouvoir aſſigner la cauſe: examinons, d'après M. Fougeroux, la marche de la Nature dans cette opération.

Les deux os deſtinés à former, par leur réunion, l'os du canon d'un bœuf, ſont dans le fœtus de cet animal, gros chacun comme un tuyau de plume; ces os commencent à ſe réunir, environ quatre ſemaines après la naiſſance, alors la capacité des deux canaux médullaires eſt moindre qu'elle ne ſera par la ſuite; mais lorſque la réunion eſt achevée, & que la cloiſon commence à ſe détruire, ce qui arrive à l'âge de neuf à dix ſemaines, pour lors le canal médullaire qui va devenir unique, a toutes les dimenſions qu'il aura dans le bœuf devenu adulte. M. Fougeroux s'en eſt aſſuré par des obſervations répétées.

Ce fait mérite une attention particulière, il eſt aſſez généralement reçu parmi les Anatomiſtes, que dans les os longs, le canal médullaire augmente en grandeur, tant que croît l'os; l'obſervation de M. Fougeroux introduit néceſſairement une exception à cette règle, puiſque dans le bœuf l'os du canon a acquis à dix ſemaines toute la largeur du canal médullaire, qu'il aura dans l'âge le plus avancé de l'animal, il n'augmente plus alors qu'en épaiſſeur; ce même os qui à dix ſemaines,

n'avoit qu'environ deux lignes d'épaiſſeur, en acquiert jufqu'à ſix dans le bœuf devenu adulte.

Pluſieurs queſtions ſe préſentent ici à réſoudre, la première eſt de ſavoir comment ſe fait cet épaiſſiſſement de l'os; la ſeconde eſt de déterminer comment ſe détruit la cloiſon; & la troiſième, de ſavoir comment les deux gaines médullaires qui renfermoient la moëlle dans les deux os réunis, n'en font plus qu'une après la deſtruction de la cloiſon.

Pour réſoudre la première queſtion, M. Fougeroux a mis en œuvre les connoiſſances données par M. Duhamel & par M. Hériſſant, ſur la formation des os & ſur leur décompoſition; il a mis pour cela dans un acide adouci, un jeune os moitié d'un canon de veau non encore réuni, feu M. Hériſſant a fait voir que l'acide diſſolvoit la matière crétacée qui fait la dureté de l'os, en épargnant la partie membraneuſe qui en forme, pour ainſi dire, le canevas. L'os que M. Fougeroux avoit mis en expérience, étant ainſi décompoſé, il trouva que les lames oſſeuſes, réduites par ce moyen à leur état primitif de membranes, contournoient exactement tout le cylindre de l'os.

Il fit la même expérience ſur un os ſemblable, mais déjà réuni avec ſon voiſin, & dans lequel on voyoit encore la cloiſon, mais diminuée d'épaiſſeur, & qui commençoit à ſe perdre.

Cet os ayant été décompoſé par le moyen de l'acide affoibli, M. Fougeroux en examina ſoigneuſement les couches membraneuſes: & voici ce qu'il y remarqua.

Les lames extérieures enveloppoient entièrement tout le cylindre oſſeux, mais il n'en étoit pas de même des lames internes, elles étoient moins fortes aux endroits où ſe trouvoit la cloiſon, & on voyoit à l'endroit où cette cloiſon avoit été ou étoit encore, une déſunion dans les fibres, telle que pourroit l'offrir une étoffe dans laquelle la trame ou la chaîne ſeroient interrompues ſur quelques fils.

Ces obſervations donnèrent à M. Fougeroux une ſolution aſſez plauſible des deux premières queſtions; en effet, ſi l'on veut

peut ſuppoſer que les os longs augmentent leur épaiſſeur par l'addition de nouvelles couches extérieures, & que l'agrandiſſement du canal médullaire, ſe fait par l'extenſion des lames oſſeuſes internes; il eſt aiſé de comprendre que les nouvelles lames oſſeuſes qui revêtent les deux cylindres extérieurement, interceptent le paſſage de la matière crétacée dans la cloiſon intermédiaire, & que les lames internes s'étendant en même temps pour augmenter le canal médullaire, elles diſtendent les fibres de la cloiſon, en diminuent l'épaiſſeur; & que cette cloiſon ne recevant plus d'ailleurs de matière crétacée, elle doit diminuer toujours, & enfin s'anéantir.

Il n'eſt peut-être pas auſſi facile d'expliquer comment les deux gaines médullaires n'en font plus qu'une dans toute la partie où la cloiſon eſt anéantie; cette gaine devenue unique dans l'animal adulte, ſe ſéparant vers les épiphyſes où la cloiſon ſubſiſte toujours; M. Fougeroux a conſtaté ces faits, mais il n'en a pas trouvé juſqu'à préſent de raiſon plauſible, & c'eſt un problème dont il propoſe la ſolution aux Anatomiſtes.

Toutes ces obſervations n'indiquant pas encore aſſez clairement à M. Fougeroux, comment ſe faiſoit la réunion de ces deux os en un, il réſolut de faire d'autres expériences, en introduiſant entre les deux os une lame de plomb avant leur réunion; cette opération étoit très-délicate, & pluſieurs jeunes agneaux qui y furent ſoumis, y périrent; cependant l'adreſſe de M. Dupas, Chirurgien de Pithiviers, & les ſoins qu'il ſe donna pour les panſemens, en ſauvèrent trois deſquels M. Fougeroux fait mention dans ce Mémoire : voici le réſultat des expériences.

Le premier de ces animaux fut opéré deux jours après ſa naiſſance : on tenta d'introduire une lame de plomb mince entre les deux os qui devoient compoſer l'os du canon d'une des jambes de derrière, l'animal fut ſoigneuſement panſé, & la plaie guérit heureuſement. Deux mois après M. Fougeroux le fit tuer, & il examina l'os du canon de la jambe opérée, auquel l'os ſemblable de l'autre jambe, auquel on n'avoit pas touché, ſervoit de pièce de comparaiſon.

Dans cette dernière, les deux os étoient déjà réunis, & n'en paroissoient former qu'un seul, mais en le sciant, M. Fougeroux y trouva la cloison dans toute l'étendue de l'os, elle étoit seulement un peu diminuée d'épaisseur.

Dans la jambe à laquelle on avoit fait l'opération, M. Fougeroux trouva que l'expérience n'avoit pas réussi comme il le desiroit, au lieu d'avoir placé la lame entre les deux os, on avoit ouvert un des deux os, sans le percer de part en part, l'ouverture se trouvoit un peu à côté de la cloison; l'os étoit beaucoup plus épais à l'endroit où il avoit été piqué, & il s'étoit formé une masse d'ossification qui bouchoit presqu'entièrement le canal, & se confondoit avec la cloison, en un mot, M. Fougeroux ne remarqua dans cet os, que ce qu'on remarque dans les os piqués ou fracturés, & il n'en put tirer aucune instruction sur ce qu'il desiroit savoir.

Dans cette circonstance, il crut devoir répéter l'expérience; l'agneau qui en fut le sujet fut opéré, comme le premier, deux jours après sa naissance, l'ouverture fut plus large, la lame de plomb plus grande, elle fut placée, autant qu'on le pût, à l'endroit où l'on jugeoit que devoit être la cloison, & on laissa l'animal vivre jusqu'à trois mois; ayant alors été tué, on examina l'os du canon de la jambe saine, & celui de la jambe sur laquelle l'opération avoit été faite.

Dans la première l'os du canon avoit presque entièrement perdu sa cloison, du moins dans la partie moyenne, mais dans la jambe opérée, le canal médullaire étoit presqu'entièrement rempli par une nouvelle substance osseuse, occasionnée par le corps étranger introduit dans l'os, & la cloison, si elle y existoit encore, étoit si bien confondue dans cette masse, qu'il étoit impossible de l'y distinguer.

M. Fougeroux voyant donc que l'interposition des lames de plomb ne lui pouvoit donner aucune connoissance de la manière dont s'opéroit la réunion des deux os, il pensa que si cette réunion & la destruction de la cloison, s'opéroient par la pression des deux os l'un contre l'autre, en emportant une partie de l'un des deux os, il n'y auroit plus de pression

dans cet endroit, & que la cloison ne s'y détruiroit pas, tandis qu'elle se détruiroit dans le reste de l'os. Il fit donc enlever de l'un des deux os du canon d'un agneau, né depuis vingt-quatre ou trente heures, une portion d'environ huit lignes, la plaie fut pansée soigneusement jusqu'à l'entière guérison, & on laissa vivre l'animal environ six mois, il ne fut tué qu'au bout de ce temps : & voici ce qu'offrit l'examen de ses jambes.

Le canon du pied sain avoit presqu'entièrement perdu sa cloison, on n'en apercevoit de vestiges qu'au voisinage des deux épiphyses, encore étoient-ils très-minces.

Dans l'autre jambe, la partie emportée de l'os s'étoit régénérée, mais cette partie reproduite étoit moins épaisse que le reste de l'os; la cloison étoit presqu'entièrement détruite dans le haut, mais au-dessous de la plaie, elle étoit restée beaucoup plus longue & plus épaisse que dans l'autre jambe : on voyoit aisément que la plaie faite à l'os, avoit nui à la destruction de la cloison, & que peut-être même la cloison eût subsisté sans la régénération de la partie d'os emportée.

Quelque variées qu'aient pu être les expériences de M. Fougeroux, elles ne lui ont pas encore dévoilé le secret de la Nature dans cette réunion de deux os en un; mais en attendant que de nouvelles tentatives qu'il se propose de faire, & qu'il invite les Anatomistes à essayer de leur côté, aient pu l'éclairer suffisamment sur ce point, il pense que la Nature dans cette occasion ne s'écarte pas de son plan général; que les os contigus ont une facilité très-grande à se réunir; que dans ceux qui doivent conserver du mouvement les uns avec les autres, elle y a interposé une graisse particulière qu'on nomme *sinovie*, & que lorsqu'elle manque, ce qui arrive dans quelques maladies, les deux os ne manquent pas de se souder, & peut-être, avec le temps, n'en formeroient plus qu'un; & qu'enfin la graisse dont les porcs abondent est vraisemblablement l'obstacle qui empêche, dans cette espèce, les deux os du canon de se réunir en un, comme ils font dans tous les autres animaux à pied-fourché que nous connoissons :

on pourroit peut-être s'imaginer que l'ingénieux moyen employé par M. Duhamel, de teindre les couches d'os des animaux avec la garance qu'on mêle dans leur nourriture, auroit pu être utilement employé dans cette occasion, mais on ſe tromperoit en le croyant, il ne s'agit pas ici, comme dans l'expérience de M. Duhamel, de l'accroiſſement des os, mais de leur deſtruction; & d'ailleurs, comment mettre à cette nourriture des animaux auſſi jeunes que ceux que M. Fougeroux a employé, & qui ne vivoient preſqu'encore que du lait de leurs mères. Mais quoi qu'il en ſoit, l'obſervation & le travail qu'il a fait ſur cette matière, offrent une nouvelle carrière aux recherches des Anatomiſtes.

SUR LES

SECOURS QU'ON PEUT TIRER DE L'ART,

Pour corriger ou prévenir les difformités de la taille, ſoit dans l'enfance, ſoit dans un âge avancé.

V. les Mém. p. 468.

LA juſte proportion des membres & l'élégance de la taille ont été regardées, par preſque tous les peuples policés, comme des avantages, & tous en ont fait aſſez de cas, pour chercher les moyens de ſe les procurer.

Ils auroient été bien plus animés à cette recherche, s'ils avoient ſu combien de maux peut cauſer le dérangement de l'épine dans le corps animal, que ce dérangement peut arriver à tout âge, & que l'art offre des moyens de s'en garantir ou de le réparer; c'eſt à la diſcuſſion de tous ces points qu'eſt deſtiné le Mémoire de M. Portal, duquel nous avons à rendre compte.

Pour peu qu'on ſoit au fait de la ſtructure du corps humain, on ſait quel rôle y joue l'épine ou colonne vertébrale, pluſieurs muſcles y ont leurs attaches; elle ſeule maintient les différentes capacités du corps dans la proportion qui leur eſt néceſſaire,

& le moindre dérangement, dans cette partie, peut produire des accidens quelquefois mortels, & toujours d'autant plus graves, qu'on n'en ſoupçonne pas même la cauſe, & qu'on tourmente inutilement le malade par des remèdes incapables de le guérir.

M. Portal en rapporte pluſieurs exemples très-ſinguliers : nous nous contenterons d'en citer quelques-uns; croiroit-on, par exemple, que le déverſement de l'épine eut pu cauſer des douleurs dans les cuiſſes? cependant un fait rapporté par Marcus Aurelius Severinus, ancien Profeſſeur d'Anatomie à Naples, fait voir la poſſibilité de ce fait, & que la Dame qui en fut le ſujet, ne fut guérie de ſes douleurs, que lorſqu'on eut opéré le redreſſement de ſon épine; une autre ſe plaignoit d'une douleur vive au bout du pied gauche, trois ou quatre heures après avoir mangé, & n'avoit pu être guérie de ſes douleurs par aucun remède; l'ouverture du cadavre après ſa mort, fit voir que ſes douleurs n'avoient d'autre cauſe que le déverſement de l'épine, & la compreſſion, que les fauſſes côtes dérangées par ce déverſement, & l'inteſtin colon, lorſqu'il étoit plein, faiſoient ſur les nerfs lombaires.

Non-ſeulement le dérangement des vertèbres peut produire des douleurs & des maladies organiques, par le déplacement des parties qui en dépendent, mais ces maladies peuvent devenir très-graves, & quelquefois même mortelles.

Il eſt vrai cependant qu'elles ne vont que bien rarement à ce point lorſque le dérangement de l'épine eſt arrivé dans l'enfance; alors les nerfs, les muſcles & les viſcères, encore très-flexibles, ſe proportionnent en quelque façon dans leur développement, au dérangement de la charpente oſſeuſe, & le ſujet n'éprouve que des incommodités ſupportables; mais quand le dérangement de l'épine arrive dans l'âge plus avancé, & auquel toutes les parties ont pris leur accroiſſement & leur ſolidité, alors elles éprouvent des tiraillemens & des compreſſions capables de produire les accidens les plus fâcheux, & d'interrompre ou d'altérer toutes les opérations de l'économie animale.

Mais ce déverſement de l'épine eſt-il poſſible dans un âge avancé ? oui ſans doute, nous allons, d'après M. Portal, conſtater le fait par quelques obſervations, puis nous tenterons d'aſſigner les cauſes de ce dérangement.

Une Dame de Province âgée d'environ quarante-huit ans, d'une bonne conſtitution, & d'une aſſez belle taille, étant venue à Paris, il y a peu d'années, y tomba malade d'une fièvre putride, dont la convaleſcence fut très-longue, M. Portal qui l'avoit vue pendant ſa maladie, apprit ſix mois après qu'elle étoit devenue boſſue, & tellement inclinée du côté droit, que ſa tête & ſa poitrine y penchoient conſidérablement, & qu'elle ne pouvoit marcher ſans ſe ſoutenir l'épaule avec une béquille, il l'examina, & ayant trouvé que la cauſe de ces accidens n'étoit que le déverſement de l'épine, il eſſaya d'y remédier par une machine, dont le point d'appui étoit une ceinture de buffle, & qui, au moyen d'une tige ſurmontée d'un croiſſant bien rembourré & paſſé ſous le bras, ſoutenoit l'épaule; & comme il auroit peut-être été difficile de la faire revenir tout d'un coup à la hauteur convenable, la tige avoit une crémaillère, au moyen de laquelle cette réduction ſe fit peu-à-peu; on aidoit l'effet de cette machine par des frictions faites, tantôt à ſec, tantôt avec des liqueurs ſpiritueuſes dans leſquelles on avoit diſſous du ſavon, elle reprit ſon embonpoint, & n'eut, en aſſez peu de temps, beſoin que d'un corps ordinaire pour maintenir ſa taille, encore le quittoit-elle lorſqu'elle ſe couchoit.

La même choſe arriva quelque temps après à une vieille fille qui ſervoit chez un des Élèves de M. Portal, mais celle-ci n'eut pas beſoin de machine, l'uſage d'un corps ordinaire qu'elle prit par ſon conſeil, ſuffit pour la mettre en état de continuer ſes fonctions.

Un noble Napolitain fut ſubitement attaqué d'une douleur vers l'un des deux os iſchion ou de la hanche, qui l'empêchoit de marcher librement; on eſſaya beaucoup de remèdes inutilement: Severinus, dont nous avons parlé, fut appelé, & trouva

par sa recherche, que la cause de tout ce désordre, étoit le déplacement des vertèbres qu'il travailla à redresser.

On trouve dans les Œuvres de M. Morgagni, un autre exemple plus funeste, des suites que peut avoir le dérangement de l'épine, celui qui en fut le malheureux sujet, mourut après avoir été affligé de deux tumeurs considérables, & de convulsions violentes; à l'ouverture du corps, on trouva que ces fâcheux accidens n'étoient dûs qu'au déversement de l'épine. Le déversement latéral des vertèbres lombaires, produit des phénomènes encore plus singuliers; le tiraillement du muscle *psoas* qui a son attache dans le voisinage, & qui sert au mouvement de la cuisse, souvent celui des nerfs, causent au malade une difficulté de marcher sans tenir la cuisse un peu fléchie, souvent la compression que les vertèbres & les fausses côtes déjetées font sur les nerfs, causent des stupeurs & des engourdissemens dans les endroits où ils se rendent: en un mot, il est une infinité de maladies fâcheuses & d'incommodités désagréables, qu'occasionnent le déversement de l'épine, & qu'on ne s'aviseroit pas de lui attribuer.

Mais quelle peut être la cause du dérangement de l'épine dans des personnes qui l'ont toujours eue très-droite, & qui n'ont essuyé aucun accident qui ait pu la courber?

La structure de cette partie, bien examinée par M. Portal, lui a fourni la réponse à cette question.

L'épine ou colonne vertébrale est composée de trente vertèbres posées les unes sur les autres, & séparées néanmoins par des cartilages intermédiaires; elles sont soutenues par un ligament commun qui les revêt toutes, & par des ligamens particuliers, & de plus, les muscles du dos qui y ont leurs attaches, achèvent de les maintenir dans leur position.

Il résulte évidemment de cette structure, que si quelques-uns de ces agens sont altérés, il est impossible que la position des vertèbres ne le soit aussi; c'est effectivement ce qui arrive, & nous allons voir que l'âge les altère tous.

1.° Il est de fait qu'à mesure qu'on avance en âge, les

ligamens ſe raccourciſſent; or ce raccourciſſement ne peut avoir lieu ſans tirer l'épine en avant, parce que le ligament antérieur eſt beaucoup plus fort que les poſtérieurs; 2.° les cartilages intermédiaires perdent, en ſe deſſéchant, une partie conſidérable de leur épaiſſeur, les vertèbres ſe rapprochent l'une de l'autre, & pour peu que l'épaiſſeur de ces cartilages ſe trouve plus diminuée d'un côté que de l'autre, il en réſulte néceſſairement une flexion dans l'épine; 3.° enfin les muſcles du dos qui devroient, en ce cas, agir avec plus de force pour contenir les vertèbres, plus difficiles alors à mouvoir, parce qu'elles ſont plus ſerrées, perdent au contraire une partie de leur force, & agiſſent moins vigoureuſement; en ſorte que toutes les cauſes concourant à faire courber l'épine en avant, & quelquefois ſur le côté, il eſt très-rare que ce dérangement n'ait plus ou moins lieu dans un âge avancé, & que ſouvent il ne cauſe des maladies dangereuſes.

C'eſt donc principalement dans ce cas qu'il faut aider la Nature, ſoit par des machines, ſoit par de ſimples corps baleinés; mais il faut bien ſe ſouvenir que ces machines ou ces corps ne doivent pas être tous faits de même, & que leur forme doit être appropriée à la maladie de chaque ſujet qu'on a à traiter. Toutes ces diſcuſſions ſeront l'objet d'un ſecond Mémoire, que M. Portal ſe propoſe de donner ſur cette importante matière.

Il ſuit encore de ce que nous venons de dire, qu'à moins d'une menace de dérangement, les corps baleinés ſont aſſez inutiles dans l'enfance & dans la jeuneſſe, les muſcles alors ſont dans leur force, & les ligamens ont toute leur ſoupleſſe; mais non-ſeulement ils ſont alors inutiles, ils ſont encore nuiſibles par l'inaction dans laquelle ils tiennent les muſcles du dos, qui en oblitère les mouvemens, en ſorte que lorſqu'on veut les quitter dans un âge plus avancé, ce que ne manquent pas de faire beaucoup de Dames, on riſque de s'expoſer à la courbure de l'épine, & à tous les inconvéniens qu'elle peut occaſionner; il faut donc, quand on eſt accoutumé à l'uſage des corps, le continuer.

Mais

Mais pour tirer pour la ſanté tout le parti poſſible de l'uſage des corps, même dans l'enfance ou dans la jeuneſſe, il faudroit conſulter plus qu'on ne fait la ſtructure du corps humain, pour ne la pas contrarier. La poitrine eſt naturellement plus large par le bas que par le haut, & les corps tendent à lui donner une forme toute oppoſée; le bas-ventre eſt naturellement plus ſaillant que la poitrine, ou tout au moins à ſon niveau; les corps tendent à le rendre moins ſaillant, ſur-tout par le bas, ils repouſſent par ce moyen les viſcères, & les refoulent contre le diaphragme qui, de ſon côté, s'élève dans la poitrine, & gêne les poumons; l'épine, dans une perſonne bien faite, doit avoir quatre courbures, & les corps tendent à la mettre en ligne droite, de-là une infinité de dérangemens dans l'économie animale, de compreſſions & de maladies organiques, ſouvent dangereuſes & quelquefois mortelles, qu'on éviteroit en ſe conformant un peu plus aux vues de la Nature. On ne trouble pas impunément ſes opérations.

SUR L'ANATOMIE DES OISEAUX.

L'ANATOMIE comparée a toujours fait une grande partie des occupations des Anatomiſtes, ſi quelque choſe en effet eſt capable de découvrir en certains points le ſecret de la Nature, c'eſt la manière dont elle a été comme forcée de varier les parties analogues dans les différentes eſpèces, pour les rendre propres aux uſages particuliers auxquels elles ſont deſtinées; c'eſt dans cette vue que le ſcalpel des Anatomiſtes s'eſt ſi ſouvent exercé ſur les quadrupèdes, dont la ſtructure eſt plus rapprochée de celle du corps humain; mais on étoit fort en arrière ſur les Poiſſons & ſur les Oiſeaux. M. de Vicq-d'Azyr a entrepris la diſcuſſion de l'un & de l'autre objet; il avoit communiqué ſon travail ſur les Poiſſons, à l'Académie, avant même qu'il en fût Membre, & elle l'avoit publié dans

V. les Mém. page 617.

le VII.me volume des Savans Étrangers *. Il lui a depuis donné celui qu'il a fait ſur les Oiſeaux, dont le Mémoire duquel nous avons à rendre compte, contient le plan général, & les deux premiers articles de l'exécution, ſavoir ; une partie de l'hiſtoire du ſquélette & des muſcles : nous allons eſſayer de préſenter une légère idée de l'un & de l'autre.

* Voy. Sav. Étr. T. VII, p. 233.

Belon a décrit le ſquelette des oiſeaux, & dans la vue de mieux remarquer ce qu'il avoit de commun avec l'homme & les autres animaux, & ce en quoi il en différoit, il l'a redreſſé ſur ſes pieds ; ce moyen ſi ſimple & ſi ingénieux étoit certainement le plus propre de tous à produire l'effet qu'il deſiroit, mais il s'eſt contenté de nommer les pièces qui compoſent ce ſquelette, ſans décrire les variétés qui ſe trouvent dans les différens oiſeaux, ſans entrer dans aucun détail ſur leur mécaniſme, & ſans parler des muſcles qui doivent leur donner le mouvement.

L'Académie, dès les premiers temps de ſon inſtitution, s'étoit occupée de la diſſection des oiſeaux : on trouve dans la collection de ſes Mémoires avant 1699 *, des deſcriptions très-bien faites de pluſieurs oiſeaux, mais on s'y eſt principalement attaché aux viſcères, & la ſtructure des muſcles paroît y avoir été extrêmement négligée ; d'autres ſavans Anatomiſtes ont ſuivi la même carrière, mais ils ſemblent tous avoir formé le deſſein de négliger abſolument l'anatomie des muſcles, à peine en trouve-t-on quelques veſtiges dans leurs ouvrages.

* Voy. anc. collect. T. III, I.re & III.me Partie.

Borelli qui traitoit ſpécialement du mouvement des animaux, ſemble être celui dans les ouvrages duquel on devroit trouver plus de détail ſur les muſcles des oiſeaux, il s'eſt pourtant ſi peu étendu ſur cette partie, qu'il n'en a décrit que deux dont il a déterminé l'action, & qu'il a comparés à ceux de l'homme ; mais malgré la ſubtilité du calcul qu'il a employé, il n'a pu parvenir à expliquer convenablement l'action du vol, & il n'a pas traité, d'une manière plus ſatisfaiſante, le marcher des oiſeaux, le jeu de leurs côtes, & celui de leur ſternum.

Stenon ſeroit, de tous les Anatomiſtes, celui qui auroit

approché le plus près du but en cette partie, s'il n'y avoit des embarras qui rendent ſon travail preſque inutile; il a décrit les muſcles de l'Aigle; & comme ceux de tous les oiſeaux ſe reſſemblent, une nouvelle deſcription deviendroit inutile, s'il n'avoit trop multiplié les muſcles de quelques parties, s'il n'avoit preſque par-tout négligé de les comparer avec ceux des quadrupèdes; & ſi au lieu de diſtinguer ſeulement ces muſcles par des nombres, il leur avoit donné des noms, ou les mêmes, ou à-peu-près ſemblables à ceux qu'ont dans l'homme & les autres animaux, ceux auxquels ils ſont analogues. Ces défauts rendent ſes deſcriptions d'ailleurs très-détaillées, preſque inutiles, en ſorte que la matière peut être regardée comme abſolument neuve, & il eſt, ſelon la remarque de M. de Vicq-d'Azyr, bien ſingulier que dans un ſiècle où l'on connoît juſqu'aux moindres muſcles de la Chenille, ceux des Oiſeaux ne ſoient pas mieux connus ni mieux décrits.

Pour réparer cette eſpèce d'omiſſion, M. de Vicq-d'Azyr a entrepris de les décrire, & de les comparer à ceux de l'homme & des quadrupèdes, deſquels ils tiennent lieu dans les oiſeaux.

On juge bien qu'il ne s'eſt pas impoſé la loi de diſſéquer indiſtinctement tous les oiſeaux. Ceux qui ſont au fait des ouvrages de la Nature, ſavent qu'elle les a rangés ſous de certaines claſſes dans leſquelles on reconnoît un certain ſyſtème de ſtructure qui ſe rencontre, avec très-peu de différence, dans tous les individus qui les compoſent, en ſorte que quelques-uns des êtres de ces claſſes, une fois connus, donnent infailliblement la connoiſſance de tous les autres de la même claſſe; c'eſt auſſi la voie qu'a pris M. de Vicq-d'Azyr.

Perſonne ne connoît mieux les caractères diſtinctifs de ces claſſes, que les Naturaliſtes, c'eſt pour cela que M. de Vicq a concerté ſon travail avec M. Daubenton, de cette Académie, plus à portée que qui que ce ſoit de l'aider dans cette circonſtance; ils ont établi neuf grandes familles qui comprennent tous les oiſeaux connus.

Cette diviſion une fois établie, il a choiſi dans chacune des

familles, quelques individus qui, au moyen de leur grosseur, ou de quelques qualités particulières, pussent donner plus de prise à ses recherches. Les sujets choisis par M. de Vicq ont été dans la première famille, le Perroquet & le Coucou; dans la seconde, le Chat-huant & la Chouette; dans la troisième, l'Aigle, l'Épervier & la Buse; dans la quatrième, qu'on peut diviser en deux ordres, la Corneille & le Gros-bec pour le premier, l'Hirondelle & la Mésange pour le second; dans la cinquième, le Coq & le Pigeon; dans la sixième, la Grue & la Bécasse; dans la septième, la Poule-d'eau; dans la huitième, le Plongeon, l'Oie & le Canard; dans la neuvième enfin, l'Autruche & le Casoar.

La méthode que M. de Vicq a cru devoir adopter, pour la description des muscles, est celle d'Albinus, elle éloigne tout préjugé sur leurs usages; elle présente les parties par ordre, & fixe leur situation, & sur-tout elle favorise beaucoup la connoissance des rapports anatomiques, qui sont, comme nous l'avons dit, le principal but qu'il s'est proposé dans cette recherche.

Cette méthode consiste à diviser le corps animal en un certain nombre de régions: on conçoit aisément que cette division n'est nullement arbitraire, & qu'elle doit être faite de manière que chaque région comprenne tous les muscles destinés à un certain usage, autrement on retomberoit infailliblement dans la confusion; c'est ce qui a engagé M. de Vicq à partager le corps des oiseaux en vingt-quatre régions, qui comprennent séparément tous les muscles destinés à exécuter les différens mouvemens dont ils sont susceptibles; il n'en examine que trois dans ce Mémoire, qui, comme on voit, n'est que le commencement d'un travail très-étendu, & ces trois sont la région thorachique antérieure, la région de la clavicule, & celle de l'omoplate.

La région thorachique antérieure s'étend depuis l'extrémité antérieure du sternum, jusqu'à la postérieure, & de chaque côté, jusqu'au pli que font les côtes sur elles-mêmes; au milieu de leur longueur un des os de cette partie le plus remarquable

.1

a

.6.

x

.9.

Sculp.



Fossier del.

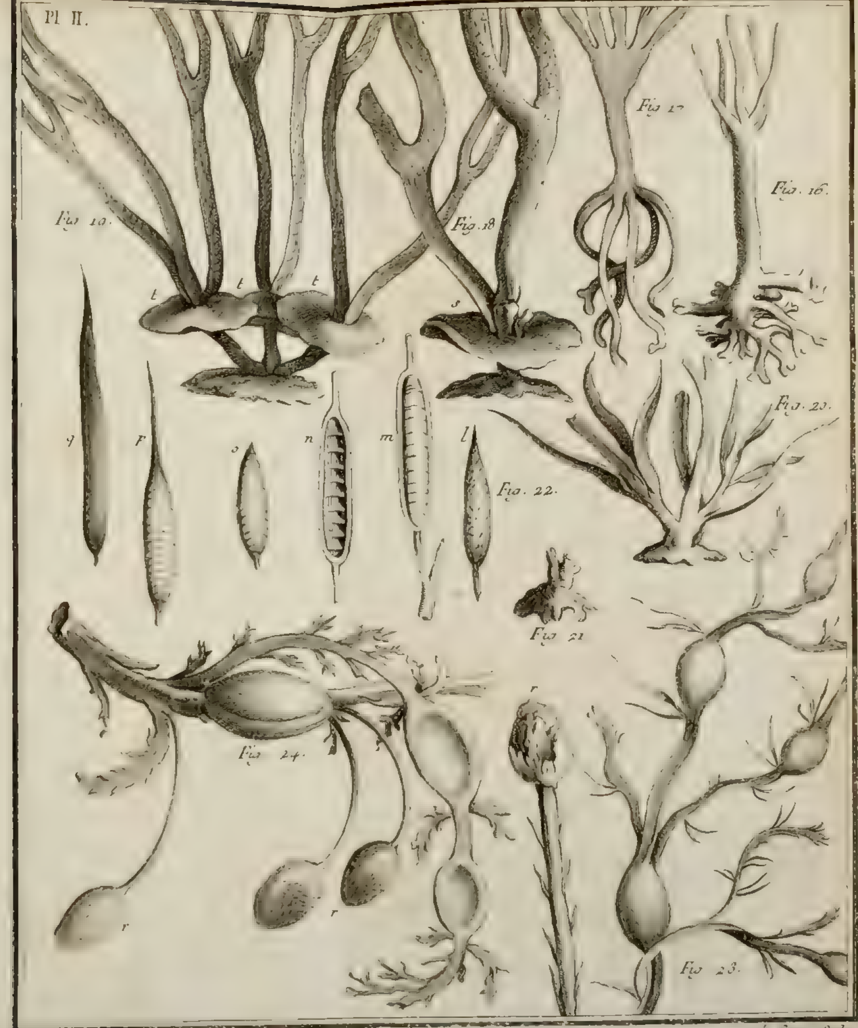
Y. le Gouaz Sculp.

. IV.

6.

10.

Sculp.



Fossier del.

y le Gouaz Sculp.

eſt le ſternum, à cauſe de la crête très-ſaillante qui le diſtingue dans tous les oiſeaux, & qui l'a fait comparer à la quille d'un navire; les côtes qui s'y joignent dans ſa partie latérale ont dans cette articulation un mouvement aſſez marqué; on y obſerve de plus une apophyſe en forme d'anſe, & vers les parties latérales deux autres apophyſes, que M. de Vicq nomme *claviculaires.*

Quoique ce que nous venons d'expoſer, exiſte dans tous les oiſeaux, il ne faut pas croire que tous ces os ſoient préciſément de la même forme dans tous, on y obſerve des variétés aſſez remarquables, & M. de Vicq rend un compte exact de celles qu'il a rencontrées; il paroît en général que le ſternum des oiſeaux, très-différent de celui de l'homme, ne doit cette différence qu'à la néceſſité de voler qu'ont ces animaux, & s'en rapproche d'autant plus, qu'ils ſont deſtinés à faire moins d'uſage de leurs ailes.

On retrouve dans cette région les mêmes muſcles que dans l'homme, mais variés & appropriés à la fonction du vol, tant pour leur grandeur, que pour leur force & leurs différentes inſertions. Dans l'homme, par exemple, l'omoplate eſt ſuſceptible de certains mouvemens, & ces mouvemens s'exécutent par le moyen de certains muſcles, & ſur-tout du petit pectoral, qui y ont des attaches; dans les oiſeaux, au contraire, où cette partie doit être fixe pour réſiſter aux efforts du grand pectoral, ces mêmes muſcles ont leur attache à l'os de l'humérus, des mouvemens duquel ils augmentent conſidérablement la force.

On obſerve dans les oiſeaux un muſcle particulier qui ne ſe trouve point dans l'homme, & que M. de Vicq-d'Azyr nomme *moyen pectoral;* l'uſage de celui-ci eſt de tirer en deſſous la partie de l'aile qui répond au bras de l'homme, & de donner au mouvement de l'aile le développement & l'horizontalité; par ce moyen, le moignon des oiſeaux ſe trouve le plus à nu & le plus léger poſſible, ce qui contribue à placer le centre de gravité de l'oiſeau, le plus avantageuſement poſſible.

La région de la clavicule eſt la ſeconde de celles que M. de Vicq examine dans ce premier Mémoire, elle renferme tout l'eſpace compris entre les deux clavicules.

Ces deux os varient peu dans les différentes eſpèces d'oiſeaux, ils s'appuyent ſur les deux extrémités d'un os, connu ſous le nom *de fourchette.* Cette diſpoſition permet aux clavicules des oiſeaux un léger mouvement qui facilite beaucoup l'action du vol, & procure en même temps aux clavicules la faculté de ſe replacer par le reſſort des branches de cet os; auſſi cet os de la ſourchette eſt-il bien plus libre, bien plus élaſtique & bien plus iſolé dans les eſpèces qui font un grand uſage de leurs ailes, comme, par exemple, dans l'Aigle, que dans celles qui ne s'en ſervent pas pour voler comme l'Autruche & le Caſoar.

On trouve dans cette région, un muſcle ſouclavier, interne & un externe, le premier eſt comme un acceſſoire du pectoral moyen, & le ſecond eſt celui du grand pectoral; ce muſcle eſt unique dans l'homme, ou ſon principal uſage eſt très-différent, il y ſert à des mouvemens qui auroient été très-inutiles dans les oiſeaux; auſſi les attaches de ces deux ſouclaviers y ſont-elles différentes de celles du ſouclavier unique de l'homme.

A ces muſcles s'en joignent encore pluſieurs autres qui ſemblent moins deſtinés à produire des mouvemens, qu'à aſſujettir les clavicules & l'omoplate avec la plus grande ſûreté, ces deux os ne pouvant l'être trop pour réſiſter aux efforts conſidérables qui tendent à les déplacer.

La troiſième & dernière région du corps des oiſeaux, que M. de Vicq-d'Azyr examine dans ce Mémoire, eſt celle de l'omoplate; elle comprend la face ſupérieure & inférieure de cet os, & l'eſpace contenu entre ſon bord interne & l'épine; c'eſt peut-être de tous les os des oiſeaux, celui qui diffère le plus de ſon analogue dans l'homme; il eſt droit, alongé, étroit, un peu courbé vers le bas, légèrement concave en deſſus, preſque égal en deſſous, & tranchant dans ſes bords; cette ſtructure eſt, à peu de différence près, la même dans tous les oiſeaux.

Ce changement de figure tient, comme nous le verrons dans un moment, aux usages auxquels l'omoplate est destinée, & qui dans l'homme & dans les oiseaux sont bien différens; c'est aussi la raison pour laquelle on trouve dans cette région du corps, des muscles qui n'existent point dans l'homme, & que ceux même qui sont analogues à ceux de l'homme, paroissent y avoir des usages souvent différens.

Le muscle, par exemple, qu'on nomme *trapèze* dans l'homme, se retrouve dans les oiseaux, mais avec des différences très-marquées, & qui semblent dépendre de l'immobilité que nous avons fait voir, que cette dernière avoit chez eux.

Il s'en trouve un particulier que M. de Vicq nomme *sus-scapulaire*, qui a plusieurs de ses fibres continues avec le trapèze, & avec celui duquel nous parlerons dans un moment qui tient lieu de celui qui, dans l'homme, se nomme *grand dorsal;* ce muscle s'insère à la partie inférieure & interne de la tête de l'humérus, il sert à tirer le bras en arrière & un peu en dessus, il le rapproche de l'omoplate, & s'il est élevé, il l'abaisse avec assez de force. Comme l'omoplate des oiseaux n'a ni crête ni épine, on n'y trouve point les deux muscles connus dans l'homme sous le nom de *sus-épineux* & *sous-épineux ;* le muscle connu dans l'homme sous le nom de *grand dorsal*, se retrouve dans les oiseaux, mais bien plus petit, & divisé en trois parties, dont une s'attache à l'épine, une à la pointe de l'omoplate, & la troisième à l'humérus au-dessous de son articulation supérieure, & cette dernière sert à porter le bras en dedans & en dessus.

Un autre muscle est destiné à étendre la membrane postérieure de l'aile, ce muscle est très-petit, & dans quelques oiseaux, fait partie du grand dorsal, il est aidé dans sa fonction par deux autres muscles qui appartiennent à la quatrième région.

Le dernier des muscles de la région de l'omoplate, est celui que M. de Vicq nomme *sous-scapulaire*, & qui tient lieu de celui qui, dans l'homme, est connu sous le nom de *grand dentelé*, son usage est d'éloigner un peu l'omoplate de l'épine,

de la maintenir dans une diſtance déterminée & de la fixer; il eſt aidé dans cette fonction par la portion ſcapulaire du grand dorſal, ce qui le rapproche encore du muſcle grand dentelé.

Ce que nous venons d'expoſer, met M. de Vicq en état de déterminer l'uſage de l'os de la fourchette dans les oiſeaux, & de donner une raiſon très-plauſible de la grande longueur & du peu de largeur de l'omoplate dans ces animaux.

L'uſage de la fourchette eſt d'empêcher que les deux clavicules, qui ſont jointes à ſes extrémités, ne puiſſent s'écarter ou s'approcher plus qu'il ne faut, & de leur laiſſer cependant, par ſon élaſticité, une eſpèce de vibration très-utile dans l'action du vol; elle fournit auſſi, par l'ouverture de ſes branches, un paſſage commode pour la trachée artère, pour ſes muſcles internes & inférieurs, pour l'œſophage, & pour ſa dilatation qu'on nomme *poche*, & enfin une inſertion néceſſaire au grand pectoral, dont il dirige l'action.

A l'égard de la figure longue & étroite de l'omoplate : voici, ſelon M. de Vicq, quelle en eſt la raiſon; deux muſcles très-forts ſont deſtinés aux mouvemens de l'aile, ces mouvemens s'exécutent dans la cavité articulaire, creuſée dans l'angle commun de la clavicule & de l'omoplate; ces muſcles tendent donc par leur action à déplacer ces deux os : la clavicule eſt, comme nous l'avons vu, très-ſolidement arrêtée; il falloit donner à l'autre branche du levier recourbé une force égale, & empêcher que l'effort des pectoraux ne lui fit faire la baſcule, & c'eſt à quoi l'Auteur de la Nature a pourvu en augmentant ſa longueur; l'omoplate de l'homme qui n'avoit pas les mêmes efforts à ſoutenir, n'avoit pas beſoin de cet alongement.

Tel eſt le précis très-abrégé des obſervations de M. de Vicq, ſur les trois premières parties de l'Anatomie des os & des muſcles des Oiſeaux. Elles ſont bien propres à faire deſirer la ſuite qu'il promet de ce travail intéreſſant.

OBSERVATIONS

OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

DANS le cadavre d'un enfant mort à la ſuite de convulſions aſſez vives, peu après ſa naiſſance, M. de Vicq-d'Azyr trouva dans la poitrine une tumeur conſidérable ; voulant en connoître la nature, il ouvrit le bas-ventre & s'aperçut que le foie étoit déplacé, & formoit une hernie conſidérable au travers des fibres droites du diaphragme ; cette tumeur très-volumineuſe rejetoit le poumon tout-à-fait à gauche, & elle avoit eu d'autant plus de facilité à le déplacer, que dans le fœtus le poumon n'eſt pas développé ; le ſac herniaire qui contenoit une partie conſidérable du foie, étoit plus étroit à ſon entrée qu'au fond, en ſorte que ce viſcère y étoit comme étranglé ; auſſi les veines & les conduits biliaires y étoient-ils gonflés outre meſure, cette portion étoit mollaſſe & comme ſpongieuſe, & la véſicule du fiel vide & affaiſſée. La veine ombilicale étoit très-diſtendue & relevée vers l'orifice du ſac herniaire.

Cette tumeur étoit ſi conſidérable, & occupoit une ſi grande place dans la poitrine, qu'elle devoit même gêner le cœur dans ſes mouvemens, & c'eſt-là vraiſemblablement la cauſe de la mort de l'enfant ; le cœur déjà très-gêné dans ſes mouvemens, a reçu une nouvelle gêne à la naiſſance de l'enfant par l'entrée de l'air dans le poumon, les organes de la reſpiration & ceux de la circulation ſe ſont oppoſés de mutuels obſtacles par la gêne où les tenoit la tumeur : de-là les convulſions & la mort.

M. de Vicq a recherché dans les auteurs Anatomiques, s'il ne ſe trouveroit point d'exemple de cette conformation, Paré, Sénac, Faucon, Morgagni, font mention de viſcères abdominaux paſſés dans le thorax à la ſuite de plaies du diaphragme ; Morgagni même cite un eſtomac qui avoit paſſé le long de l'œſophage dans le thorax ; Stéhélin & Soltius ont

vu des déplacemens à-peu-près pareils à celui qui fait le ſujet de cette obſervation; mais aucun n'a donné le détail des parties intéreſſées, ni la manière par laquelle cette eſpèce de hernie avoit cauſé la mort du ſujet. C'eſt ce qui a engagé l'Académie à publier l'obſervation de M. de Vicq-d'Azyr avec toutes ſes circonſtances.

I I.

Le même M. de Vicq trouva dans un cadavre qu'il alloit diſſéquer, la jambe fléchie ſur la cuiſſe & le pied extrêmement étendu; cette attitude peu naturelle excita ſa curioſité, il crut d'abord pouvoir l'attribuer à quelque défaut de mouvement dans les articulations, mais ayant fait mouvoir la cuiſſe dans la cavité cotyloïde, & la jambe dans le pli du genou, il trouva ces mouvemens dans l'état où ils devoient être, & il fallut chercher ailleurs la cauſe de cette attitude ſingulière. Dans cette vue il ouvrit la peau de la cuiſſe pour découvrir l'état des muſcles, mais il fut bien ſurpris de ne trouver au-deſſous qu'un tiſſu graiſſeux & fibreux qui les remplaçoit tous, du moins ſi on en excepte un petit nombre, & il s'aſſura que tous ceux de cette extrémité avoient ſubi la même métamorphoſe.

Elle ne s'étendoit cependant qu'à la partie inférieure, les muſcles du dos, & même le grand feſſier, étoient dans leur état naturel, mais tous les muſcles ſitués au-deſſous étoient ou détruits ou tellement pâles, qu'on n'y remarquoit plus aucune rougeur; les aponévroſes même avoient perdu cet air luiſant & ſatiné qu'elles ont naturellement; cette différence étoit ſur-tout marquée dans le tendon du *triceps tribial*, & dans celui du *faſcia lata*, dans la portion ſciatique du *demi-nerveux* & *du biceps*, dans les *extenſeurs des doigts & du pouce;* & dans *le jambier antérieur*, on retrouvoit encore quelques fibres dont la direction étoit marquée, les autres étoient ſi parfaitement détruits, qu'à peine pouvoit-on en trouver quelques veſtiges en les cherchant dans la place qu'ils avoient dû occuper; le tiſſu même du nerf paroiſſoit plus mou qu'il

n'eſt ordinairement, l'artère étoit oſſeuſe en quelques endroits; mais ce que l'état de cette partie offroit de plus curieux, étoit la manière nuancée dont s'étoit fait le changement de la fibre muſculaire en tiſſu cellulaire : on voyoit parfaitement cette dégradation dans le muſcle appelé *le couturier*, en l'examinant depuis ſon inſertion à l'os des îles juſqu'au tibia: l'extrémité ſupérieure conſervoit encore une partie de ſon premier état, tandis que l'inférieure étoit abſolument confondue avec la graiſſe qui environne le genou. Cette graiſſe qui remplaçoit les muſcles, étoit ſi parfaitement moulée dans leur place, que le membre recouvert de la peau paroiſſoit dans ſon état naturel.

Le ſujet de cette obſervation étoit vieux, & M. de Vicq n'a trouvé, dans les grandes cavités, aucune cauſe à laquelle il ait pu attribuer ce ſingulier accident; les perquiſitions qu'il a faites lui ont appris qu'il s'étoit long-temps également ſervi de ſes deux jambes, mais qu'après une maladie, le côté gauche s'étoit de plus en plus affoibli ſans ſe déformer; de façon qu'il avoit été à la fin contraint de marcher avec une béquille, ce qu'atteſtoit en effet l'impreſſion que cet inſtrument avoit laiſſée à l'aiſſelle de ce côté.

Il étoit aſſez naturel que M. de Vicq recherchât dans les Auteurs, les exemples de ſemblables accidens qui pouvoient s'y trouver, & voici quel a été le fruit de ſes recherches.

Ariſtote dans l'hiſtoire des Animaux, dit formellement, que la chair ſe change en graiſſe quand elle reçoit trop de nourriture.

Parmi les Anatomiſtes modernes, Salzmaun dans ſa Diſſertation ſur l'altération & le défaut de pluſieurs muſcles, dit avoir vu les fibres charnues écartées, & pour ainſi dire écraſées par un amas de graiſſe; Leuwenhoëck cité à ce ſujet par M. Haller, a vu la graiſſe en faire autant, même à l'égard des tendons; Albinus après avoir conſidéré le muſcle en général, dit ces propres paroles : *Pinguedineità diſtenditur aliquando ut reliqua muſculorum ſuffocet, tendines verò pinguedini tam facilè non cedunt.* Cette eſpèce de deſtruction des muſcles

par la graiſſe, n'eſt donc pas tout-à-fait inconnue, mais elle eſt très-rare, & on les voit bien plus ſouvent détruits par l'atrophie ou le défaut de nourriture, la paralyſie, la ſuppuration, que par la graiſſe; auſſi M. Haller, dit-il, de cet accident, *in morbis rarum in monſtris vulgare vitium eſt.*

De cette obſervation il réſulte : 1.° que la fibre muſculaire peut, par un vice particulier, être réduite à un ſimple canevas non contractile : il paroît que cette maladie eſt aux muſcles, ce que le ramolliſſement eſt aux os; dans l'un le ſuc oſſeux plus délayé, eſt tranſporté dans d'autres couloirs; dans l'autre la ſubſtance élaſtique & irritable eſt altérée, & le tiſſu qui lui eſt propre eſt abſolument changé : 2.° que le défaut de mouvement accélère beaucoup le progrès de la maladie, car le ſang étant néceſſaire à l'action muſculaire, ce fluide s'y porte avec d'autant plus de force, que l'exercice eſt moindre : 3.° que dans le cas particulier dont il s'agit, les muſcles poſtérieurs de la jambe ayant plus long-temps conſervé leur force à cauſe de leur épaiſſeur, le pied dont ils ſont les extenſeurs devoit être reſté étendu, & que les muſcles de la cuiſſe avoient dû réſiſter plus long-temps à leur deſtruction, & c'eſt auſſi ce qu'a montré la diſſection : 4.° que la fibre muſculaire dépouillée de ſa partie rouge, & paroiſſant continue avec la fibre tendineuſe, fait voir évidemment que les fibres des muſcles & celles des tendons, ſont préciſément de même nature, quoique Muys ait avancé le contraire : 5.° que dans l'eſpèce de déſorganiſation, qui fait le ſujet de cette obſervation, la graiſſe contenue dans les muſcles, n'en diviſe ni n'en écarte les fibres, comme Albinus & M. de Haller l'avoient avancé, mais qu'elle eſt contenue dans les petites cellules & entre les élémens de la fibre muſculaire devenue blanche, très-différente, en cela, de la graiſſe qui accompagne les muſcles dans l'état ordinaire, qui eſt dépoſée entre les trouſſeaux de fibres charnues; il ſemble qu'elle remplace une autre ſubſtance qui manque, & que, ſuivant la doctrine de Kaw, Boërhave, elle ait tranſudé par les ouvertures d'une infinité d'artérioles deſtinées, dans l'état naturel, à porter des ſucs

dans les muſcles, & qui, ſuivant l'obſervation de M. Haller, en contiennent d'autant moins, qu'elles contiennent plus de graiſſe : 6.° Enfin, qu'à ce canevas qui n'eſt plus ni contractile ni irritable, il ne manque peut-être qu'une plus grande quantité de ſang ou une certaine diſpoſition pour le recevoir convenablement; & qu'enfin dans un muſcle bien conſtitué, le ſang eſt peut-être principalement deſtiné à la ſecrétion d'une matière douée d'une élaſticité particulière, dont tous les phénomènes de l'irritabilité dépendent. Ce ne ſont encore ici que des conjectures, mais ce n'eſt que dans les dérangemens de l'ordre ordinaire de la Nature, qu'on peut eſpérer de trouver la connoiſſance de certaines parties de ſa marche ordinaire, qu'elle ſemble avoir voulu dérober à nos recherches.







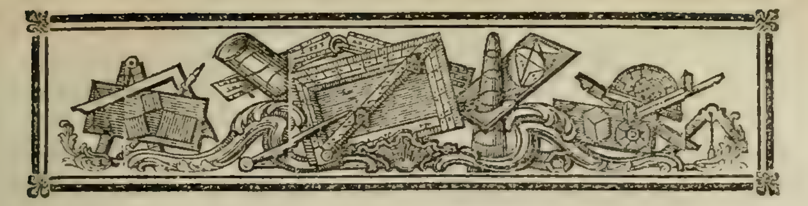
CHIMIE.

V. les Mém. page 465.

NOUS renvoyons entièrement aux Mémoires :

L'Écrit de M. de Lassone, intitulé : *Réponse à quelques Remarques critiques, relatives à un fait consigné dans un de mes Mémoires, imprimé parmi ceux que l'Académie a publiés pour l'année 1757.*





ALGÈBRE.

SUR LE CALCUL INTÉGRAL, ET SUR LE SYSTÈME DU MONDE.

LE Calcul intégral a toujours été regardé comme un des plus importans objets de l'Analyse : on sait que dans le nombre des équations différentielles qui sont soumises à ce calcul, il y en a dont l'intégration absolue est possible, & d'autres qui ne peuvent s'intégrer que par approximation. C'est à faciliter l'intégration de ces dernières, qu'est destiné le Mémoire de M. de la Place, duquel nous avons à rendre compte : on doit à M. de la Grange les premières recherches sur cette matière, & depuis M.rs d'Alembert & de Condorcet ont donné des méthodes très-ingénieuses pour le même objet. V. les Mém. pages 267 & 533.

Celle que propose ici M. de la Place, consiste à faire varier les constantes arbitraires dans les intégrales approchées, il seroit peut-être difficile d'en donner une idée plus juste & plus détaillée sans calcul; nous croyons donc devoir inviter le Lecteur à recourir au Mémoire même, ou à un Éclaircissement que l'Auteur a joint à l'*errata* de son ouvrage : nous nous contenterons de faire observer ici deux grands avantages que cette nouvelle méthode nous paroît avoir.

Le premier est d'être extrêmement simple, & de donner, avec la plus grande facilité, les intégrales approchées qui exigent des calculs très-compliqués, par les méthodes déjà connues; le second est de faire disparoître, par une seule

équation, les arcs de cercle, quel que ſoit d'ailleurs le degré d'approximation.

Pour rendre plus ſenſibles les avantages de la nouvelle méthode, M. de la Place l'applique à la détermination du mouvement des Planètes, il donne une théorie complète de leurs inégalités, tant ſéculaires que périodiques, & il démontre que, dans le ſyſtème de l'attraction Newtonienne, leurs moyens mouvemens, & par conſéquent leurs moyennes diſtances au Soleil ſont invariables. Ce réſultat, au reſte, n'eſt pas nouveau; M. de la Place y étoit déjà parvenu par une autre méthode, dans un autre Mémoire imprimé, dans le VIIme volume des Savans Étrangers *; mais celle dont il fait uſage ici eſt beaucoup plus ſimple; d'ailleurs ces deux différentes méthodes conduiſant au même réſultat, il en réſulte un degré de certitude auquel il eſt difficile de ſe refuſer, & cela étoit d'autant plus néceſſaire, que tous les Géomètres qui, avant M. de la Place s'étoient occupés de cette recherche, avoient trouvé une variation ſéculaire dans les mouvemens moyens des Planètes.

* *Voy. Savans Étran. T. VII, page 37.*

M. de la Place recherche enſuite & détermine le mouvement des Planètes, en ſuppoſant qu'elles ſe meuvent dans un milieu très-peu réſiſtant pendant un temps quelconque illimité, ce que perſonne n'avoit fait encore; enfin, dans une addition à ſon Mémoire, il recherche *à priori* la figure que doit prendre un ſphéroïde homogène de révolution, infiniment peu différent de la ſphère, pour être en équilibre en vertu de l'attraction mutuelle de toutes ſes parties, & de ſa rotation autour de ſon axe de révolution. L'analyſe l'a conduit, pour déterminer la figure du Méridien, à une différentielle d'un degré infini, & dont l'équation à l'ellipſe eſt une intégrale particulière; il parvient à exclure du cas de l'équilibre, un grand nombre de figures, mais il n'oſe aſſurer, malgré cela, que la figure elliptique ſoit en ce cas la ſeule figure poſſible; au reſte, ſi les recherches de M. de la Place ne l'ont pas conduit à donner une détermination préciſe & générale de la figure du Méridien, dans le

ſphéroïde

ſphéroïde propoſé, elles lui ont toujours fait connoître la loi de la peſanteur, & l'ont mené à ce théorème remarquable, ſavoir; *que ſur un ſphéroïde homogène, quelle que ſoit ſa figure, pourvu qu'elle tienne le ſphéroïde en équilibre, la variation de la peſanteur de l'Équateur au Pôle, ſuit préciſément la même loi que ſur le ſphéroïde elliptique homogène.*

M. de la Place ne pouvoit pas faire voir plus clairement l'utilité de la méthode qu'il propoſe, que par l'application heureuſe qu'il en a fait à l'important objet de la théorie des Planètes & de leur figure.

SUR LA

MANIÈRE DE DISTINGUER À PRIORI,

la réalité & le ſigne des racines des Équations.

L'ACADÉMIE a déjà été deux fois occupée de cet objet; la première à l'occaſion d'un Mémoire lû par M. l'abbé de Gua en 1743 *; & la ſeconde relativement à un Ouvrage de M. Fontaine.

V. les Mém. p. 377.

* *Voyez Hiſt. 1743, pages 92 & 95.*

La méthode employée par M. l'abbé de Gua n'a rien de commun avec celle dont nous avons à parler ici d'après le Mémoire de M. du Séjour; M. l'abbé de Gua emploie dans le ſien la conſidération des lignes paraboliques, & l'on y voit briller ce génie vraiment original qui fait regretter aux Algébriſtes de ne connoître qu'un petit nombre de ſes productions.

La méthode de M. du Séjour a plus de rapport à celle de M. Fontaine, elles s'appuient toutes deux ſur les mêmes principes; mais la marche des deux Académiciens eſt différente; tous deux cherchent les conditions qui doivent avoir lieu entre les coëfficiens d'une équation propoſée, dans le cas où deux facteurs de ſyſtèmes deviennent ſemblables; cette condition trouvée, M. Fontaine en conclut que la fonction des variables, alors égale à zéro, eſt poſitive pour un des ſyſtèmes, & négative pour l'autre, & il détermine, par un

exemple particulier, celui des systèmes où elle est positive, & celui où elle est négative : cette méthode suppose que la fonction est continuellement du même signe dans chacun des deux systèmes, toujours positive dans l'un, & toujours négative dans l'autre; M. Fontaine ne démontroit pas cette proposition générale, mais il est aisé de voir, en y réfléchissant, que, puisque la condition trouvée est une fonction rationelle des coëfficiens de la proposée, elle est aussi une fonction semblable de toutes les racines, & que, puisqu'elle devient nulle au point où se confondent deux systèmes qui embrassent un certain nombre de racines de l'équation, elle le sera également lorsque la même condition aura lieu pour les combinaisons semblables des autres racines de l'équation. Il faudra donc que les facteurs ne puissent changer de signe, sans que le système de racines ne change de forme; l'identité qu'on suppose entre deux systèmes d'un certain nombre de racines, ne peut donc, étant appliquée aux autres combinaisons semblables de racines, produire que des identités de systèmes absolument semblables à ceux qu'on a considérés; & en effet, il ne peut y avoir aucun changement de signe qui ne change la forme des racines de l'équation sous le point de vue où on les a examinées. Par exemple, si le facteur de la fonction, qui se rapporte au système, change de signe lorsque les racines passent de l'imaginaire au réel, il faut qu'aucun facteur de la fonction ne change de signe, que quand des racines passent de l'imaginaire au réel : de même si le facteur change de signe lorsqu'une racine de l'équation en change aussi, il faut que tous les autres facteurs ne puissent changer de signe, sans que des racines de l'équation n'en changent en même temps; il seroit aisé de prouver qu'il y a des cas où cela arrive nécessairement, & d'autres où cette condition ne peut avoir lieu.

Ce que nous venons de dire, sembleroit devoir détruire toute la théorie de M. Fontaine, mais il est toujours facile, d'après la condition cherchée, d'exprimer en fonction des racines, la quantité dépendante des coëfficiens qu'on suppose

devoir être poſitive dans un ſyſtème, & négative dans l'autre, & il le ſera toujours dans chaque cas de ſavoir ſi cette diſpoſition eſt légitime ou non ; ainſi la méthode de M. Fontaine fournit elle-même le moyen de la corriger lorſqu'elle en a beſoin.

Il y a donc des cas où la fonction trouvée n'a pas conſtamment le même ſigne dans le même ſyſtème de facteurs, & M. Fontaine en a obſervé d'autres où elle étoit du même ſigne pour les deux ſyſtèmes.

Ainſi, pour que cette méthode fût générale, il faudroit que toutes les fois qu'une fonction égale à zéro, lorſque les deux ſyſtèmes ſe confondent, n'eſt pas conſtamment poſitive dans un ſyſtème, & négative dans l'autre; il exiſtât une autre fonction qui eût ces propriétés, & non-ſeulement M. Fontaine n'a pas prouvé cette propoſition; mais un très-grand Géomètre, M. de la Grange, a trouvé pluſieurs cas particuliers où une telle fonction paroît ne pouvoir pas exiſter.

Mais comme les exceptions ont préciſément la même cauſe que nous avons développée ci-deſſus, il arrivera que la méthode de M. Fontaine donnera elle-même le moyen de reconnoître *à priori*, quels peuvent être les cas exceptés, & qu'ainſi elle n'induira jamais en erreur lorſqu'on ſaura l'employer avec précaution : nous avons cru néceſſaire de donner ici cette légère idée de la méthode de M. Fontaine, pour mettre le lecteur à portée de juger en quoi elle diffère de celle de M. du Séjour.

Quoique celle-ci ſoit fondée ſur le même principe que celle de M. Fontaine, cependant elle en diffère abſolument par la manière de trouver les fonctions qui ſont zéro lorſque deux ſyſtèmes ſe confondent, & dans celle de vérifier ſi elles doivent être continuellement poſitives dans un ſyſtème, & négatives dans l'autre.

La marche que ſuit M. du Séjour ne peut égarer, il ne part d'aucune hypothèſe générale, & dans chaque cas, il cherche, par une méthode directe & ſûre, le ſigne des

quantités qu'il considère ; sa méthode le conduit à des fonctions qui contiennent des radicaux pairs. De telles fonctions peuvent devenir imaginaires, & alors on ne peut les regarder ni comme positives, ni comme négatives; M. du Séjour analyse ce cas en particulier, & trouve les conditions qui conviennent alors pour les différens systèmes de facteurs, dont le cas est susceptible, il n'a appliqué sa méthode qu'aux équations des troisième, quatrième & cinquième degrés; le Mémoire inséré dans ce Volume ne contient même que celles du troisième & du quatrième; celles du cinquième feront l'objet d'un autre Mémoire.

Il seroit à desirer que M. du Séjour démontrât que, lorsqu'il s'agit seulement de la réalité des racines des équations, il existe toujours une fonction nulle lorsque les racines passent de l'imaginaire au réel, positive lorsqu'elles sont réelles, & négative quand elles sont imaginaires; car il nous paroît que sans cela on peut faire à cet égard contre la généralité de cette méthode, la même objection que contre celle de M. Fontaine; aussi l'Auteur ne la donne-t-il pas comme générale, il se borne à observer que lui ayant réussi pour le cinquième degré, dont la solution générale n'est pas connue, il est probable qu'elle s'étend à tous les autres.

Peut-être faudroit-il qu'il l'appliquât aux équations du sixième & du huitième degré; en effet, si l'on étoit parvenu à bien distinguer entr'eux les cas de toutes les racines, celles de quatre & de huit imaginaires, & semblablement celles de deux & de six imaginaires, il deviendroit très-probable que la méthode pourroit s'étendre à un nombre quelconque pairement pair, ou impairement pair de racines, ou imaginaires ou négatives. Il est vrai que le travail seroit immense, mais il y a long-temps que les Mémoires qu'a donnés M. du Séjour, ont prouvé qu'il ne pouvoit être rebuté, ni par la longueur, ni par la difficulté du Calcul.



ASTRONOMIE.

SUR L'ASTRONOMIE DES INDIENS.

PENDANT le séjour de près de deux ans, que M. le Gentil a eu occasion de faire à Pondichery, il apprit que les Brames, qui sont la première Tribu, ou comme ils la nomment la première *Caste* de ces Peuples, pratiquoient plutôt qu'ils ne la cultivoient, une certaine partie de l'Astronomie; c'en fut assez pour piquer sa curiosité, & pour l'engager à rechercher quelles étoient leurs méthodes, & jusqu'où ils avoient pu pénétrer. V. les Mém. page 169.

Il ne lui fut pas aussi aisé qu'on pourroit peut-être se l'imaginer de réussir dans son dessein; la présomption & le mystère sont dans l'Inde, comme dans l'Europe, le partage de l'ignorance, & il lui fut extrêmement difficile d'entrer dans quelque commerce avec ces espèces d'Astronomes Indiens, dont nous allons essayer, d'après M. le Gentil, de présenter une idée.

La presqu'île de l'Inde, en-deçà du Gange, est habitée par deux Nations très-différentes; la côte occidentale l'est par les Malabars qui lui ont donné leur nom, & la côte orientale nommée aussi *la côte de Coromandel,* l'est par les Indiens Tamoults.

Ceux-ci ne sont pas originaires du pays, ils disent qu'ils viennent du Tanjaour & du Maduré, leur langue est effectivement la même qu'on parle dans ces royaumes, & très-

différente de celle des Malabars; ils ont en quelque ſorte civiliſé les anciens habitans du pays qui vivoient en Sauvages dans les bois & les forêts, avec leſquels ils ne font aujourd'hui qu'un corps de Nation; mais ils leur ont fait payer cher ce ſervice, car ces gens forment encore aujourd'hui la dernière Caſte ou Tribu de cette nation; ils y ſont dans le dernier mépris, & employés aux plus vils travaux, ſans qu'ils puiſſent jamais eſpérer de ſortir de cet état d'aviliſſement, parce que, ſuivant leurs loix, le paſſage & les mariages d'une Caſte à l'autre ſont abſolument défendus.

Ces Tamoults adoroient anciennement une Divinité qu'ils nommoient *Baouth*, ce prétendu Dieu a paru à M. le Gentil ſi ſemblable au *Sommonacodom* des Siamois, & à l'idole *Foë* des Chinois, qu'il ne doute point que ce ne ſoit la même Divinité; quoi qu'il en ſoit, les Brames qui vinrent dans le Tanjaour & dans le Maduré, y apportèrent leurs Idoles, leur Religion & l'Aſtronomie, & renverſèrent les autels du Dieu *Baouth.*

On n'a rien de certain ſur le temps de l'arrivée des Brames dans le Tanjaour & le Maduré; les Tamoults conviennent ſeulement que ſous le règne d'un de leurs Rois, qu'ils nomment *Salivagena* ou *Salivaganam*, il ſe fit une très-grande réforme dans l'Aſtronomie, ſcience à laquelle ce Prince accordoit une grande faveur; auſſi ſon règne a-t-il fait, chez les Indiens, une époque auſſi fameuſe que l'étoit celle de Nabonaſſar chez les Chaldéens; M. le Gentil a tiré du calcul des Brames, que l'année de la mort de ce *Salivagena*, répondoit à l'an 78 de l'Ere Chrétienne; M. Holwell la place à l'an 79; il en réſulte inconteſtablement qu'il y a ſeize cents quatre-vingt-dix-huit ans que les Brames étoient établis dans cette partie de l'Inde, & qu'on y ſavoit déjà calculer des Éclipſes de Soleil & de Lune; les Peuples qui habitoient alors nos contrées, étoient bien éloignés d'en pouvoir faire autant; mais auſſi, ſoit cauſe phyſique occaſionnée par le climat, ſoit cauſe morale, les Brames qui nous avoient précédés de tant de ſiècles, n'ont pas avancé depuis ſi long-temps d'un ſeul pas, & ſont maintenant infiniment éloignés

du degré de perfection auquel l'Aſtronomie a été portée en Europe.

Il y a plus, la perſuaſion où ils ſont qu'ils n'ont plus aucun progrès à faire en cette partie, met un obſtacle invincible au progrès de leurs connoiſſances; ils ne font aucune obſervation aſtronomique, ni aucune recherche, ils regardent celles que nous faiſons comme une ſuite de notre ignorance, & penſoient que le ſoin que M. le Gentil prenoit de s'informer de leurs principes, étoit une preuve qu'il n'étoit venu que pour s'inſtruire avec eux d'une Science qu'il ignoroit; il eſt vrai cependant, que les prédictions qu'il leur fit de l'apparition & de la réapparition, après le paſſage par le périhélie, de la Comète de 1769, fit prendre aux Brames une idée un peu plus avantageuſe de ſon ſavoir; mais ils n'en furent ni moins vains, ni moins myſtérieux avec lui, & il n'en put tirer d'éclairciſſement, que ſur cinq points de leur Aſtronomie, qui ſont l'uſage du gnomon, la longueur de l'année, la préceſſion des Équinoxes, la diviſion du Zodiaque en vingt-ſept conſtellations, & le calcul des Éclipſes du Soleil & de la Lune : nous allons examiner ſucceſſivement tous ces points.

Le gnomon eſt ſans doute le plus ancien inſtrument d'Aſtronomie; il eſt tout naturel que les premiers qui ont travaillé à l'Aſtronomie ſolaire, & à régler par conſéquent la longueur de l'année, ſe ſoient ſervis des ombres méridiennes des corps, dont les variations ſont en effet le ſigne le plus frappant du mouvement du Soleil en déclinaiſon.

Il paroît, par un paſſage d'Hérodote, que les Chaldéens faiſoient uſage de cet inſtrument, mais il ne dit point de quelle façon ils s'en ſervoient; la manière dont les Brames l'emploient peut ſervir à réparer cette omiſſion, car il eſt très-probable qu'ils ont tiré leurs connoiſſances aſtronomiques des anciens Bracmanes, qui les tenoient certainement des Chaldéens.

Les Brames ſe ſervent du gnomon pour tracer la ligne Méridienne, lorſqu'il s'agit d'orienter une pagode, car ces eſpèces de temples doivent, ſuivant leur religion, l'être

régulièrement, & M. le Gentil s'eſt aſſuré qu'ils l'étoient effectivement.

Le ſecond uſage qu'ils font du gnomon eſt la recherche du plus ou moins de longueur des jours, comparés à celui de l'Équinoxe : on conçoit aiſément que la longueur de l'ombre équinoxiale à midi, eſt la tangente de la diſtance de l'Équateur au zénit, ou, ce qui revient au même, de la hauteur du pôle, & que cette hauteur une fois connue, fournit les élémens néceſſaires pour avoir la longueur des jours à l'entrée du Soleil dans chaque ſigne, ou même à tel point de chaque ſigne qu'on voudra le ſuppoſer.

Cette manière de déterminer la latitude eſt, comme on voit, aſſez groſſière; cependant M. le Gentil deſireroit que les Brames euſſent fait beaucoup de ces obſervations, il eſt certain que l'extrême difficulté de diſcerner le terme de l'ombre les rend incertaines, mais l'erreur qu'elle occaſionne eſt toujours à peu-près la même, & les différences de latitude obtenues par ce moyen, peuvent être regardées comme exactes; en ſorte qu'une ſeule latitude étant bien obſervée, il eſt facile d'en déduire celles de toutes les autres, avec une préciſion aſſez approchée pour la Géographie; au moins cette méthode eſt-elle plus exacte que celle qu'on fait par l'eſtime des routes parcourues. Comment en effet, compter ſur des routes faites par des Voyageurs, qui ſouvent dorment dans leur palanquin, & dont les porteurs vont d'un pas très-inégal, & s'arrêtent de temps en temps, plus ou moins long-temps pour ſe repoſer; auſſi M. le Gentil ne fait aucun cas des Cartes de l'intérieur du pays, toutes faites de cette manière, & il a recueilli, avec ſoin, toutes les obſervations des ombres équinoxiales qu'il a pu avoir pour déterminer la poſition de quelques villes, ſur laquelle il croit pouvoir compter; au reſte, cette défectuoſité dans les Cartes n'a lieu que pour l'intérieur de la preſqu'île; les côtes ſont très-bien repréſentées dans les Cartes marines, & ſur-tout dans celles du Neptune oriental, publiées par M. Daprès de Mannevillette.

La durée de l'année ſolaire, dont ſe ſervent les Indiens Tamoults

Tamoults eſt, ſelon eux, de $365^j\ 15^h\ 31'\ 15''$, mais il y a ici deux obſervations à faire; la première, qu'ils comptent leurs jours aſtronomiques d'un lever du Soleil à l'autre lever, ce qui, dans de plus grandes latitudes, pourroit les rendre inégaux, mais ne produit chez eux preſque aucune erreur, à cauſe de la proximité où ils ſont de l'Équateur; 2.° qu'ils ne partagent pas comme nous cet intervalle en vingt-quatre parties, leurs heures ſont au nombre de ſoixante; ils partagent enſuite chaque heure en $60'$, chaque minute en $60''$, en ſorte que les $15^h\ 31'\ 15''$ doivent ſe réduire, ſuivant notre façon de compter, à $6^h\ 12'\ 30''$; mais il faut obſerver que l'année des Brames eſt *ſydérale*, c'eſt-à-dire, comptée depuis la jonction du Soleil à une étoile, juſqu'à ſon retour à la même étoile; & comme, ſelon eux, le mouvement des étoiles, ſuivant la ſuite des ſignes, eſt de $54''$ par an, il faut encore ôter $21'36''$ pour la partie du cours du Soleil qui répond à cet eſpace, pour avoir l'année tropique ou meſurée par le retour du Soleil à un des points équinoxiaux, ce qui la donne de $365^j\ 5^h\ 50'\ 54''$, de deux minutes ſeulement plus grande que celle que les Aſtronomes admettent aujourd'hui, mais plus petite d'environ $4'\frac{1}{2}$ minutes que celle d'Hipparque, adoptée par Ptolémée; les anciens Brames connoiſſoient donc la longueur de l'année ſolaire, beaucoup mieux que ces deux célèbres Aſtronomes.

Ils partagent, comme nous, l'eſpace annuel en douze mois, dont le premier répond à notre mois d'Avril.

Ces mois ſont inégaux comme les nôtres, mais ils le ſont bien plus ſingulièrement; les nôtres ſont toujours compoſés de jours entiers, les leurs contiennent des jours, des heures & des minutes, & il paroît que ces diviſions inégales répondent au temps que le Soleil met à parcourir chaque ſigne; ceux qui ont établi cette diviſion avoient donc connoiſſance de l'inégalité du mouvement du Soleil, & ne ſe bornoient pas à celle des périodes; leur ſemaine eſt, comme la nôtre, de ſept jours: chacun de ces ſept jours porte le

nom d'une planète, & cela précisément dans le même ordre que les nôtres.

Jusqu'ici M. le Gentil n'avoit eu à rechercher les vérités astronomiques, que sous la forme bizarre & obscure que les Astronomes Indiens donnent à leur calcul : nous allons maintenant le voir occupé à les démêler dans l'amas de fables dont il a plu aux Brames d'envelopper, ou plutôt de défigurer leur chronologie.

Le monde, selon eux, doit durer 4 millions 320 mille ans, desquels il y avoit déjà 3 millions 887 mille 870 ans d'écoulés en 1762.

Ils partagent, comme les Grecs & les Latins, la durée du monde en quatre âges, dont le premier a commencé à la création, & a duré 1 million 728 mille ans : ils le nomment l'*âge d'innocence.*

Le second a duré un quart moins que le premier; c'est-à-dire 1 million 296 mille ans.

Le troisième a duré un tiers de moins que le second; c'est-à-dire 864 mille ans.

Le quatrième, dans lequel nous vivons, ne doit durer que la moitié du troisième, c'est-à-dire 432 mille ans, desquels il y en avoit en 1762, 4 mille 863 ans d'écoulés; ils le nomment *âge d'infortune*, ou en leur langue *calyougam.*

Il ne faut que jeter les yeux sur de telles assertions, pour en reconnoître le ridicule & la fausseté, mais il a fallu que M. le Gentil employât toute sa sagacité & toute la connoissance qu'il avoit des anciennes périodes astronomiques, pour découvrir ce qui avoit pu donner lieu à un calcul fondé sur des faits manifestement fabuleux, & qui cependant servoit en quelque sorte de base à leur calcul astronomique : voici le fil très-delié qu'il employa pour sortir de ce labyrinthe.

Il se ressouvint que les Brames connoissoient, dans les Étoiles, un mouvement en longitude de 54 secondes par an; il soupçonna que tous ces âges prétendus du monde pouvoient bien n'être qu'un certain nombre de révolutions de l'Équinoxe;

& en effet, il trouva que tous ces nombres étoient divisibles par 24 mille, qui, en supposant la précession de 54 secondes par an, fait une révolution entière de l'Équinoxe; d'où il suit que ces âges ne sont que des périodes astronomiques, qu'on peut faire remonter aussi loin qu'on voudra, & qui n'ont aucun rapport, ni à l'époque de la création, ni à la durée future de l'Univers.

Outre les périodes dont nous venons de parler, les Brames en ont encore deux autres qui dérivent vraisemblablement de la même source, puisqu'elles sont elles-mêmes des diviseurs exacts de la grande période de 24 mille ans; la première est de soixante ans, l'autre de 3 mille 600 ans; la première leur sert à marquer les faits les plus mémorables, ou les époques de leur histoire; mais il ne faut pas s'imaginer, qu'avec le secours même de ces périodes qui devroient y jeter tant de certitude, elle en soit moins embrouillée; l'ignorance toujours mystérieuse, & l'envie de se réserver à eux seuls la connoissance de tout ce qui peut avoir trait à l'Astronomie, les a engagés à donner à leurs nombres des dénominations & des origines si peu relatives à leur objet, qu'il a fallu que M. le Gentil usât de toutes ses connoissances pour reconnoître leur véritable source & leur véritable usage; il est vrai qu'ils en sont punis par la longueur que ces formes bizarres jettent dans leur calcul, qu'il fait voir être, dans certains cas, cinq ou six fois plus long qu'il ne seroit sans cela; mais ils ont aussi l'avantage de ne laisser pénétrer leurs mystères à personne, peut-être ne les pénètrent-ils pas trop eux-mêmes; car quoique leur Astronomie soit très-bonne en elle-même, les Brames, qui n'en ont qu'une pratique aveugle & bornée à un petit nombre de cas, sont assez passablement ignorans, & n'en imposent au peuple que par ce faux air de mystère qu'ils savent jeter sur leurs opérations. Revenons à nos périodes & à leur véritable origine.

Les Étoiles avancent annuellement, selon les Brames, de 54 secondes, elles avancent donc en soixante ans, de 54 minutes, & en 3 mille 600 ans, de 54 degrés; c'est-là le

principe de toutes leurs périodes, la première année forme le premier cycle, le second est soixante fois plus long, & le troisième soixante fois plus long que le second.

Il y a même bien de l'apparence que le cycle ou grande année de 600 ans, cité par l'historien Josephe, & si bien accueilli par Jean-Dominique Cassini, est encore une suite de la période de 24 mille ans, produite par la précession annuelle de 54 secondes, puisqu'elle la divise exactement & sans fraction : on peut dire la même chose des périodes Chaldaïques de 600 & de 3 mille 600 ans, rapportées par Bérose, elles paroissent essentiellement les mêmes que celles des Indiens, du moins si on en retranche les absurdités ajoutées par les Brames, touchant l'ancienneté & la durée du monde, & celle de leur dieu Brama, qui ne méritent que d'être mis au rang des fables les moins pourvues de vraisemblance.

Mettant à part toutes ces rêveries, il résulte cependant de l'examen de M. le Gentil, que du temps de *Salivaganam*, c'est-à-dire, au premier siècle de l'ère chrétienne, la période de soixante ans étoit en usage chez les Brames & les Philosophes de l'Inde ; qu'elle n'y étoit point alors regardée comme une nouveauté, & que, comme elle dérive de la grande période de 24 mille ans, fondée sur la précession annuelle de l'équinoxe de 54 secondes, il est clair que les sages Indiens connoissoient cette précession, lorsqu'Hipparque ne faisoit que la soupçonner ; ils la connoissoient même plus exactement que Ptolémée qui la faisoit, on ne sait pourquoi, d'un degré en cent ans ; les 54 secondes des Brames la donnent d'un degré en soixante-sept ans, & nos plus exactes observations la déterminent d'un degré en soixante-dix ans.

Il y a donc une grande apparence que ces connoissances astronomiques avoient pris naissance dans un pays plus au Nord de l'Asie ; car il faut avouer que l'extrême chaleur du climat de l'Inde, ne permet guère aux habitans cette application suivie qu'exigent les recherches Mathématiques ; qu'elles s'étoient ensuite répandues de proche en proche chez

les Chaldéens & chez les anciens Bracmanes; que ceux-ci aussi mystérieux que les Brames, qui se disent en descendre, avoient gardé pour eux-mêmes ces résultats, fruits, comme on voit, d'un long travail qu'ils n'avoient pas fait, & que Hipparque & Ptolémée n'en sont pas moins inventeurs, pour avoir déterminé depuis, ce que les Bracmanes avoient si bien tenu caché.

Il résulte encore, qu'en accordant à ces anciens Asiatiques un degré de confiance, que le peu de leurs connoissances, que les Brames en ont transmis, semble mériter, il est très-vraisemblable, que la durée de l'année solaire est aujourd'hui un peu plus courte, & la précession des équinoxes un peu plus lente, qu'elles n'étoient de leur temps; il semble même que les Brames s'en soient aperçus, car dans leur calcul des Éclipses, dès qu'ils ont obtenu ce qui répond à la longitude moyenne du Soleil & de la Lune, ils ôtent de ces nombres une quantité constante; il est très-vraisemblable que les Éclipses, seules observations qu'ils fassent, parce qu'un motif de religion les y force, leur auront fait remarquer que leurs calculs ne cadroient plus avec les observations, & qu'ils n'ont pas trouvé d'autre moyen d'y remédier, que cette soustraction, qui est pour eux une vraie équation empyrique, dont ils ignorent entièrement la cause & la raison.

Telles sont les connoissances astronomiques des Brames dans cette partie qui concerne les révolutions des corps célestes. Voyons présentement jusqu'où ils les ont portées dans la connoissance des Étoiles & des Constellations.

Ils connoissent, comme nous, le Zodiaque qu'ils nomment en leur langue, *Sodi mandalam* ou *Cercle des astres*, ils le divisent, comme nous, en douze parties, qui reviennent à nos signes; & ce Zodiaque, dont la division semble remonter à une très-grande antiquité, paroît avoir un grand rapport avec le Zodiaque Egyptien, du moins quant aux signes, car les Constellations ne sont pas toujours formées des mêmes Étoiles, il n'y a, quant aux noms, de différence bien marquée,

que dans le Capricorne, qui est représenté dans le Zodiaque Indien, par une espèce de poisson.

La connoissance qu'ils ont de la précession de l'équinoxe, leur fait admettre, comme à nous, deux Zodiaques, l'un fixe & purement intellectuel, & l'autre composé des Constellations, & qui avance tous les ans vers l'orient de 54 secondes; mais les Astronomes Européens & les Brames ne sont d'accord que jusque-là; nous comptons les mouvemens célestes, à partir du premier point du Zodiaque fixe & intellectuel, & ils les comptent du premier point du Zodiaque mobile ou étoilé, ce qui exige, comme on voit, une opération de plus pour connoître le lieu de ce premier point dans le ciel.

Quoique ce calcul soit extrêmement simple, & n'exige que deux ou trois opérations d'Arithmétique très-faciles; les Brames, suivant leur coutume, l'ont si bien embrouillé, que pour le faire à leur manière, on est obligé d'employer onze ou douze opérations, & de se donner beaucoup de peine pour en trouver le rapport aux mouvemens célestes.

Outre la division du Zodiaque en douze signes, les Brames le partagent encore en vingt-sept parties, qu'ils nomment *Constellations* ou *lieux de la Lune*, comptés dans les douze signes; il semble que les premiers Auteurs de cette division aient eu en vue d'en introduire deux, l'une qui représentât le mouvement du Soleil pendant un mois, & l'autre qui répondît à celui de la Lune pendant un jour; le mouvement de cette dernière étant beaucoup plus prompt que celui du Soleil, il est assez naturel de croire qu'il a aussi été remarqué le premier, qu'on aura cherché à déterminer les Étoiles auxquelles elle paroissoit répondre chaque jour, & que la voyant, au bout de vingt-sept jours, reparoître aux environs des mêmes Étoiles, ils auront classé ces Étoiles en Constellations pour les reconnoître & pour s'en souvenir.

Ces Constellations ne sont désignées, dans le Catalogue qu'a rapporté M. le Gentil, que par le nombre des Étoiles qu'elles contiennent, & ce qui est assez singulier, c'est qu'elles ne contiennent pas, à beaucoup près, toutes celles que nous

connoissons dans le Zodiaque, & en contiennent beaucoup d'autres qui n'y sont pas comprises.

M. le Gentil penche à croire que les inventeurs de ce Zodiaque, qui a précédé certainement de beaucoup celui qui a été divisé en douze signes, étant dépourvus d'instrumens, ne comparoient la Lune aux Étoiles, que par le moyen des alignemens; ce sentiment même se trouve appuyé par l'espèce de planisphère qu'a rapporté M. le Gentil, dans lequel toutes les Étoiles se trouvent liées entr'elles par des lignes qui pouvoient faciliter cette opération; cela supposé, lorsqu'ils ne trouvoient dans le Zodiaque que de petites Étoiles, ils en alloient chercher plus loin qui fussent plus brillantes; ce qui fait qu'on ne trouve dans ce Zodiaque aucune des Étoiles des Poissons, & peut-être aussi peu de celles du Cancer, qui sont suppléées par celles de l'Aigle, du Dauphin, de Pégase & d'Andromède.

Ce Zodiaque est vraisemblablement, comme nous l'avons dit, beaucoup plus ancien que le Zodiaque Égyptien; le Bélier du Zodiaque Indien, est non-seulement composé des trois Étoiles de la tête du Bélier, mais il comprend encore celles de la Mouche, deux du Triangle, & le pied austral d'Andromède; or, ces trois Constellations sont visiblement très-modernes, relativement à ce Zodiaque, & il y a bien de l'apparence que les anciens Astronomes ne les avoient insérées dans le premier signe de leur Zodiaque, que parce que du temps de sa rédaction, ces Étoiles se trouvoient, selon la remarque de M. le Gentil, avoir à peu-près la même ascension droite que la première Étoile du Bélier & les points équinoxiaux : nous disons la même ascension droite, car dans ces premiers temps de l'Astronomie, on ne la distinguoit pas trop de la longitude, & on ne faisoit guère attention qu'au mouvement diurne ou en ascension droite.

Lorsque les Sciences passèrent de l'orient de l'Asie dans l'Occident, les Astronomes mieux instruits par plusieurs siècles d'observations, réformèrent ce Zodiaque qu'ils avoient reçu des Orientaux, & en retranchèrent les Étoiles qui

s'éloignoient trop du cours des Planètes; ces Étoiles demeurèrent ſans être claſſées juſqu'au temps des Grecs qui s'en emparèrent, pour ainſi dire, dans la vue d'y faire lire à la poſtérité l'hiſtoire de leurs principaux héros; auſſi voyons-nous qu'à l'exception d'un petit nombre de Conſtellations, dont la dénomination eſt aſſez moderne pour n'être ignorée de perſonne, comme Antinoüs, la chevelure de Bérénice, &c. toutes les autres ſont abſolument relatives à l'Hiſtoire ou à la Mythologie Grecque, & ne paroiſſent pas même remonter au-delà de l'expédition des Argonautes.

Nous ne pouvons quitter cet article, ſans faire obſerver combien il eſt ſurprenant que ces anciens Aſtronomes aient pu, ſans inſtrumens, & avec des obſervations vraiſemblablement aſſez groſſières, obtenir le degré de préciſion que nous admirons dans les Élémens que les Brames nous ont conſervés; c'eſt encore une preuve de l'ancienneté de cette première Aſtronomie, puiſqu'il faut que le grand intervalle écoulé entre les obſervations comparées, ait ſuppléé au défaut des inſtrumens qui contribuent tant aujourd'hui à la juſteſſe & à la préciſion des nôtres.

L'Aſtronomie des Brames a pour but principal, le calcul des Éclipſes; la prédiction de ces phénomènes, qui tiennent à la religion du pays, eſt un des moyens dont ils ſe ſervent pour s'attirer la confiance & le reſpect des peuples.

Les Brames de la côte de Coromandel où étoit M. le Gentil, ſe ſervent, pour le calcul des Éclipſes, d'une méthode qu'ils nomment en leur langue *vaquiam,* c'eſt-à-dire nouvelle; ceux du Bengale en emploient une autre qu'ils nomment *ſittandum,* c'eſt-à-dire ancienne. M. le Gentil n'a pu ſe procurer aucune connoiſſance de cette dernière; ainſi nous ne parlerons que de la nouvelle qui eſt ſeule en uſage ſur la côte de Coromandel.

Les Brames ont, comme nous, une partie du calcul des Éclipſes commune aux Éclipſes de Lune & de Soleil, & qui ſert, pour ainſi dire, de préparation aux unes & aux autres.

Les temps pour leſquels ils calculent ſont toujours complets, & ils

& ils recherchent le lieu du Soleil ou de la Lune pour la fin de la journée complète, ou pour le lever du Soleil du jour suivant, parce que leur jour ne commence ni à midi ni à minuit, mais au lever du Soleil.

L'époque depuis laquelle ils comptent leurs moyens mouvemens, est celle du commencement du quatrième âge ou du *calyougam;* ce commencement prétendu remonte 3 mille 102 ans au-delà de l'Ère chrétienne, il est donc facile d'y réduire nos années, en y ajoutant cette quantité constante de 3 mille 102 ans; & pour savoir quel rang tient l'année proposée dans la période de soixante ans, on divise cette somme par 60, & sans avoir égard au quotient, le reste indique l'année complète de la période qui précède celle pour laquelle on calcule.

En multipliant ce nombre par la durée de l'année solaire que nous avons dit être de $365^j\ 15^h\ 31'\ 15''$, on aura le nombre des jours écoulés depuis le commencement du *calyougam*, on en ôtera $2^j\ 8^h\ 51'\ 15''$, parce que cet âge avoit commencé le second jour de la semaine à cette heure, & divisant le surplus par 7, le reste de la division indiquera le jour de la semaine; M. le Gentil donne un exemple de l'application de toutes ces règles, au calcul de l'Éclipse totale de Lune, du 23 Décembre 1768.

Cette première opération faite, ils travaillent à rechercher l'âge de la Lune.

Pour cela, il faut commencer par trouver à quel point du Zodiaque étoilé, doit répondre le Soleil dans le temps donné; l'année astronomique des Brames commence à l'entrée du Soleil dans la constellation du Bélier, ou au 1.er Avril, car dans leur façon de diviser le Zodiaque & l'année, les signes ont la même valeur que les mois; les degrés, la même que les jours; les heures, la même que les minutes : d'où il suit que si l'on ôte du temps trouvé depuis l'époque, le temps écoulé jusqu'au 1.er Avril, le reste deviendra la longitude moyenne du Soleil, en changeant seulement la dénomination des mois en signes, celle des jours en degrés, celle des heures en minutes, &c.

ils appliquent ensuite à cette longitude moyenne, une équation calculée pour chaque mois, de huit jours en huit jours, & ils obtiennent le vrai lieu du Soleil, & son mouvement diurne pour le temps proposé.

Le lieu de la Lune est extrêmement facile à trouver, ils se servent pour cela de quatre périodes, au moyen desquelles ils trouvent des jours semblables en valeur, à ceux du Soleil dont nous venons de parler, & qui, comme eux, se réduisent en signes, degrés, minutes & secondes, ils supposent qu'au bout de la quatrième période, qui est de 248 jours, la Lune revient au même point du ciel; les périodes servent à diviser successivement le temps écoulé depuis l'époque : on multiplie ensuite les quatre quotients qu'on a obtenus par quatre autres périodes, les produits qui en résultent, joints à ce qu'on trouve dans une Table du mouvement journalier de la Lune, dans la période de 248 jours, & qui répond au reste de la quatrième division, donnera le lieu de la Lune.

Ce lieu a encore besoin de deux corrections, l'une qui dépend du mouvement journalier de la Lune dans les différens points de la période, & l'autre qui paroît être produite par la différence du Méridien du lieu & de celui de *Tirvalour* pour lequel les Tables ont probablement été faites. Le lieu de la Lune étant alors connu, on en ôte celui du Soleil, & ce qui se trouve au-delà de six signes étant connu, on le réduit en parties du mouvement diurne de la Lune au Soleil, & on a, au moyen d'une règle de trois, qu'ils font probablement, sans le savoir, l'instant de l'opposition; & pour en être plus sûrs, ils recommencent, pour ce moment, le calcul des lieux du Soleil & de la Lune, pour voir s'ils se trouvent réellement distans de six signes.

Le lieu de la Lune, celui du Soleil, & l'instant de l'opposition étant trouvée, il faut avoir la latitude de la Lune, & pour cela le lieu du nœud ascendant.

Ce nœud ascendant de la Lune se nomme en leur langue, *Ragon-stoutham* ou *lieu de Ragon*, car c'est le nom qu'ils donnent à ce serpent qu'ils disent devoir dévorer la Lune dans ses

Éclipſes; c'eſt-là vraiſemblablement l'origine de la dénomination de *Tête* & de *queue du Dragon*, qu'on a depuis donné * & qu'on donne encore dans la plupart des Traités élémentaires d'Aſtronomie aux nœuds aſcendant & deſcendant de la Lune: par quelle fatalité une abſurdité de cette eſpèce a-t-elle pu ſe conſerver juſqu'à nous au milieu des débris de tant de choſes utiles, dont nous regrettons aujourd'hui la perte?

* *Voyez Longomontan. Aſtron. Dan. édit. in-4.° de 1622, page 161.*

Les Brames trouvent le lieu de ce nœud, comme celui de la Lune, au moyen d'une période qui ramène, au bout d'un certain nombre d'années, le lieu du nœud au même point du ciel; en ôtant le lieu du nœud de celui de la Lune, ils trouvent la diſtance de la Lune à ſon nœud; & comme cette diſtance règle la quantité de l'Éclipſe, ils la nomment *Patona-chandren* ou *Lune offenſée par le ſerpent;* le complément à ſix ſignes de cette diſtance, donne l'argument de la latitude avec lequel on la trouve dans une Table calculée.

Pour avoir préſentement la grandeur de l'Éclipſe, il faut trouver les demi-diamètres de la Lune & celui de l'ombre; la recherche du demi-diamètre de la Lune tient à un principe aſſez ſingulier, ils ſuppoſent toujours ce diamètre la vingt-cinquième partie du reſte de ſon mouvement journalier, diviſé par 25, ce qui effectivement s'éloigne peu de l'hypothèſe elliptique ſimple.

Par la même raiſon, le diamètre de la Lune qui a un rapport néceſſaire avec la parallaxe, puiſque l'un & l'autre dépendent des diſtances de cet aſtre à la Terre, peut, en le multipliant par un certain nombre, donner à peu-près le diamètre de l'ombre: nous diſons à peu-près, car dans le calcul ordinaire & exact, le demi-diamètre du Soleil eſt un élément néceſſaire, & ce demi-diamètre n'eſt pas conſtant; mais les Brames n'en ſavent pas davantage, le nombre par lequel ils multiplient le diamètre de la Lune eſt 5, & le diamètre de l'ombre qu'ils obtiennent par ce moyen, & auquel ils ajoutent, comme nous, une minute pour l'augmentation que cauſe l'atmoſphère, eſt aſſez exact pour l'uſage qu'ils en font.

Le demi-diamètre de l'ombre & celui de la Lune, étant

connus, ils en font, comme nous, la somme, & en ôtent la latitude pour avoir la grandeur de l'Éclipse, qu'ils réduisent ensuite par un calcul assez simple en parties du diamètre de la Lune. Jusque-là notre calcul & le leur ne diffèrent pas essentiellement, & leur méthode n'offre rien de bien remarquable.

Mais l'article suivant dans lequel ils recherchent les instans du commencement & de la fin de l'Éclipse, présente une singularité historique que nous ne devons pas passer sous silence.

Tous ceux qui sont au fait du calcul astronòmique, savent que lorsqu'on a déterminé la latitude, le diamètre de l'ombre & l'instant du milieu de l'Éclipse, il se forme un triangle rectangle, composé de la latitude, de la somme des deux demi-diamètres de la Lune & de l'ombre, & de la partie de son orbite, comprise entre le point où est le centre de la Lune au moment de son contact avec l'ombre, & celui où il sera au milieu de l'Éclipse, & que ce dernier côté s'obtient, en résolvant le triangle, par le calcul ordinaire de la Trigonométrie.

Les Brames qui ne paroissent avoir aucune connoissance de ce calcul, s'y prennent d'une autre manière, ils carrent la somme des demi-diamètres de l'ombre de la Terre & de celui de la Lune, & la latitude, ils ôtent le carré de l'un de celui de l'autre, & tirent la racine carrée du reste qui leur donne la partie de l'orbite de la Lune, comprise entre l'attouchement de la Lune & de l'ombre.

Il ne faut pas beaucoup examiner ce calcul, pour voir qu'il est absolument fondé sur la quarante-septième proposition d'Euclide, où l'on prouve que le carré de l'hypothénuse de tout triangle rectiligne rectangle, est égal à la somme du carré des deux autres côtés; la Géométrie étoit donc cultivée chez les très-anciens Astronomes, dont les Brames tiennent leurs méthodes, & cette proposition, dont on a fait honneur à Pythagore, qui, peut-être l'avoit trouvée de son côté, étoit connue dans l'Asie, & on y en faisoit usage bien des siècles

avant ce Philoſophe. Telle eſt en général la méthode employée par les Brames pour calculer les Éclipſes de Lune : voyons préſentement comment ils s'y prennent pour calculer celles du Soleil, bien plus compliquées que celles de la Lune, à cauſe des parallaxes dont ils n'ont aucune connoiſſance.

Nous ne répéterons point ici ce que nous avons dit de leur manière de trouver les lieux du Soleil & de la Lune, & l'inſtant de l'oppoſition; ce calcul eſt abſolument le même dans les Éclipſes de Soleil & de la Lune, ſi ce n'eſt que dans les dernières, on calcule pour le moment de l'oppoſition, & dans les premières pour l'inſtant de la conjonction.

Il eſt bon, avant tout, de ſe rappeler que les Brames ne comptent pas comme nous la longitude du Soleil, en partant de l'interſection de l'Équateur & de l'Écliptique, mais du premier point de la conſtellation du Bélier; il faut donc réduire le lieu du Soleil au premier point du Zodiaque immobile, que la conſtellation du Bélier précède aujourd'hui de pluſieurs degrés, & cela d'autant plus, que leur année commence toujours à l'entrée du Soleil dans cette conſtellation, tandis que l'Équinoxe précède ce moment de dix-huit à dix-neuf jours.

Nous venons de dire que les Brames ne paroiſſoient avoir aucune connoiſſance de l'effet que produit la parallaxe de la Lune dans les Éclipſes de Soleil, ils en tiennent cependant compte ſans le ſavoir; mais avant que d'expoſer cette opération, il ne ſera peut-être pas inutile de donner une très-légère idée de la manière dont on remédie à l'effet de la parallaxe dans le calcul des Éclipſes de Soleil, lorſqu'on n'emploie pas la méthode des projections inventée par Jean-Dominique Caſſini.

Le demi-diamètre de la Terre ayant un rapport très-ſenſible avec ſa diſtance à la Lune, il en réſulte néceſſairement qu'un ſpectateur placé ſur un point de ſa ſurface, ne voit pas la Lune répondre au même point du ciel où la verroit un ſpectateur placé au centre.

C'eſt cependant pour ce ſpectateur placé au centre, que

le calcul donne le lieu de cette Planète, qu'on nomme le *vrai lieu*, & il faut le réduire au lieu apparent où la voit le ſpectateur placé à la ſurface.

Pour cela, on calcule quelle eſt la hauteur du Soleil au moment de la conjonction, & on voit de combien la parallaxe qui affecte la Lune, l'abaiſſe à cette hauteur; on décompoſe enſuite cette parallaxe, pour voir combien elle a fait varier le lieu de cette Planète en longitude & en latitude, & on a, pour ce moment, ſon lieu apparent, ou tel que le voit le ſpectateur placé ſur la ſurface de la Terre. Il eſt bon de remarquer que l'écliptique ayant toujours une moitié de ſon cercle au-deſſus de l'horizon, le 90.me degré de cette moitié, ſe trouve coupé perpendiculairement par un vertical, & que par conſéquent la parallaxe qui ne fait qu'abaiſſer la Lune, ne changera pas ſa longitude ſi elle ſe trouve dans ce degré, & la changera d'autant plus qu'elle en ſera plus éloignée. Ceci ſuppoſé, voyons comment les Brames, ſans s'en apercevoir, font entrer la parallaxe de la Lune dans le calcul.

Ils ne cherchent pas, comme nous, la poſition de ce 90.me degré de l'écliptique, mais bien celle du degré de ce même cercle, qui ſe trouve à l'horizon au moment de la conjonction, ce qui revient abſolument au même, & y comparant le lieu du Soleil à ce moment, ils obtiennent ſa diſtance à l'un ou à l'autre, au moyen de laquelle ils trouvent la différence entre le point de la conjonction, & le milieu de l'Éclipſe, ou pour parler plus juſte, la différence entre la conjonction vraie & la conjonction apparente, cauſée par la parallaxe de longitude, & ils réduiſent le lieu du Soleil & celui de la Lune à cette dernière.

La conjonction apparente étant déterminée, ils calculent, comme pour les Éclipſes de Lune, le lieu du nœud auquel ils ajoutent pour les Éclipſes de Soleil, la préceſſion de l'équinoxe, & recherchent, comme pour les Éclipſes de Lune, la latitude; mais cette latitude a beſoin d'être corrigée par la parallaxe, & ils ont un calcul particulier pour trouver cette correction, par le moyen de la différence entre l'heure du

milieu de l'Éclipſe, & celle du paſſage du Soleil au Méridien. Cette correction étant appliquée, ils obtiennent aiſément la grandeur de l'Éclipſe, par un calcul aſſez ſemblable à celui par lequel ils obtiennent celle des Éclipſes de Lune, il n'y a de différence, que la ſubſtitution du diamètre du Soleil à celui de l'ombre; le calcul du commencement & de la fin, ne diffèrent pas non plus ſenſiblement de celui par lequel ils obtiennent le commencement & la fin des Éclipſes de Lune.

Il eſt évident que par ce moyen les Brames n'obtiennent que des corrections en aſcenſion droite & en déclinaiſon, au lieu de celles en longitude & en latitude qu'il faudroit avoir, mais il ne paroiſſent avoir aucune idée de ces dernières; & c'eſt-là vraiſemblablement ce qui rend leur calcul défectueux plus que l'erreur de leurs périodes qui paroiſſent aſſez juſtes.

Celle de deux cents quarante-huit jours, ſur-tout, dont ils font uſage pour obtenir le lieu de la Lune, a ſemblé à M. le Gentil digne d'une attention particulière; il paroît qu'elle eſt abſolument fondée ſur l'hypothèſe elliptique ſimple, & que les Aſtronomes qui l'ont imaginée, ont ſuppoſé, pour plus de facilité, l'apogée de la Lune immobile, en attribuant à cette Planète le mouvement de l'apogée; par ce moyen, ſi l'on ſuppoſe, par exemple, la Lune à ſon apogée, au midi du 1.er Janvier, elle y ſera encore le 5 Septembre à midi, qui ſera le deux cents quarante-huitième jour; mais ce qui eſt ſingulièrement digne de remarque, c'eſt qu'en prenant la vingt-cinquième partie du mouvement diurne de la Lune, dans les différens points de la période, ils obtiennent aſſez préciſément le diamètre de cette planète; car quoique ce calcul ne ſoit pas abſolument exact, il eſt cependant vrai qu'il approche beaucoup de la préciſion dans le ſeul cas où l'hypothèſe elliptique ſimple peut être employée; c'eſt-à-dire, dans les ſyzygies, qui ſont les ſeuls points où les Brames le conſidèrent.

De tout ce que nous venons de dire, on eſt en droit de conclure qu'il n'y a aucune nation Orientale, ſans même en excepter les Chinois, ſi vantés par leurs anciennes connoiſ-

ſances en Aſtronomie, chez laquelle on trouve autant de veſtiges de l'antiquité de cette Science, que chez les Indiens; mais tout ſemble tendre à prouver que les Brames ne poſsèdent aujourd'hui que les débris d'une Science cultivée avec ſuccès, long-temps avant l'Ere Chrétienne. Il y a grande apparence qu'on doit attribuer à la chaleur du climat, l'indolence qui les a empêchés de faire le moindre pas en avant pour perfectionner des connoiſſances dont ils ſont dépoſitaires depuis tant de ſiècles, & qu'ils tiennent vraiſemblablement d'un peuple aſiatique plus ſeptentrional; auſſi les Indiens Tamoults aſſurent-ils que les Brames viennent originairement du Nord : la théorie de la Lune, dont ils ſe ſervent ſans la connoître, ne peut être que le fruit de méditations profondes, dont ils ne paroiſſent guère capables, elle eſt du moins infiniment plus ſavante que les règles aſtronomiques dont ſe ſervent les Siamois, que M. de la Loubère rapporta au retour de ſon voyage, & que le célèbre Jean-Dominique Caſſini a ſi ingénieuſement expliquées *.

* *Voyez anc. Mém. de l'Ac. Tome VIII.*

SUR UN

VOYAGE FAIT EN PORTUGAL ET À MADÈRE.

V. les Mém. pages 115 & 145.

NOUS avons rendu compte en 1768 * d'un Voyage fait par M. de Bory, pour déterminer la poſition des caps Finiſtère & Ortégal : nous avons à parler ici d'un autre Voyage du même Académicien, dans la double vue de déterminer la poſition de quelques points importants de la côte du Portugal & celle de Madère, & de faire l'obſervation de l'Éclipſe de Soleil du 26 Octobre 1753, qu'on ſoupçonnoit pouvoir être totale dans ces parages.

* *Voy. Hiſt. 1768, p. 104.*

Ce double but exigeoit un double appareil d'inſtrumens, puiſque l'obſervation de l'Éclipſe demandoit que les diamètres du Soleil & de la Lune fuſſent obſervés avec préciſion; dans cette

cette vue M. de Bory crut devoir joindre aux inſtrumens qu'il avoit portés dans le premier voyage, un héliomètre de la conſtruction du ſieur Canivet, adapté à une lunette de douze pieds, dont les verres étoient du ſieur Georges.

Le Vaiſſeau ſur lequel s'embarqua M. de Bory, fut la Frégate du Roi *la Comète,* & il s'y trouvoit avec M.[rs] les Chevaliers de Goimpy & de Diziers-Guyon, qui devoient participer à ſes obſervations.

Il partit de Breſt le 20 Septembre 1753, & mouilla devant Liſbonne le 3 Octobre; M. le Comte de Baſchy, Ambaſſadeur de France, informé par la Cour du projet de M. de Bory, en avoit déjà informé le Miniſtre Portugais, & les paſſeports néceſſaires auroient été expédiés dès le même jour, ſans l'abſence du Roi, qui avoit été paſſer quelques jours à *Mafra,* château bâti par le Roi Jean V, mais ils le furent peu de jours après, au retour de ce Prince, & Don Joſeph de Carvallo ſon Miniſtre, leur procura toutes les facilités poſſibles pour exécuter leur projet.

Les Officiers François partirent donc de Liſbonne le 13 Octobre pour ſe rendre à Aveiro, leur voyage ſe fit, partie en chaloupe ſur le Tage, & partie dans des chaiſes à deux, traînées par des mulets, & qui ſont les voitures ordinaires du pays; il eſt bon d'obſerver ici deux choſes, la première, que le Tage, qui, à ſon embouchure, reçoit les plus grands vaiſſeaux, ne peut, à quelques lieues au-deſſus, recevoir que des canots & des bateaux plats, parce que ſon grand volume d'eau ne lui vient que de la mer; & la ſeconde, que lorſqu'on voyage par terre en Portugal, il faut porter avec ſoi des lits, des proviſions & des uſtenſiles de cuiſine, parce qu'on ne trouve, dans les lieux où on s'arrête, que le pain & le couvert, ils arrivèrent le 19 à Aveiro.

Cette petite ville eſt ſituée dans la province de Beira, ſa poſition eſt très-agréable, elle a un port peu profond, mais ſûr, & des ſalines aſſez abondantes, qui ſont ſéparées de la haute-mer par une langue de ſable élevée, le ruiſſeau qui y paſſe peut ſe remonter en bateau cinq ou ſix lieues dans les

terres; on y trouve communément des gens qui savent assez bien parler françois; un de ces derniers nommé *Don Juan d'Eguès*, s'étoit procuré plusieurs volumes des Mémoires de cette Académie, & les avoit étudiés: espèce de phénomène, si l'on fait attention que la philosophie d'Aristote n'étoit pas encore bannie du Portugal.

Le calcul de l'Éclipse de Soleil la donnoit totale à Aveiro, & M. de Bory & ses Associés, n'avoient que le temps de se préparer à l'observation; ils commencèrent par vérifier leur instrument, dont l'erreur fut trouvée de 42 secondes dont il augmentoit les hauteurs; plusieurs hauteurs méridiennes de la Polaire, de quelques autres étoiles, & du bord supérieur du Soleil, leur donnèrent la hauteur du pôle d'Aveiro, de $40^d\ 38'\ 20''$.

Les deux jours qui précédèrent l'Éclipse, ils prirent plusieurs hauteurs correspondantes du Soleil, pour avoir la marche de leur pendule, qui se trouva retarder de 48 secondes par jour.

Le 26 Octobre, jour de l'Éclipse, arriva enfin, & il arriva accompagné d'un fort beau temps, M. de Bory & ses Associés, persuadés que l'Éclipse devoit être totale à Aveiro, s'occupèrent à mesurer, avec l'héliomètre, les diamètres du Soleil, mais cette opération qui leur devint presque inutile, parce que l'Éclipse ne fut pas totale dans cet endroit, dont la position étoit probablement mal connue, leur fit encore manquer l'observation du commencement de l'Éclipse, qui anticipa de quelques minutes l'instant marqué dans le calcul.

L'Éclipse ne fut pas absolument totale, & elle offrit aux Observateurs un phénomène singulier; dans un instant assez voisin du milieu de l'Éclipse, les cornes se trouvèrent subitement dans une direction contraire à la précédente, effet cependant très-naturel, & dont la raison se présente d'elle-même. L'obscurité fut assez grande pour laisser apercevoir Jupiter & Mars, mais pas assez pour empêcher d'écrire avec un crayon, elle avoit à peu-près l'apparence d'un beau crépuscule, qui est à la moitié de sa durée; ils n'aperçurent

aucune trace de l'atmoſphère ſolaire, ce qui reſtoit de lumière étoit apparemment encore aſſez grand pour l'effacer.

L'obſervation de cette Écliple fournit aux obſervateurs le moyen de reconnoître l'erreur des Tables & la longitude d'Aveiro; ils la comparèrent, pour cela, à celle qui avoit été faite à Paris, par M. de Thury, ſuivant la méthode indiquée par M. de la Caille *; l'erreur des Tables dans le ſens de la longitude, fut trouvée de 2′ 9″,4, & la différence de longitude géographique entre Paris & Aveiro, de 43′ 17″ d'heure, ou 10^{d} 49′ 15″, dont Aveiro eſt plus occidental que Paris.

* Voy. les Mém. 1744, page 191.

M. de Bory & ſes Aſſociés n'ayant plus rien à faire à Aveiro, en partirent dès le 30 Octobre, & prirent, pour retourner à Liſbonne, la route qui leur offroit à voir le plus de choſes intéreſſantes.

Les villes du Portugal ne renferment ordinairement point d'édifices plus remarquables que les Couvents, & ils doivent preſque tous leur fondation à quelque vœu fait dans des occaſions périlleuſes, par les Rois de Portugal. La première que M. de Bory trouva ſur ſa route, fut celle de Coimbre, ſituée ſur le fleuve Munda, autrefois le ſéjour des Rois de Portugal, avant qu'ils l'euſſent tranſporté à Liſbonne, & maintenant le ſiége de la première Univerſité du royaume; fondée par Denys, ſurnommé *le Libéral & le père de la Patrie.*

Cette ville contient le célèbre monaſtère des Religieux de Sainte-Croix, fondé par Alphonſe Henriquez, premier Roi de Portugal, pour des Chanoines réguliers de Saint-Auguſtin, unis depuis par le Pape Benoît XIV, aux Chanoines de Saint-Jean de Latran.

Ces Religieux obſervent exactement la clôture, & ne ſortent jamais; cette loi leur a été impoſée par le Père Gaſpard de Govéa leur réformateur, & Miniſtre, quoique ſans titre, du Roi Jean V.

Cette clôture devenue chez eux un point eſſentiel de leur règle, les a engagés à cultiver les Sciences, & il en eſt réſulté

un prompt avancement qui s'eſt fait ſentir de proche en proche à toute la Nation : leur Général eſt, par ſa place, Chancelier de l'Univerſité, & en 1753 il en étoit encore Recteur, par la nomination du Roi.

M. de Bory eut l'avantage d'être conduit dans tout l'intérieur de cette magnifique maiſon, par M. Magalhaëns, ou comme le prononcent les Portugais, Magellan, dernier deſcendant de celui qui a donné ſon nom au détroit du Sud de l'Amérique, alors Chanoine régulier de cette maiſon, dont il eſt ſorti en 1744, en vertu d'un Bref du Pape Benoît XIV, & qui eſt actuellement réſidant à Londres où il eſt Membre de la Société royale, & que l'Académie compte au nombre de ſes plus dignes Correſpondans.

De Coimbre, M. de Bory alla à Baralha, où les Dominicains ont un magnifique couvent; ce couvent eſt l'accompliſſement d'un vœu fait par le Roi Jean I.er; au moment de donner la bataille d'*Aljubarotta*, il promit de fonder, pour l'Ordre de Saint-Dominique, le plus beau monaſtère qui fut dans le monde, & il choiſit, après la victoire, le lieu de Baralha, qui étoit dans le voiſinage où il fit bâtir une ville à laquelle il donna, en mémoire de cet évènement, le nom de *Baralha*, & un magnifique monaſtère, dont l'égliſe paſſe pour être la plus haute qui ſoit en Portugal : on y admire encore la ſalle du Chapitre, elle eſt carrée, & a cinquante-ſix pieds de côté, & la voûte en arc de cloître ſe ſoutient ſans pilier : on aſſure que l'Architecte appelé *Mathieu Fernandès*, qui l'avoit manquée pluſieurs fois, étant enfin venu à bout de la fermer, voulut coucher pendant quatre mois ſous la clef de la voûte, pour faire voir qu'il n'en craignoit plus la chute. Cette égliſe avoit été deſtinée pour la ſépulture des Rois; mais ces Princes, en transférant leur ſiége de Coimbre à Liſbonne, ont auſſi transféré leur ſépulture de chez les Dominicains de Baralha, chez les Jéronimites de Belem, où elle eſt aujourd'hui : on y voit cependant encore à Baralha quelques-uns de leurs tombeaux, & entr'autres celui du Roi Jean II, mort en 1495.

De Baralha, M. de Bory alla visiter un autre couvent nommé *Alcobaca,* desservi par cent cinquante Bernardins, & fondé en 1135, par le Roi Alphonse Henriquez, après la victoire qu'il remporta à la célèbre bataille d'Ourraque, sur cinq Rois Maures; évènement qui fut suivi de l'érection du Portugal en royaume ; car jusqu'alors ses Souverains n'avoient porté que le titre de Comtes.

On voit dans l'église de ce couvent quelques tombeaux de Rois de Portugal, entr'autres celui de Pierre le Justicier, & un monument très-simple & sans inscription, qu'on assura les Officiers François être celui de la malheureuse Inès de Castro, maîtresse, puis femme de ce Prince, ce qui contredit formellement tous les historiens François & Portugais, qui disent tous que Don Pedre fit faire à Inès un tombeau magnifique. La route que faisoit M. de Bory le conduisoit naturellement à *Caldas,* lieu ainsi nommé à cause d'une source d'eau chaude qui s'y trouve, & sur laquelle est bâti un très-bel Hôpital, fondé en 1488, par la Reine Léonore de Portugal, femme de Jean II, rebâti en 1747, & fini en 1750, par les ordres & aux dépens du Roi Jean V.

Ces eaux sont très-renommées par la singulière propriété qu'elles ont de guérir les maladies vénériennes les plus invétérées, les paralysies, & généralement toutes les maladies qui attaquent les nerfs; elles sont assez abondantes pour que leur écoulement fasse continuellement tourner un moulin placé à deux cents pas de leur source; elles sont claires, cependant si on les fait reposer dans un réservoir, elles y déposent une boue noire & épaisse, & si on les reçoit après cela dans un autre bassin, elles y déposent un sédiment blanc, & semblable à de la chaux.

Les eaux de Caldas agissent ou intérieurement lorsqu'on les boit, ou extérieurement lorsqu'on s'y baigne; & ces bains sont de deux espèces, l'un de l'eau claire ou courante, & l'autre de la boue noire. Pour composer ces derniers bains, on prend cette dernière dans le réservoir, & on la délaie avec l'eau même de la source, on y fait entrer les malades,

& quand ils y ont resté assez de temps, ils vont se laver dans le bain clair; il s'exhale de cette eau une vapeur chaude & sulfureuse, qui noircit en peu d'instans les métaux & les galons.

De Caldas, après une journée de marche fort rude, M. de Bory & ses Collègues arrivèrent au monastère royal de Mafra.

Ce couvent a été, comme tous ceux dont nous venons de parler, établi à l'occasion d'un vœu; les Religieux de Saint-François, de la province d'Arrabida, desiroient d'avoir un hospice à Mafra, mais le Conseil de Conscience leur en refusoit la permission; un de ces Religieux sachant le desir qu'avoit Jean V de se voir des enfans, osa lui en promettre s'il fondoit à Mafra le couvent que ses Frères desiroient: ce Prince en fit le vœu, & ses desirs ayant été accomplis, il y bâtit d'abord l'hospice qui lui avoit été demandé, mais il n'en demeura pas là, & voulut y élever un monument qui surpassât l'Escurial en grandeur & en magnificence: trois cents Capucins sans barbe y sont logés aussi magnifiquement que le Monarque, qui partage ce Palais avec eux, & qui peut y loger la Reine, les Infans & toute sa Cour.

La Chapelle qui partage en deux ce vaste édifice, a été commencée en 1717, & finie en 1730; elle est de la plus grande magnificence, le marbre y est prodigué, & la beauté de l'ouvrage répond à la richesse des matériaux; le dôme, dont la légèreté surprend, a cent soixante-seize pieds de hauteur, & les clochers deux cents seize pieds; l'un deux contient un des plus beaux carillons de toute l'Europe; c'est dans cette Chapelle que sont ces belles grilles faites à Paris en 1733, par le sieur Destriches: malheureusement les ornemens & les vases sacrés ne répondent pas à la richesse de l'édifice; il semble qu'on ait voulu placer dans le bâtiment, la magnificence qui devoit être sur les Autels, & qu'on y ait substitué la pauvreté & la simplicité que la règle de Saint-François exigeoit qui fût dans le reste de l'édifice: on peut monter sur le haut de l'église, où l'on trouve des terrasses de brique, d'où l'on a la vue la plus étendue.

Le parc de Mafra eſt très-grand, & renferme une longue ſuite de montagnes, il eſt ordinairement très-abondant en gibier, mais quand M. de Bory y alla, il étoit dénué d'arbres.

De Mafra à Liſbonne il y a un très-beau chemin; le premier objet qu'on trouve ſur cette route, eſt le château de Ceintra, bâti par le Roi Emmanuel, & qui a ſervi, preſque de nos jours, de priſon à Alphonſe V après ſa dépoſition, & au haut du cap la Roque, qui joint cet édifice, un couvent de Jéronymites.

Près de Ceintra eſt un couvent de Capucins qu'on nomme *le couvent doublé de liége,* parce que ce couvent étant taillé dans le roc, on a, pour prévenir les mauvais effets de l'humidité, doublé tout l'intérieur de liége; il eſt ſingulier de voir, à quatre lieues les uns des autres, des Religieux du même Ordre, logés les uns dans un magnifique Palais, & les autres dans une eſpèce de tanière: ce contraſte ſingulier n'étoit pas échappé à M. de Bory.

Du haut du cap la Roque, on aperçoit les bois voiſins de Ceintra & de Colares; c'étoit au milieu de ces bois à *Pinhra verde,* que le célèbre Don Juan de Caſtro s'étoit retiré à ſon retour des Indes, & où ce Héros s'occupoit à défricher ſa demeure, & à y pratiquer des terraſſes, qui en ſont encore aujourd'hui l'ornement; cette montagne du cap la Roque eſt abſolument compoſée de pierres placées les unes ſur les autres ſans aucun ordre, & telles qu'elles pourroient être, ſi un volcan les eût jetées de ſon ſein.

De Ceintra à Liſbonne il n'y a plus que quatre à cinq lieues; on trouve le long du chemin pluſieurs *Quintes* ou maiſons de campagne, dont la plus belle eſt celle de M. l'abbé de Mendoça, Secrétaire d'État; entre toutes les raretés dont cette ſuperbe maiſon abonde, on admire ſur-tout une grotte abſolument compoſée de criſtal de roche & de porcelaine du Japon.

M. de Bory arriva à Liſbonne le 7 Novembre, dès le 13, lui & ſes Collègues eurent une audience du Roi, dans laquelle

ils lui rendirent compte de leur Voyage, & lui demandèrent le passeport nécessaire pour être reçus dans les îles Açores & à Madère ; ce passeport leur fut délivré le 18, par M. l'abbé de Mendoça, & ils mirent à la voile le 26 Novembre.

Dès le 4 Décembre ils eurent la vue des îles de Sainte-Marie & de Saint-Michel des Açores, le Pilote Portugais, que leur avoit donné M. l'abbé de Mendoça, s'étoit toujours fait beaucoup plus de l'avant que les Officiers François, & cependant on vit encore la terre bien plutôt qu'il ne comptoit, ce qui venoit probablement de la mauvaise position de ces îles sur les Cartes, & prouve bien la nécessité de les rectifier.

Le banc de Roches, appelé *les Fourmis*, qui se trouve entre ces deux îles, n'a pas paru plus exactement placé dans les Cartes, elles le mettent trop près de Saint-Michel, & il se trouve réellement dans le Nord-est de la pointe du même nom de l'île Sainte-Marie, il rétrécit beaucoup le canal entre les deux îles, qui, sans cela, auroit environ dix-huit lieues de large.

Jusque-là M. de Bory n'avoit pas eu à se plaindre des vents, ils cessèrent bientôt de lui être favorables, ils se rangèrent dans le Sud & le Sud-ouest, & la mer devint bientôt impraticable, il trouva cependant moyen d'aller à terre à l'aide d'un Pilote du lieu, mais il ne put y transporter aucun instrument ; & les temps devenant de jour en jour plus mauvais, & la mer plus grosse & plus dangereuse, M. de Chesac se trouva forcé de faire voile pour Madère, n'ayant pu tirer d'autre fruit de la croisière involontaire qu'il avoit faite autour de l'île de Saint-Michel, que la détermination de la position du banc des Fourmis, & d'une vigie nommée *la Baleine*, qu'il place de 35 minutes plus au Nord que ne le font les Cartes ; il seroit bien à desirer qu'on fît un voyage dans cet archipel, on pourroit en tirer de grands avantages pour la Navigation.

A mesure que nos Observateurs s'éloignoient des Açores, en tirant vers le Sud, la violence du vent diminuoit, la mer devenoit plus douce, le ciel plus serein, & l'air moins froid ;

en

en un mot, on commençoit à ressentir l'agréable température qu'on éprouve au voisinage des vents alisés; c'est probablement à ce voisinage que Madère doit en grande partie l'agrément de son climat.

M. de Bory découvrit cette île le 21 Décembre après avoir eu connoissance de celle de *Porto-santo*, qui en est peu éloignée & des trois îles appelées *Désertes*, qu'on aperçoit quand on vient à Madère, par la partie de l'Est; mais les vents ne lui permirent pas de gagner la rade de *Funchal*, capitale de l'Isle, avant le 23 Décembre.

Dès le 24, M. de Bory se rendit à Funchal, où il rejoignit M.rs de Goimpy & de Diziers qui l'avoient précédé; ils avoient présenté les ordres du Roi de Portugal, dont ils étoient chargés, à M. le Comte de Saint-Michel, Gouverneur de Madère, & avoient, de son agrément, choisi une maison propre pour les observations, située à peu-près au milieu de l'espèce de croissant que forme, en cet endroit, le rivage de la mer.

L'île de Madère a dix-sept ou dix-huit lieues de long, sur sept à huit de largeur, elle a tant de montagnes, qu'on peut dire qu'elle n'est elle-même qu'une montagne coupée d'un grand nombre de précipices; seulement du côté du midi, la pente s'adoucit & se termine en une plage au bord de la mer; c'est au bas de cette pente, & dans une plaine longue & étroite, qu'est bâtie la ville de Funchal, capitale de l'Isle: cette ville est arrosée de deux ruisseaux qui lui fournissent une eau excellente; mais dans les grandes pluies & dans les fontes de neige, ces ruisseaux deviennent des torrens qui mettroient la ville en danger, si on n'avoit pratiqué dans les rues des canaux pour conduire ces eaux sauvages à la mer; elle est entourée d'une simple muraille, mais à chaque extrémité de la plage est un fort garni d'artillerie, & elle a à l'Ouest une citadelle élevée, construite, comme le reste des fortifications, par les Espagnols.

L'île de Madère est très-peuplée, on y compte au moins sept mille habitans, elle ne pourroit pas leur fournir du blé

pour plus de trois mois; l'abondance de ſes excellens vins y ſupplée; les Anglois qui en enlèvent la plus grande partie, y laiſſent en échange du blé & des ouvrages de leurs manufactures; Madère en reçoit encore de l'île de Saint-Michel, très-fertile en cette denrée; cette dernière fournit encore à Madère une grande quantité de beſtiaux.

La rade de Funchal eſt ouverte, mais elle eſt de bonne tenue, le fond en eſt de ſable vaſart, il y a beaucoup plus d'eau dans des endroits que dans d'autres, ce qui annonce un banc fait en dos d'âne, qui va en augmentant du côté de la terre, comme du côté du large; on peut eſſuyer dans cette rade, ſans aucun riſque, les plus violens coups de vent venant de la terre, mais on doit ſe garder des vents qui viennent du large, ils rendent la mer d'une groſſeur terrible, & on doit appareiller promptement ſi on veut éviter le naufrage : on aſſure cependant que des Navires y ont bravé ces vents, & que ceux qui ont été briſés, ne l'ont été que par la faute de leurs cables ou de leurs ancres.

Le voyage à Madère n'étoit entrepris que pour y faire des obſervations qui puſſent ſervir à conſtater la poſition de cette Iſle, & toutes les reconnoiſſances que les Vaiſſeaux peuvent avoir à ſon approche.

De ce nombre étoit la variation de l'Aiguille aimantée, elle fut trouvée à bord du Vaiſſeau mouillé dans la rade, de $11^{d}\ 45'$.

Par un grand nombre de hauteurs méridiennes du Soleil & d'Étoiles, priſes avec un ſextant bien vérifié, la hauteur du pôle a été trouvée à Funchal de $32^{d}\ 37'\ 40''$.

Les obſervations qui ont ſervi à en déterminer la longitude, ſont deux immerſions du premier ſatellite de Jupiter, une du troiſième, & une occultation d'une Étoile voiſine de δ du Taureau par la Lune, leur réſultat moyen place Funchal à $1^{h}\ 16'\ 40''$ à l'occident de Paris.

Quoique ces obſervations fuſſent plus que ſuffiſantes pour déterminer la longitude de Funchal; cependant M. de Bory & ſes Collègues crurent devoir y en employer d'autres d'un

genre différent; c'est-à-dire, les observations des distances de la Lune au Soleil & à des Étoiles, & comme M. de Bory entre à ce sujet dans une discussion astronomique qui peut être d'une très-grande utilité à ceux qui seroient dans le cas d'employer cette méthode; nous avons cru que le Lecteur seroit peut-être bien aise d'en trouver ici une légère idée.

La rapidité du mouvement de la Lune qui parcourt sur son orbite environ 13 degrés par jour, est telle, qu'une différence de 2 minutes de degré dans son lieu apparent, répond à 4 minutes de temps, ou à un degré de longitude.

Sur ce principe, les Astronomes ont imaginé de déterminer le lieu de la Lune par observation pour un instant donné sous le Méridien inconnu où l'on est, & de trouver ensuite par le calcul l'instant auquel, sous un Méridien connu, elle aura dû se trouver au même point; la différence entre ces deux instans donnera celle des Méridiens.

On peut obtenir le lieu de la Lune par trois moyens; le premier est par l'heure observée de son passage par le Méridien; cette heure se détermine à terre, ou directement au moyen d'un quart-de-cercle mural placé dans le plan d'un Méridien, ou par des hauteurs correspondantes : on voit aisément que la première manière est impossible à la mer; nous en disons autant du passage de la Lune par un vertical connu, voisin du Méridien; cette méthode facile à terre, ne peut être d'aucun usage dans un Vaisseau.

Les hauteurs correspondantes ne sont pas impossibles à prendre dans un Vaisseau, mais elles exigent quelques attentions que ne demandent pas celles qu'on prend à terre; dans ce dernier cas, il suffit de les prendre vers le cercle de six heures, ou au moins le plus loin du Méridien qu'il est possible, sans tomber dans les vapeurs de l'horizon; mais à la mer, il faut quelque chose de plus, il faut les prendre lorsque la Lune est entre 5 & 15 degrés de hauteur; plus haut que 15 degrés, l'horizon de la mer seroit trop obscur & ne se distingueroit pas assez; plus bas que 15 degrés, la hauteur de la Lune seroit trop & trop inégalement affectée par la

réfraction : on doit obſerver cette même règle lorſqu'on veut déterminer le lieu de la Lune par une hauteur abſolue, à moins que l'opération ne ſe fît dans le crépuſcule ou de jour, cas où l'horizon ſeroit toujours aſſez éclairé.

Quant aux diſtances de la Lune au Soleil ou à des Étoiles connues, il eſt évident qu'après le Soleil, auquel on doit, autant qu'il eſt poſſible, comparer la Lune, on doit donner la préférence aux Étoiles Zodiacales ; mais entre celles-là même, il y a un choix à faire : on doit prendre de préférence celles qui ſont dans la perpendiculaire à la ligne des cornes ; c'eſt-à-dire, à très-peu-près dans le plan de l'orbite de la Lune, parce qu'alors on a, ſans aucun calcul, la diſtance en longitude de la Lune à l'Étoile.

Au défaut de celles-là, on prendra d'autres Étoiles, même de celles qui ſont hors du Zodiaque; mais dans ce cas il faudra prendre, le plus promptement poſſible, la diſtance de la Lune à deux Étoiles différentes : enfin, ſi l'on eſt maître du temps de l'opération, il faudra choiſir celui où le mouvement propre de la Lune ſur ſon orbite ſera le plus vif.

Les calculs néceſſaires pour déduire le lieu de la Lune de ces obſervations, ſont expliqués dans preſque tous les livres d'Aſtronomie qui ont été publiés depuis dix-huit ou vingt ans, & notamment dans l'État du Ciel de 1755, publié par M. Pingré, & dans le Diſcours qui eſt à la tête du cinquième volume des Éphémérides de M. de la Caille.

De toutes les méthodes dont nous venons de parler, la ſeule à laquelle s'arrêtèrent nos Obſervateurs, fut l'obſervation de la Lune & de quelques Étoiles au même fil d'une lunette placée dans un vertical proche du Méridien ; ils prirent, de cette manière, le paſſage de la Lune & de pluſieurs Étoiles des Hyades, dont elle étoit aſſez proche, mais ils attendent, pour faire uſage de cette obſervation, une Carte des Hyades ſur laquelle on puiſſe ſûrement compter.

Avant de finir cet article, nous devons donner une idée des obſervations que M. de Bory & ſes Collègues firent à Madère ſur les vents.

Le vent de Nord-eſt eſt celui qui règne le plus ordinairement dans l'intérieur de l'île; dès qu'il eſt décidé, voici la route qu'il tient dans la rade qui eſt à ſon Sud; au Soleil levant, le vent d'Eſt ſe fait ſentir; à midi on a la briſe de l'Oueſt; & le ſoir le calme ou le vent de terre.

Le vent de Nord-eſt amène des nuages qui, ne pouvant paſſer au-deſſus des montagnes de l'île, ni de celles des Déſertes qui ne ſont guère moins élevées, s'y arrêtent, & ces terres embrumées ſont un ſigne infaillible de beau temps.

Si au contraire la brume ſe diſſipe, on peut être aſſuré que le vent va ſouffler du Sud, mais ce dernier vent ne dure ordinairement que trois ou quatre jours, parce que le vent aliſé n'étant qu'à 4 degrés de Madère, & ſoufflant dans une direction oppoſée, l'aliment manque bientôt au vent de Sud, il ſe fait un calme, & le vent de Nord-eſt reprend juſqu'à ce qu'un orage ou quelqu'autre cauſe ramène le vent de Sud.

Les obſervations étant abſolument finies, les Obſervateurs ſe rembarquèrent le 11 Janvier, & mirent à la voile pour Liſbonne, où leurs ordres leur enjoignoient de ſe rendre. Le mauvais temps les obligea de faire le tour de l'île par l'Oueſt, & ils en profitèrent pour en relever toutes les pointes, ils la perdirent de vue le 13 au ſoir, & le 16 au coucher du Soleil, ils aperçurent le cap la Roque, à dix lieues d'eux, dans l'Eſt quart de Sud-eſt du monde. Ce cap qui eſt très-élevé, raſſemble toutes les vapeurs que le vent de Nord-eſt, très-fréquent dans ces parages, amène avec lui & il en eſt preſque toujours enveloppé, mais cette enveloppe qui ſe remarque auſſi facilement que le cap, ne l'empêche pas de ſervir de point de reconnoiſſance. M. de Bory, après l'avoir reconnu, entra dans le Tage, dont l'entrée n'eſt pas extrêmement facile. Le courant de cette rivière ſuſpendu par le flot montant, y a formé vers ſon embouchures deux bancs appelés *cachopes*, qui ne laiſſent que deux paſſes, dont celle du Sud même, qui eſt la plus fréquentée,

est assez étroite ; ils la franchirent cependant, & le 20 ils étoient mouillés à Lisbonne, sous le palais du Roi.

Lisbonne, capitale du royaume de Portugal, est comme la ville de Rome, située sur sept montagnes, & cette situation singulière, fait qu'elle présente le plus agréable spectacle à ceux qui la voyent des Vaisseaux mouillés dans le Tage, elle contient une infinité d'édifices & plusieurs belles places, la plus remarquable est celle qui porte le nom de place du Palais, & où se fait le couronnement du Monarque à son avènement au trône. On y admire encore son aquéduc, remarquable par sa longueur, qui est de plus de deux lieues, & par la hauteur & la hardiesse des arches qui le soutiennent en quelques endroits.

M. de Bory auroit bien desiré profiter de l'offre que lui avoit fait M. le comte de Baschy, de placer son observatoire portatif, sur la terrasse de son hôtel, pour faire à Lisbonne, quelques observations astronomiques; mais le peu de solidité de cette terrasse, & la violence du vent qui arrêtoit à chaque instant sa pendule, ne le lui permirent pas; il se rembarqua le 12 Février, & arriva le 21 dans la rade de Brest. Les côtes occidentales de Bretagne, sont terminées par un banc, qui permet de sonder & de trouver fond assez avant en mer, & long-temps avant qu'on puisse apercevoir les côtes. M. de Chesac, qui commandoit l'Escadre, voulut connoître l'extrémité de ce banc, & fit pour cela jeter le plomb à une assez grande distance, pour voir à quelle distance on commenceroit à trouver fond; il résulte de toutes ses observations, qu'à cinquante lieues & demie dans l'Ouest, quart du Sud-ouest, 5 degrés à l'Ouest de l'île d'Ouessant, on commence à trouver le fond à quatre-vingt-quinze brasses, ce qui fixe l'étendue du banc de ce côté, & fournit un point assuré de reconnoissance. Cette utile détermination peut être regardée comme un fruit surnuméraire du voyage des Officiers-observateurs.

SUR

L'USAGE DE L'ESPRIT-DE-VIN

dans l'Analyse des Eaux Minérales *.

LES Eaux minérales font des remèdes que la Nature offre tout préparés, & qui produiſent des effets admirables; mais pour pouvoir les adminiſtrer avec ſuccès, il faudroit ſouvent connoître de quels ingrédiens elles ſont compoſées, & c'eſt un ſecret qu'elle s'eſt réſervé; c'eſt à l'art qu'il appartient de le lui arracher, par une analyſe ſavante & exacte; il eſt ſeulement étonnant que ce ne ſoit que depuis environ cinquante ans que les Chimiſtes aient pris cette unique voie, de s'aſſurer de ce que contenoient ces eaux, & d'éclairer ainſi la Médecine ſur les différens uſages auxquels elle peut les appliquer. V. les Mém. p. 555.

Une des grandes difficultés de cette analyſe, eſt d'en ſéparer les différentes ſubſtances qu'elles contiennent, & d'en purifier les ſels qu'on en retire, qui ſont ſouvent imprégnés d'eau-mère, de matières extractives ou de parties bitumineuſes.

C'eſt donc un ſervice eſſentiel que rend M. Lavoiſier, que de donner, pour cette ſéparation, une méthode qui, à la vérité, n'a pas l'avantage d'être abſolument neuve, puiſqu'elle eſt depuis long-temps entre les mains des Chimiſtes, mais de laquelle ils n'ont ni ſenti l'importance, ni tenté de faire une application ſuivie; elle eſt fondée ſur la ſolubilité des ſels dans l'eſprit-de-vin, & M. Macquer eſt le premier qui, ayant raſſemblé le peu de connoiſſances ſur cette matière, qui ſe trouvoient dans différens Auteurs, ait entrepris de la rappeler à un examen réfléchi, & fondé ſur des expériences

* Cet article auroit dû naturellement être placé avec la Chimie à laquelle il appartient, mais le Mémoire de M. Lavoiſier n'ayant été imprimé qu'après que les premières feuilles de l'Hiſtoire ont été tirées, il n'a pu être mis que dans cet endroit.

ſuivies; c'eſt de ce travail publié dans la Collection académique de Turin, qu'eſt parti M. Lavoiſier, & il a reconnu que, quoiqu'il n'y eût qu'un certain nombre de ſels qui puiſſent ſe diſſoudre dans l'eſprit-de-vin bien déflegmé, la plupart des autres devenoient diſſolubles par ce menſtrue lorſqu'on l'affoibliſſoit avec une certaine portion d'eau, & qu'il étoit même poſſible, dans bien des cas, de proportionner tellement les doſes, que le mélange pût diſſoudre un ſel ſans en attaquer un autre : eſſayons de préſenter une légère idée de ſes expériences.

Il a fait huit différens mélanges d'eſprit-de-vin & d'eau diſtillée, tous dans des proportions différentes, & il a examiné l'action de chacun d'eux, ſoit à froid, ſoit à chaud ſur différentes eſpèces de ſels, & il eſt réſulté de cet examen :

1.° Que le ſel marin & le nitre, lorſqu'ils ſont à baſe terreuſe, ſe diſſolvent avec une grande facilité dans l'eſprit-de-vin :

2.° Que le même eſprit-de-vin ſeul ne diſſolvoit, ni le ſel marin ordinaire, ni l'alkali de la ſoude, ni le ſel marin à baſe de ſel d'Epſom, ni le ſel d'Epſom lui-même, mais qu'il enlevoit au ſel de Glauber ſon eau de criſtalliſation, & le réduiſoit en une poudre fine :

3.° Qu'une partie d'eſprit-de-vin, mêlée avec deux parties d'eau, diſſolvoit à chaud une aſſez grande quantité de ſel marin, ſans qu'il ſe fît, par le refroidiſſement, aucune criſtalliſation :

4.° Que le ſel de Glauber ne ſe diſſout jamais à froid dans tout mélange où il entre plus d'eſprit-de-vin que d'eau, mais qu'il s'en diſſout une quantité notable, quand ce mélange eſt chauffé juſqu'à bouillir, & que la totalité eſt bientôt criſtalliſée de nouveau, dès que la liqueur ſe refroidit, ſur-tout, ſi on emploie deux parties d'eſprit-de-vin contre une de ſel de Glauber :

5.° Le ſel d'Epſom, ſoumis à l'action du même diſſolvant, offre les mêmes phénomènes, ſi ce n'eſt qu'il y eſt moins ſoluble, & que ſi les deux ſels de Glauber & d'Epſom y avoient

avoient été mis enſemble, le dernier ſe criſtalliſeroit avant l'autre, & à un moindre degré de refroidiſſement.

Le temps n'a pas permis à M. Lavoiſier de ſoumettre encore aux mêmes épreuves, tous les ſels que nous connoiſſons, & il a cru d'autant plus néceſſaire de publier les Obſervations dont nous venons de parler, que les ſels qui en font le ſujet, ſont preſque les ſeuls que l'analyſe faſſe découvrir dans les Eaux minérales.

En effet, pour peu qu'on veuille ſe rappeler les principes les plus inconteſtables de la Chimie, on verra que ces eaux ne peuvent preſque contenir d'autres ſels que ceux dont nous venons de parler : eſſayons d'en donner la preuve.

Il eſt aujoud'hui preſque univerſellement reconnu par les Chimiſtes, qu'il n'y a que deux acides minéraux, le *vitriolique* & le *marin.* L'*acide nitreux* eſt regardé comme étranger au règne minéral, & ne paroît différer de l'acide marin, que par la jonction de quelques parties, ſoit animales, ſoit végétales, que la putréfaction néceſſaire à ſa formation y peut faire paſſer.

Il eſt vrai que de nos jours on a eſſayé d'introduire un autre acide minéral ſous le nom d'*acide phoſphorique;* mais malgré les raiſons ingénieuſes & plauſibles qui ont été apportées pour prouver ſon exiſtence, elle n'a pas encore le degré de certitude requis pour mettre ce nouvel acide au nombre des vrais acides minéraux; d'ailleurs, quand il en exiſteroit d'autres que les acides vitriolique & marin, les ſels qu'ils formeroient ſeroient probablement inſolubles, & ne ſe pourroient par conſéquent trouver dans les eaux minérales. Il faut donc, relativement à cet objet, s'en tenir aux deux que nous venons de nommer; & cela poſé, il n'eſt pas difficile de faire voir que le nombre des ſels charriés par les eaux minérales, ne peut être conſidérable.

Un acide ne peut former un ſel neutre, s'il n'eſt joint à une baſe métallique, calcaire, ou terreuſe, ou alkaline. Voyons donc les compoſés de cette eſpèce, qui peuvent ſe trouver dans les Eaux minérales.

Premièrement, preſque aucun des demi-métaux, n'eſt diſſoluble par l'acide vitriolique, à moins qu'il ne ſoit très-concentré & bouillant; or il ne ſe trouve jamais en cet état dans les entrailles de la terre, on ne doit donc trouver dans les eaux minérales, ni mercure, ni antimoine, ni cobalt, ni biſmuth diſſous par l'acide vitriolique. Les métaux blancs ou lunaires, c'eſt-à-dire, l'or, l'argent, le plomb & l'étain, ſont de même indiſſolubles par l'acide vitriolique; on ne trouvera donc dans les Eaux minérales, aucun vitriol d'or, d'argent, de plomb, ni d'étain. Le fer & le cuivre ſont les ſeuls qu'il puiſſe diſſoudre à froid; auſſi les vitriols qui ont pour baſe ces métaux, ſe trouvent-ils communément dans les eaux minérales; on en peut dire autant de l'acide marin, toutes les diſſolutions des mêmes ſubſtances par cet acide, ſi l'on en excepte le fer & le cuivre, ne ſe font qu'avec une extrême difficulté & par des procédés dont on peut être ſûr que la Nature n'a pas fait les frais: on ne doit donc pas eſpérer de trouver dans les Eaux minérales, aucun ſel produit par la combinaiſon des ſubſtances que nous venons de nommer, & des deux acides vitriolique & nitreux; examinons préſentement les autres ſubſtances avec leſquelles ils peuvent en s'y joignant, former des ſels neutres, diſſolubles dans ces eaux.

Le règne minéral, n'offre que trois alkalis, celui de la ſoude, l'alkali terreux ou terre calcaire, & la baſe du ſel d'Epſom, on y pourroit joindre la baſe de l'alun, ſi elle étoit plus certainement connue, & ſi on la trouvoit plus communément dans les eaux minérales, où il eſt très-rare de la rencontrer. Or de la combinaiſon des deux acides minéraux avec les trois alkalis, il ne peut ſe former que ſix ſels, ſavoir; la ſélénite, le ſel de Glauber, le ſel d'Epſom, le ſel marin, le ſel marin à baſe terreuſe, & le ſel marin à baſe de ſel d'Epſom: ce ſont auſſi les ſeuls qu'on trouve communément dans les Eaux minérales.

Pour donner un exemple de la manière dont on peut appliquer l'eſprit-de-vin à l'analyſe des Eaux minérales, il a choiſi l'eau de la mer, comme la plus compliquée de toutes

en ce genre; en effet, elle eſt le réſultat du lavage de tout le Globe, & la rinçûre pour ainſi dire, du grand Laboratoire de la Nature; elle doit donc contenir tous les ſels qui peuvent ſe rencontrer dans le genre minéral, comme elle les contient effectivement.

Dans cette vue, il prit quarante livres d'eau de mer, puiſée en temps calme, à quatre lieues au large, à la côte de Dieppe, il les fit évaporer lentement au feu de lampe, dans une capſule de verre, ayant attention d'en remettre à meſure qu'elle s'évaporoit; juſqu'à la moitié de l'opération, il ne parut ni terre, ni ſélénite, ni ſel; mais peu après il ſe forma une pellicule aiſée à reconnoître pour de la terre calcaire & de la ſélénite; en continuant l'évaporation, il commença à voir paroître quelques veſtiges de ſel marin, alors il verſa la liqueur par inclination & changea de capſule, & ayant mis à part la terre & la ſélénite, il la lava avec un peu d'eau diſtillée pour en ôter toutes les parties ſalines, il trouva qu'elle peſoit 4 gros 56 grains.

Pour ſéparer la ſélénite de la terre, il obſerva que cette dernière ſe dépoſe ſous la forme d'une pouſſière aſſez fine, qui ſe ſoutient aſſez long-temps dans la liqueur où elle nage, au lieu que la ſélénite ſe criſtalliſe en petites aiguilles qui ſe joignent & tombent aſſez promptement au fond du vaiſſeau, ſi la liqueur ne peut les diſſoudre, & c'eſt-là préciſément le cas de l'eſprit-de-vin: ſi on lave donc un mélange de terre & de ſélénite dans de l'eſprit-de-vin, & qu'ayant agité la liqueur, on la décante, ou ſi on la verſe par inclination, au bout de quelques minutes de repos, on trouvera au fond du vaſe toute la ſélénite, & la terre reſtera jointe à l'eſprit-de-vin, & ne ſe dépoſera que long-temps après; il eſt vrai qu'elle contiendra encore quelque peu de ſélénite, mais on l'en ſéparera aiſément en répétant la même opération.

La terre calcaire & la ſélénite contenues dans l'eau de mer, en étant ſéparées, M. Lavoiſier, a continué l'évaporation, & il a obtenu du ſel marin, d'abord en beaux

cristaux, mais sur la fin de l'opération, la cristallisation est devenue confuse, & ce n'est qu'avec peine qu'il a pu évaporer jusqu'à siccité. Le résidu pesoit un peu plus de douze onces; il a mis cette masse dans un matras & y a versé de bon esprit-de-vin froid, qui a pris en assez peu de temps une teinte jaunâtre assez marquée, qui n'étoit dûe qu'à la substance visqueuse, ou plutôt au sel marin à base terreuse que contenoit cette masse saline, le reste est demeuré de la plus grande blancheur, & cette masse blanche ayant séché de nouveau, ne pesoit plus que 10 onces 2 gros.

Pour examiner la nature de cette masse saline, voici comment s'y prit M. Lavoisier; nous avons dit ci-dessus que le sel de Glauber ne se dissolvoit jamais à froid dans tout mélange qui contenoit plus d'esprit-de-vin que d'eau; il a donc versé sur la masse saline un mélange de deux parties d'esprit-de-vin contre une d'eau, & l'a fait fortement chauffer; tout s'est dissout, mais lorsque le mélange s'est refroidi, le sel marin y est resté suspendu, & il s'est précipité 4 gros 26 grains d'une poudre blanche, que M. Lavoisier a reconnue pour être du sel de Glauber & du sel d'Epsom.

Pour voir si la séparation des sels étoit exacte, M. Lavoisier commença par examiner la sélénite qu'il avoit séparée, comme nous l'avons dit, & la trouva absolument pure & semblable aux sélénites connues. Quant à la poussière que nous avons dit qu'il avoit obtenue, il y versa de l'esprit-de-vin acidulé par le moyen d'une petite portion d'esprit de nitre fumant; il s'est formé par ce moyen un nitre à base terreuse, qui s'est dissout dans l'esprit-de-vin surnageant, & il est resté une portion de sélénite qui, comme on sait, n'est pas dissoluble dans ce menstrue, & qui étoit restée mêlée avec la poudre dans la première opération: il est bien sûr qu'on n'auroit pu faire la même opération avec l'eau distillée, puisque la sélénite s'y dissout, sur-tout lorsque l'eau est acidulée.

Nous avons dit que M. Lavoisier avoit dissout dans un mélange de deux parties d'esprit-de-vin & une d'eau, une masse saline, de laquelle il avoit par ce moyen séparé le sel

de Glauber & le ſel d'Epſom qui y étoient contenus, il a fait évaporer lentement le reſte de la liqueur qui ne devoit plus contenir que du ſel marin ; mais comme il s'étoit cependant aperçu qu'en verſant ſur cette diſſolution quelques gouttes de ſolution d'alkali fixe, il ſe faiſoit un précipité blanc, il a voulu rechercher la cauſe de cet effet & voir s'il tenoit à la nature du ſel marin même, ou au mélange d'un ſel à baſe terreuſe qui y étoit joint ; pour cela il a recueilli en douze portions le ſel marin à meſure que l'évaporation le faiſoit criſtalliſer ; il réſulta de cette ſéparation, 1.° que les premières portions de ſel obtenues étoient d'une ſalure agréable ; mais qu'à meſure que l'évaporation s'avançoit, le ſel devenoit âcre & amer, & que ſur la fin il ne ſe criſtalliſoit plus en cubes, mais d'une façon très-irrégulière.

2.° Qu'ayant fait diſſoudre dans douze verres, ces douze portions de ſel, & ayant verſé dans chacun quelques gouttes d'alkali fixe, il ne s'étoit preſque rien précipité des premiers numéros, mais que les derniers avoient donné des précipités abondans de terre calcaire, ce qui prouvoit que l'amertume & l'âcreté de ces portions de ſel n'étoient dûes qu'à une portion de ſel marin à baſe terreuſe, combinée avec le ſel marin criſtalliſé. Cette circonſtance même a fait obſerver à M. Lavoiſier une ſingularité bien remarquable, c'eſt que cette terre qui ſervoit de baſe au ſel n'étoit point de la terre calcaire ordinaire, & que ce ſel différoit du ſel à baſe terreuſe commun, par ſa facilité à ſe criſtalliſer, & par ſon indiſſolubilité dans l'eſprit-de-vin. Cette propriété a fourni à M. Lavoiſier le ſujet d'un travail ſuivi, dont il rendra compte dans un autre Mémoire. Le ſel qui s'étoit dépoſé en forme de pouſſière au fond du vaſe, n'étoit qu'un mélange de ſel de Glauber & de ſel d'Epſom, qui peſoit 4 gros 26 grains.

Il ne reſtoit plus à examiner que l'eſprit-de-vin qui avoit ſervi à diſſoudre les ſels à baſe terreuſe, M. Lavoiſier l'a diſtillé avec les plus grandes précautions, & il a paſſé pur, ſans huile & ſans bitume. Il n'eſt reſté au fond du vaiſſeau

qu'une eau-mère, qui a donné par l'évaporation, 1 once 5 gros & 10 grains de ſel marin à baſe terreuſe, ordinaire en criſtaux confus & bien ſecs.

Quarante livres d'eau de mer contiennent donc :

1.° 4 gros 56 grains de terre calcaire ordinaire, & de ſélénite ou ſel gypſeux.

2.° 8 onces 6 gros 32 grains de ſel marin à baſe d'alkali de ſoude.

3.° 4 gros 26 grains de ſel de Glauber & d'Epſom.

4.° 1 once de ſel marin à baſe de ſel d'Epſom.

5.° 1 once 5 gros 10 grains de ſel marin à baſe terreuſe ordinaire, mêlé de ſel marin à baſe de ſel d'Epſom, & M. Lavoiſier n'y a pas trouvé la moindre trace d'huile ni de bitume.



ÉLOGE DE M. BUACHE.

PHILIPPE BUACHE, premier Géographe du Roi, naquit à Paris le 7 Février 1700, d'honnêtes parens originaires des environs de Sainte-Ménéhould en Champagne. A peine fut-il en état de laisser apercevoir quelques inclinations, que son goût pour les beaux Arts se manifesta si clairement, que ses parens reconnurent ce présent de la Nature, & se firent un plaisir de cultiver ces heureuses dispositions. Il profita si bien de ces secours, qu'à l'âge de onze ans il étoit déjà au rang des meilleurs Dessinateurs: La fortune vint achever ce que la Nature avoit commencé. M. Pitrou, mort en 1750, Inspecteur général des Ponts & Chaussées, vint demeurer dans la maison du père de M. Buache, & bientôt les talens du jeune homme brillèrent à ses yeux; il n'hésita pas un moment à favoriser leur développement de tout son pouvoir: il lui enseigna les Mathématiques, & lui inspira le bon goût des Arts, qui ne s'enseigne point, & qui ne s'inspire même qu'à ceux à qui la Nature en a déjà donné une bonne partie. Ce secours anima tellement le jeune Buache, que malgré la foiblesse de son tempérament, tout son temps fut employé au travail, sans aucune distinction des jours & des nuits; habitude qu'il a toujours conservée jusqu'à ses dernières années: on juge aisément de la sévérité du régime nécessaire pour pouvoir soutenir cette continuité de travail.

La construction du pont de Blois, dont la conduite fut confiée à M. Pitrou, en 1716, vint priver M. Buache du secours qu'il tiroit de ses leçons & de ses conseils, il y suppléa en partie, en s'associant avec quelques jeunes gens de son âge, animés du même goût que lui pour les Sciences & pour les Arts; on a trouvé dans ses papiers plusieurs Discours datés de 1718, qui avoient été lûs dans ces conférences.

Le ſuccès en fut tel que M. Buache s'étant tourné du côté de l'Architecture, il fut, en moins de trois années en état non-ſeulement de diſputer, mais même d'emporter le premier Prix de l'Académie d'Arhitecture ; il avoit même acquis dans cette utile & brillante partie des Mathématiques, des connoiſſances ſi étendues, que quoiqu'il l'eût par la ſuite entièrement abandonnée, il a formé depuis pluſieurs Élèves qui s'y ſont diſtingués, & n'a jamais ceſſé d'être conſulté dans les cas difficiles, par les plus habiles Architectes; mais ce talent ſi précieux, qui auroit ſeul ſuffi pour lui faire une réputation, n'étoit qu'un acceſſoire de ſon mérite, & nous allons bientôt le voir totalement occupé de la Géographie, dans laquelle il a porté ſi loin ſes recherches.

Le goût de la belle antiquité qui reſpire encore dans les Monumens de l'ancienne Rome, a engagé nos Rois à y envoyer les jeunes gens qui ſe diſtinguent dans les Arts libéraux, pour y admirer ces Chefs-d'œuvre, pour s'en pénétrer, & pour s'animer, pour ainſi dire, de l'eſprit des grands Hommes qui les ont produits. M. Buache étoit dans ce cas; ſon triomphe à l'Académie d'Architecture l'appeloit à Rome & lui aplaniſſoit les chemins; & il étoit en effet ſur le point de s'y rendre, lorſque M. de l'Iſle le Géographe vint mettre obſtacle à ce voyage, l'engagea à ſe livrer tout entier à l'étude de la Géographie, & lui fournit les moyens de ſe livrer à cette étude.

Le Roi venoit d'établir à Paris le Dépôt des Plans, Cartes & Journaux de la Marine, & il avoit mis ce Dépôt ſous la direction de M. le Chevalier de Luines, Officier de la plus grande diſtinction; mais il avoit beſoin de trouver quelqu'un qui pût mettre en œuvre les matériaux qui y étoient contenus, qui ſût les comparer, & évaluer, lorſqu'ils ne ſe trouvoient pas d'accord entr'eux, le degré de confiance qu'une critique juſte & éclairée devoit accorder à chacun pour pouvoir, avec ces ſecours, conſtruire des Cartes marines, ſur l'exactitude deſquelles on pût compter. On peut juger aiſément de

de l'extrême ſagacité qu'exigeoit ce travail, & du nombre de connoiſſances qu'il demandoit dans celui qui en devoit être chargé. Cependant M. de l'Iſle, bon juge en pareille matière, n'héſita pas à préſenter à M. le Chevalier de Luynes le jeune Buache, âgé à peine de vingt-un ans, pour remplir ſes vues, & il les a remplies en effet de la manière la plus complète pendant dix-ſept ans qu'il a été attaché à ce Dépôt; il y a mis les matériaux dans le plus bel ordre, & il a fait plus de quinze cents Cartes manuſcrites, en s'aidant des conſeils de M. de l'Iſle, tant qu'il a vécu; & après ſa mort, arrivée en 1726, des collections de Mémoires trouvés dans ſes porte-feuilles, qu'il a pour ainſi dire prodigués pour enrichir ce tréſor public de toutes les Nations qui fréquentent la mer.

A la mort de M. de l'Iſle le Géographe, feu M. de l'Iſle l'Aſtronome, qui avoit paſſé dès l'année précédente en Ruſſie, voulut y attirer M. Buache, dont il connoiſſoit d'autant mieux la capacité qu'il lui avoit donné lui-même des leçons d'Aſtronomie. Il s'adreſſa pour cette négociation à M. d'Onſen-Bray, qui crut devoir faire part de ſa lettre à l'Académie. La lecture qu'il en fit produiſit l'effet qu'elle devoit naturellement produire; elle augmenta l'eſtime que l'Académie avoit déjà conçue pour M. Buache; mais celui-ci demeura inflexible, l'amour de la Patrie le retint, & quoiqu'il n'eût alors que huit cents livres d'appointemens au Dépôt de la Marine, il refuſa conſtamment les offres avantageuſes qu'on lui faiſoit pour l'engager à paſſer en Ruſſie.

Il faut cependant avouer que l'amour de la Patrie n'étoit pas le ſeul motif de ſon refus; il s'y en joignoit un ſecond trop honorable à ſa mémoire pour être paſſé ſous ſilence; ſa reconnoiſſance pour M. de l'Iſle ne lui permettoit pas d'abandonner ſa veuve & ſa fille dans le temps où elles avoient le plus grand beſoin de ſon ſecours pour mettre en ordre les papiers de ce célèbre Géographe, & pour continuer ſes travaux: perſonne ne pouvoit mieux que lui leur rendre cet important ſervice, ayant vécu avec M. de l'Iſle dans la

plus grande intimité, & ſe trouvant le dépoſitaire & le confident de tous ſes projets. Il travailla donc aſſidûment à mettre en ordre l'immenſe collection de Mémoires & de Recherches qu'avoit laiſſés M. de l'Iſle, & préſenta au Roi, de concert avec ſa veuve, pluſieurs Cartes manuſcrites, entr'autres une Mappemonde marine & une Carte de la Terre-ſainte, comparée avec celle de M. Sanſon. Il publia même quelques Cartes que la mort de M. de l'Iſle l'avoit empêché de finir, comme l'Afrique françoiſe ou le Sénégal; une Carte de l'empire d'Aſſyrie, qui eſt jointe à un Mémoire de feu M. Fréret, imprimé dans le Recueil de l'Académie Royale des Inſcriptions & Belles-Lettres, & une Carte marine du golfe du Mexique & des îles de l'Amérique, qu'il préſenta en 1730 à l'Académie, & dans laquelle il corrige pluſieurs erreurs conſidérables qui ſe trouvoient dans les meilleures Cartes; erreurs d'autant plus dangereuſes, que ces parages ſont extrêmement fréquentés par les Navigateurs françois; & pour mieux mettre l'Académie à portée de juger de ces changemens, il les lui fit voir par des contours différemment colorés ſur une même Carte.

On peut voir, dans l'Éloge de M. de l'Iſle le Géographe*, qu'en 1718 il avoit été honoré par brevet, du titre de premier Géographe du Roi, titre alors abſolument nouveau, & d'une penſion qui y avoit été attachée. Ce titre & cette penſion paſsèrent après lui à feu M. Maraldi; mais celui-ci étant mort en 1729, le titre de premier Géographe, & la penſion qui y étoit jointe, furent donnés à M. Buache, âgé pour lors à peine de vingt-neuf ans, & le Roi voulut bien ajouter à cette grâce de créer en ſa faveur dans l'Académie, une place de Géographe, qui n'y exiſtoit pas avant lui; ces deux grâces accordées en ſi peu de temps étoient une preuve ſans replique du cas que le Miniſtère & l'Académie, faiſoient de ſon mérite. On peut être au moins bien ſûr qu'il ne les avoit pas arrachées par ſes ſollicitations.

* *Voy. Hiſt. 1726, p. 83.*

Dans le temps même que le Roi & l'Académie honoroient les talens & la capacité de M. Buache, Madame de l'Iſle

s'étoit proposé de récompenser les marques d'attachement qu'il avoit données à la mémoire de son mari, & les services qu'elle en avoit reçus en cette occasion, en lui donnant en mariage sa fille unique; les lauriers Académiques décoroient les qualités de son esprit, dans le même temps que les myrthes de l'hymen couronnoient celles de son cœur.

Dans l'année qui suivit sa réception à l'Académie, M. Buache, y donna ses Recherches géographiques sur l'empire d'Alexandre, la Carte de cet empire avoit été autrefois dressée par M. de l'Isle, pour l'usage du Roi dans ses études. Digne successeur de ce célèbre Géographe, M. Buache entreprit d'en donner une espèce d'analyse, & de présenter les raisons qui avoient déterminé M. de l'Isle, à s'écarter en plusieurs points, des Cartes des plus habiles Géographes qui l'avoient précédé, & de diminuer le merveilleux des marches forcées de ce Conquérant, en rappelant les mesures de ces Géographes à leur juste valeur : on est étonné en lisant cet ouvrage, de l'adresse avec laquelle il démêle dans une infinité d'Historiens, des traces presque imperceptibles de Géographie, & de la sagacité avec laquelle il sait les combiner ensemble pour en tirer des conclusions souvent presque aussi fortes que des démonstrations.

L'amour de M. Buache, pour la Géographie, lui faisoit saisir avidement tout ce qui pouvoit contribuer à l'avancement de cette science. La découverte du cap de la Circoncision, faite en 1739, par M. de Losier-Bouvet, l'engagea à donner une Carte particulière de cette découverte, sur laquelle M. Buache, n'eut garde d'omettre les glaces flottantes, entre lesquelles cet Officier avoit passé, elles étoient pour lui un indice de grandes rivières, & par conséquent de terres considérables dans le voisinage, cette considération l'engagea même à marquer dans sa Carte, les terres de Gonneville & des Perroquets, quoique regardées comme très-incertaines, persuadé qu'en les cherchant on pourroit découvrir celles qu'il soupçonnoit. L'expédition de M. de Kerguelen, vient de justifier cette conjecture.

L'Académie a rendu compte au Public, dans ſon temps, des travaux qu'elle avoit entrepris pour connoître la véritable Figure de la Terre, & en particulier des Obſervations faites en différens lieux de la Terre, pour déterminer la longueur du Pendule à ſecondes dans tous les climats : M. Buache, imagina qu'une Carte qui comprendroit les différens lieux où ces obſervations avoient été faites, pourroit être utile, en préſentant pour ainſi dire aux yeux, la marche de cette opération, c'en fut aſſez pour le déterminer à dreſſer cette Carte qu'il publia en 1740.

L'inondation de la Seine arrivée à la fin de 1740 & au commencement de 1741, vint mettre les talens de M. Buache, à une nouvelle épreuve, il ſuivit avec l'attention la plus ſcrupuleuſe, les progrès de ce phénomène, malheureuſement trop intéreſſant, & il en rendit au commencement de 1741 un compte détaillé, accompagné d'un plan de Paris, dans lequel il marque non-ſeulement l'étendue du terrein qui avoit été couvert par les eaux, mais encore les limites de celui où l'eau avoit pénétré dans les caves ; ouvrage d'autant plus utile, qu'il peut ſervir de guide à ceux qui bâtiront déſormais dans ces quartiers, & les engager à donner à leurs édifices des fondemens qui puiſſent réſiſter à de ſemblables accidens.

L'année ſuivante, il donna une ſuite de ce travail en deux plans hydrographiques de Paris, auxquels il joignit une coupe du terrein de cette capitale, depuis l'Obſervatoire juſqu'à la porte Saint-Martin ; les plans indiquent, l'un, l'étendue de l'inondation, tant ſuperficielle que ſouterraine ; & l'autre, les différentes pentes des ruiſſeaux, qui ſervent à égoûter la ville, objet bien plus intéreſſant qu'il ne paroît au premier coup-d'œil, par la facilité qu'il donne dans les incendies, de voir à l'inſtant toute l'étendue du terrein, dont les puits peuvent fournir de l'eau à l'endroit attaqué par le feu. La coupe de Paris, du Nord au Sud, offre de même pluſieurs objets capables de piquer la curioſité, entr'autres les différentes profondeurs des puits, comparées

entr'elles, ont fait voir à M. Buache, qu'ils étoient nourris par une nappe d'eau souterraine qui descend des terres vers la rivière; que cette nappe d'eau obligée de refluer quand la rivière devient haute, augmente de proche en proche la hauteur d'eau dans les puits, qu'elle peut par ce moyen, pénétrer dans des caves, que leur élévation ou des bancs de roche mettroient à l'abri des eaux de la rivière, & que dans ce dernier cas, le retour des eaux à la rivière devenant impossible, elles ne peuvent être vidées que par le travail des hommes, ce qui rend raison du singulier phénomène de caves voisines de la rivière, qui se vidoient d'elles-mêmes après l'inondation, tandis que d'autres bien plus hautes, conservoient obstinément leurs eaux.

En 1745, M. Buache, laissa échapper une esquisse du grand travail qu'il méditoit sur la structure du Globe terrestre, & sur l'arrangement & l'usage des Montagnes, cet essai fut accompagné d'une carte de la partie de l'Océan, comprise entre les continens d'Afrique & d'Amérique, à laquelle étoit jointe une coupe de cette partie de la mer, représentant les différentes profondeurs données par les sondes des Navigateurs.

Ce système de Géographie-physique, est absolument dû à M. Buache; il avoit remarqué que les montagnes formoient par leur arrangement de vastes bassins où couloient en ruisseaux les eaux qui sortoient des montagnes; que ces ruisseaux formoient par leur jonction des rivières & des fleuves qui alloient porter leurs eaux à la mer, il osa porter ses vues plus loin & assurer que les mêmes chaînes de montagnes, se prolongeoient sous la mer, qu'elles la partageoient en différens bassins, que les îles, les bas-fonds, les roches, les vigies, &c. étoient les sommets de ces montagnes marines, que les chaînes qu'elles formoient dans la mer, arrêtoient le mouvement trop libre de ses eaux, que les gorges pratiquées entre les sommets, servoient de communication aux eaux, d'un bassin à l'autre, & devenoient la cause très-probable des courans qu'on éprouve quelquefois très-loin des côtes; en un mot, il n'est presqu'aucun phénomène de cette

eſpèce, qui ne vienne comme de lui-même, ſe ranger ſous cette ingénieuſe hypothèſe, elle fut même en quelque ſorte prophétique, & nous verrons bientôt qu'elle avoit donné lieu à M. Buache, de deviner une bonne partie de ce que les recherches faites en Ruſſie par M. de l'Iſle l'Aſtronome lui avoient appris ſur la partie ſeptentrionale de la mer du Sud & ſur la jonction de l'Amérique avec l'Aſie.

Nous avons dit dans l'Éloge de feu M. de l'Iſle, qu'en 1750, il avoit donné à l'Académie la relation des voyages faits dans le Nord de la mer Pacifique, tant par les Ruſſes que par les Eſpagnols, deſquels il réſultoit que cette mer communiquoit à la mer glaciale par un détroit d'environ quarante lieues de large, placé ſous le Cercle polaire, au milieu duquel étoit une île & qui geloit tous les hivers, en ſorte que pendant cette ſaiſon, on peut paſſer à pied ſec du Nord-oueſt de l'Amérique au Nord-eſt de l'Aſie.

Avant de préſenter cet ouvrage à l'Académie, M. de l'Iſle, l'avoit fait voir à M. Buache, celui-ci n'en fut nullement étonné. D'après ſon ſyſtème & l'Atlas ruſſe que M. le comte d'Argenſon lui avoit communiqué pendant l'abſence de M. de l'Iſle, il étoit parvenu de conjectures en conjectures à ſoupçonner la diſpoſition de cette partie du monde & à en dreſſer une eſpèce de carte, à laquelle il y eut peu de choſe à changer pour la faire cadrer avec les points déterminés par les voyages que rapportoit M. de l'Iſle.

M. Buache, revint en 1752 ſur cette matière & préſenta ſon ſyſtème ſous un plus grand jour, il fit voir dans un aſſez grand détail les chaînes de montagnes & les différens baſſins qu'elles forment ſur la terre & dans la mer. En ſuivant ſur un globe la ſuite de ces chaînes, on voit qu'elles ſervent d'une part à rendre le globe plus ſolide, qu'elles partagent les eaux de la mer en pluſieurs baſſins, qu'elles domptent leur trop grande agitation, & qu'enfin les crêtes & les plateaux des montagnes terreſtres, ſervent à recueillir les eaux douces qui doivent former les rivières; cette hypothèſe ſi conforme

à la ſaine Phyſique, a été généralement adoptée & fait une époque dans l'hiſtoire de la Géographie.

Les découvertes des Ruſſes, rapportées par M. de l'Iſle, avoient rappelé à M. Buache, ſes anciennes Recherches ſur toute cette partie du monde, il reprit le fil de ce travail, & ſe hâta d'en publier le réſultat en 1753, en un vol. in-4.° ſous le titre de *Conſidérations géographiques & phyſiques ſur les nouvelles découvertes au Nord de la grande mer, appelée vulgairement* mer du Sud, *avec les cartes qui y ſont relatives.*

Les découvertes des Ruſſes & celles de l'Amiral eſpagnol, ſont partie de cet ouvrage, mais elles n'en ſont que partie, M. Buache les avoit analyſées & les avoit comparées à une grande quantité de paſſages de différens Auteurs, que ſa vaſte lecture lui fourniſſoit avec abondance, & il en avoit ſu tirer des concluſions qui lui donnoient l'état de la partie ſeptentrionale de la mer du Sud, de ſa communication avec la mer glaciale, & des connoiſſances très-étendues ſur le Nord-oueſt de l'Amérique & le Nord-eſt de l'Aſie. On ne peut ſur-tout s'empêcher d'admirer avec quelle adreſſe il trouve moyen de concilier les contradictions qui ſe trouvent entre les récits de ceux qui ont cherché à découvrir les terres d'Yeço, & les autres Iſles qui ſont au Nord du Japon; la ſolution de cette difficulté, eſt que les uns & les autres ne parlent pas du même objet, & qu'on avoit confondu l'*Yeço gaſima* ou l'île d'Yeço, avec ce que les Japonnois nomment *oku-Yeço* ou haut-Yeço, qui n'eſt autre choſe que le Kamtchatka.

Du Nord de l'Amérique & de l'Aſie, il revient à la Californie, on doutoit avec quelque fondement, que cette péninſule fût attachée à la terre du continent, un flux venant du Nord, qu'on rencontroit en entrant dans la mer Vermeille, ſembloit indiquer un paſſage au fond de ce golfe, M. Buache, en donna l'explication, en faiſant voir par la relation d'un Voyageur qui avoit fait naufrage à la côte occidentale de la Californie, & par une Carte eſpagnole, qui eſt à la Bibliothèque du Roi, que vers le milieu de la longueur

de cette péninſule, elle ſe rétrécit tellement & que le terrein en devient ſi bas, qu'il eſt couvert à toutes les hautes marées, en ſorte que dans l'eſpace d'un jour, la partie méridionale de la Californie, eſt tantôt île & tantôt preſqu'île; preſqu'île à jamais mémorable dans les faſtes de l'Académie, par le dépôt qu'elle contient des cendres de feu M. l'abbé Chappe, qui y mourut en 1769, après y avoir fait l'obſervation du dernier paſſage de Vénus ſur le Soleil.

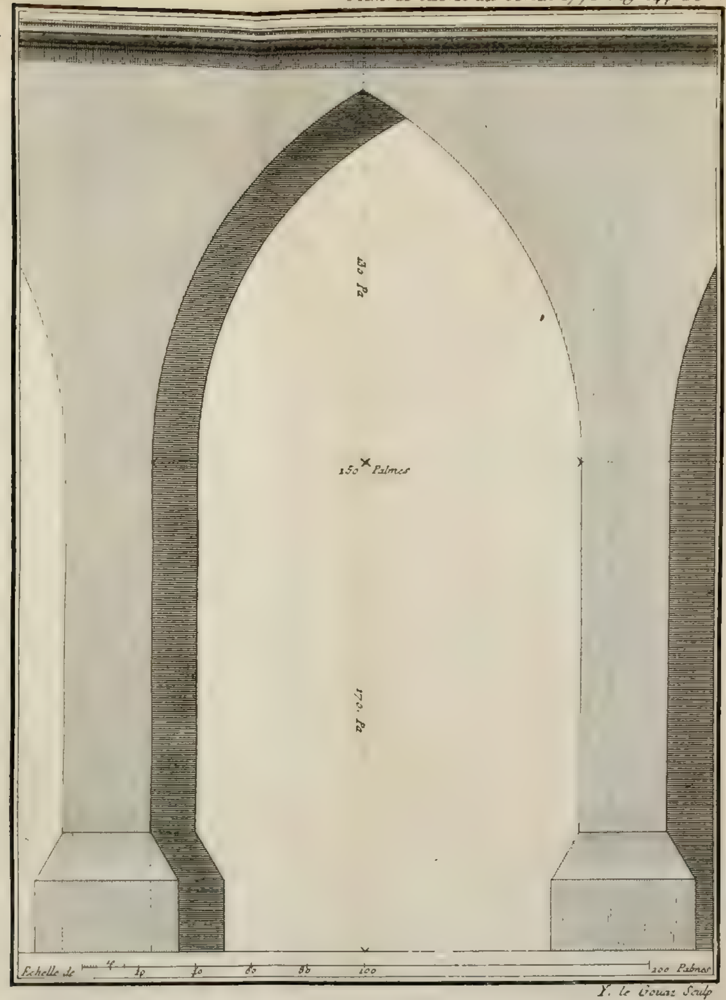
L'article de la mer de l'Oueſt, ce vaſte golfe, que toutes les relations s'accordent à placer au Nord de la Californie & du nouveau Mexique, n'y eſt pas traité avec moins de ſoin; M. Buache y rapporte toutes les conjectures qui en indiquent l'exiſtence, il les rapproche, les diſcute & en forme un corps de preuves qui ne ſemble rien laiſſer à deſirer ſur cette matière, il y joint ſes propres idées ſur la jonction de cette mer avec le Nord-oueſt de la baye d'Hudſon, & les relations de quelques traverſées qui ont été faites de la mer du Sud en Europe, ſoit par cette mer, ſoit par le détroit du Nord.

Cet ouvrage fut reçu du Public avec le plus grand applaudiſſement, & M. Buache a eu le plaiſir de voir confirmer par la ſuite pluſieurs conjectures qu'il n'avoit avancées que ſur la foi de ſon ſyſtème. Ce même ſyſtème ou plutôt ſes applications, lui fourniſſoient encore la matière de deux Mémoires qu'il lut à l'Académie en 1755 & en 1757; le premier eſt une eſpèce d'explication d'une Carte envoyée à M.rs Caſſini & Maraldi, par M. Struick, ou du moins de la partie de cette carte, qui concerne la terre des *Papous* ou *Papoas*, il y joint tout ce que les journaux des Navigateurs & les relations des Voyageurs ont donné ſur cette partie du monde; on eſt étonné de l'art avec lequel il ſait diſpoſer tous ces matériaux, pour en faire un ſyſtème géographique, qui juſqu'ici, a été confirmé par les nouvelles découvertes des Navigateurs françois & anglois qui ont parcouru ces mers; on l'eſt encore plus, en voyant dans le ſecond Mémoire, avec combien d'intelligence il ſaiſit quelques

2e. Partie

Arche de l'Aqueduc d'Aquas Libras.

Mém. de l'Ac. R. des Sc. An. 1772. Pag. 144. Pl. V.



quelques obſervations répandues dans les relations des Voyageurs, pour former à l'aide de ſon ſyſtème phyſique, un projet de Carte de toute la partie auſtrale de notre Globe & de la Mer glaciale qu'il y ſuppoſe, & pour donner à ce projet toute la vraiſemblance dont il eſt ſuſceptible. En liſant ce Mémoire, on ſe ſent porté à croire, qu'un grand nombre des conjectures qu'il contient, ſeront un jour confirmées par les découvertes qu'on fera dans cette partie du monde: l'art de combiner pouſſé à un certain point, devient une eſpèce de divination.

Non-ſeulement M. Buache avoit propoſé en général le ſyſtème des baſſins formés par les chaînes de montagnes, mais il l'avoit encore détaillé dans un Mémoire qu'il lut en 1753, ſous le titre de *Parallèle des fleuves des quatre parties du Monde*, dans lequel cependant il ne donne que ceux d'Europe, il y fait voir d'un ſeul coup-d'œil, tout le terrein qui fournit les eaux à chacun de ces fleuves, & les hauteurs qui en ſéparent les baſſins : ce travail dont il n'a pas publié la ſuite, parut ſi utile à feu M. Bignon, alors Prévôt des Marchands, qu'il crut devoir engager M. Buache, à en faire un ſemblable, mais dans un plus grand détail pour le cours de la Seine; il le communiqua en 1767 à l'Académie, & non-ſeulement il donna dans le plus grand détail le cours de ce fleuve, mais il joignit à ce travail tout ce qui pouvoit tendre à faciliter ou à multiplier les uſages de cette Carte; il en dreſſa une ſeconde, où le cours de la Seine & celui des rivières affluentes étoit redreſſé, pour pouvoir en meſurer plus facilement l'étendue; il y joignit une eſpèce de Carte, dans laquelle il avoit trouvé moyen de préſenter les plus grandes & les moindres eaux de la Seine à Paris, obſervées de mois en mois, pendant trente-cinq ans, & termina ce Mémoire par un grand nombre de vues nouvelles & intéreſſantes.

Le temps deſtiné à la lecture de cet Éloge, ne nous permet pas de parler ici de pluſieurs autres Cartes que M. Buache avoit publiées, comme la partie méridionale des côtes de Terre-neuve, avec les changemens qu'il avoit cru devoir

faire aux meilleures Cartes de cette partie du monde, une Carte de l'archevêché & de l'élection de Paris, avec un plan des environs, qui n'étoit que l'essai d'un travail semblable qu'il vouloit faire pour tout le royaume, plusieurs Cartes qu'il a dressées pour être jointes aux Mémoires de M. Guettard, dans lesquelles il marque toutes les divisions en bandes du terrein, relatives aux idées de ce célèbre Naturaliste, sur la Minéralogie; les Cartes manuscrites qu'il dressa pour M.rs les abbés de la Caille & Chappe, lors de leurs voyages; celles qu'il fit pour feu M. le comte de Caylus, & qui servent à faciliter l'intelligence des sept volumes du Recueil d'Antiquités de ce Seigneur: le mérite de tous ces ouvrages, qui suffiroit pour illustrer un Géographe ordinaire, disparoît devant la grandeur & l'étendue des recherches & des vues de M. Buache, & ne feroit, s'il m'est permis d'user de ce terme, qu'un Infiniment petit de sa gloire, si ces mêmes ouvrages n'étoient en même temps une preuve de son attachement pour l'Académie & de son zèle pour le bien public.

Ce même zèle l'engagea souvent à des travaux longs & pénibles, qui tendoient uniquement à cet objet. Les États de Languedoc voulant avoir une Carte de la province, extrêmement détaillée, en firent lever séparément tous les Diocèses; sur la réputation de M. Buache, ils le prièrent de mettre ces matériaux en œuvre, & il y consentit; mais avant que de s'en servir, il les examina soigneusement, & reconnut le peu d'exactitude d'une partie considérable de ces Cartes; voulant cependant en ménager les Auteurs, il avoit entrepris de les corriger, de concert avec eux, ce qui demandoit beaucoup de temps, & les États le pressoient: il prit le parti de publier le seul diocèse de Narbonne, avec les changemens qu'il avoit été obligé d'y faire; alors la cause de son retardement ne fut plus un mystère, & les États lui marquèrent la satisfaction qu'ils avoient de son travail, par une gratification de cinq mille livres, &, ce qui étoit bien plus de son goût, par les remercîmens les plus flatteurs.

L'établissement d'une Colonie Françoise dans la Guyane,

fournit à M. Buache l'occasion de faire plusieurs autres recherches; il rassembla toutes les connoissances qu'il put avoir sur cette partie de l'Amérique, & dressa quarante-cinq Cartes manuscrites, pour l'usage du Ministre, & pour celui de M. Turgot, Membre de cette Académie, nommé Gouverneur de cette Colonie.

Les Sciences ont presque toutes leurs énigmes : au nombre de celles de la Géographie, se trouvoit une Carte de l'étendue de l'empire Romain, depuis Constantinople jusqu'à l'Océan, & depuis les côtes d'Afrique jusqu'au Nord de la Gaule; cette Carte connue communément sous le nom de *Peutinger,* l'un de ses anciens possesseurs, avoit acquis une espèce de célébrité par sa construction singulière; les dix-huit degrés de longitude qu'elle contient, y occupent une étendue de plus de vingt pieds, tandis que ses treize degrés de latitude qui devroient en occuper quatorze, n'en occupent qu'un; aussi les pays représentés par cette Carte, sont-ils tellement défigurés, que la Méditerranée n'y paroît que comme une grosse rivière, & que les terres n'y sont pas plus reconnoissables.

La plupart des Géographes n'avoient regardé cette bizarre représentation de l'empire Romain, que comme l'ouvrage grossier de quelqu'ignorant : on sait combien ces Maîtres du Monde avoient négligé l'étude des Sciences & des Arts. Un seul Géographe Anglois, *Edmond Brutz,* lui avoit fait l'honneur de la regarder comme un de ces ouvrages de perspective, qui veulent être vus d'un point déterminé; il n'avoit cependant pas encore trouvé le mot de l'énigme, il étoit réservé à M. Buache de le donner, & il le donna en effet à l'Académie en 1761, dans un Mémoire où il fit voir que cette Carte étoit une Carte plate, construite sur deux échelles, celle des Longitudes fort grande, & celle des Latitudes beaucoup plus petite; qu'on y avoit négligé de rendre les Méridiens perpendiculaires au bas de la Carte, & que, vraisemblablement, cette singulière construction tenoit à ce que la Carte n'étant destinée qu'à servir d'itinéraire pour les Troupes, dont les Routes s'étendoient beaucoup plus de l'Est

à l'Oueſt, que du Nord au Sud : on avoit prétendu la rendre plus portative, ſans diminuer beaucoup ſon utilité. Telle fut l'explication très-vraiſemblable que donna M. Buache de ce Sphinx géographique.

Le dernier travail ſuivi de M. Buache, & qui l'occupa depuis 1756 juſqu'en 1771, eſt celui qu'il fut chargé de faire pour l'inſtitution des jeunes Princes; ce travail commença par une ſuite de Cartes propres à faciliter l'intelligence de l'Hiſtoire des premiers âges du Monde, & à faire voir la marche & la ſuite des premières populations. Ce fut à cette occaſion qu'il communiqua à l'Académie une Mappemonde manuſcrite qui devoit ſervir comme d'introduction à cette ſuite, & dans laquelle l'Amérique occupoit l'hémiſphère qu'on fait ordinairement occuper au Continent, qui contient l'Europe, l'Afrique & l'Aſie; il conſtruiſit plus de trois cents Cartes particulières, les unes entièrement terminées, & les autres ſimplement au trait, pour être remplies par les jeunes Princes, à meſure qu'ils recevroient leurs leçons de Géographie : méthode excellente pour l'étude de cette ſcience, & M. Buache en étoit ſi perſuadé, qu'il avoit réſolu de faire graver des Cartes pareilles, pour ſervir à l'inſtruction des Élèves de l'École Royale Militaire; ce fut par-là que M. Buache prit, pour ainſi dire, congé de la Géographie; ſon dernier Ouvrage fut une marque de ſon attachement pour le Roi & pour ſon auguſte Famille.

Juſqu'ici nous n'avons repréſenté M. Buache que comme Géographe, & c'étoit en effet la principale partie de ſon mérite, mais ce n'étoit pas la ſeule; ce que nous avons dit de ſes Ouvrages ſur l'inondation de la Seine, & ſes idées ſur la nappe d'eau ſouterraine qui fournit les puits, ont dû faire voir que les obſervations de Phyſique, & l'art d'en déduire les procédés de la Nature, ne lui étoient nullement étrangers : il avoit fait, ſur les tremblemens de terre, un travail très-conſidérable, qui a été remis par ſa famille à l'Académie; il étoit au fait de preſque toutes les Sciences qui ſont l'objet des occupations de cette Compagnie, & il y a été ſouvent

chargé de commiſſions très-étrangères à la Géographie ; en un mot, ſon amour pour l'Académie ne lui avoit pas permis de négliger aucun des objets qui s'y traitent, & il étoit du nombre de ceux qui prennent part à tous ſes travaux.

Plus de ſoixante années de travaux aſſidus, & l'âge auquel étoit parvenu M. Buache, ne pouvoient manquer d'abattre, à la fin, une ſanté par elle-même très-délicate, & qui ne s'étoit juſque-là ſoutenue que par le régime le plus ſévère.

Dans cet état, deux ſaignées qu'on fut obligé de lui faire en un même jour, en 1771, ébranlèrent tellement ſa machine, qu'à la ſeconde, il s'écria qu'on l'avoit tué. Il revint cependant de cette maladie, mais ſans pouvoir reprendre ſes forces, & la tête extrêmement affoiblie; ſon eſprit qui avoit autrefois oſé aſſigner les cauſes de l'arrangement des montagnes, & ſonder les abymes de la mer, étoit affaiſſé & comme anéanti ſous le débris des organes ; le corps ſeul, s'il m'eſt permis de m'exprimer ainſi, ſembloit lui ſurvivre; il végéta encore dans cet état environ dix-huit mois, & mourut preſque ſans aucune ſouffrance le 27 Janvier 1773, âgé de près de ſoixante-treize ans, dont il en avoit paſſé quarante-trois dans l'Académie.

M. Buache étoit d'une taille médiocre, & d'une figure peu avantageuſe, il étoit doux, humain, & toujours prêt à obliger dès que l'occaſion s'en préſentoit; auſſi n'a-t-il jamais compté que des amis dans tous ceux qui le connoiſſoient; l'ambition & l'amour de la gloire, qui ſavent ſouvent pénétrer juſque dans l'ame même des Sages, n'ont jamais troublé un ſeul moment la tranquillité de la ſienne ; content de remplir ſes devoirs, dans la ſeule vue de les remplir, il a mérité l'eſtime & les louanges de la poſtérité, ſans ſe les être trop propoſées pour objet. Nous avons dit au commencement de cet Éloge, qu'il avoit épouſé en 1729, la fille de M. de l'Iſle, mais l'ayant perdue peu d'années après, il épouſa en 1746, Éliſabeth-Catherine de Miremont, aujourd'hui ſa Veuve, belle-ſœur de M. Pitrou, qui avoit été ſon premier maître; la reconnoiſſance avoit formé les nœuds de ſes deux mariages,

n'en n'ayant pas eu d'enfans, il avoit pris avec lui deux jeunes gens de ses parens qui l'ont aidé pendant quinze ans dans ses travaux ; & nous croyons que le Public apprendra avec plaisir que son fonds de Cartes Géographiques, & sa belle Collection de Mémoires ont passé à l'un d'eux, M. Buache de la Neuville, bien connu de l'Académie par les Élémens de Géographie qu'il a soumis à son examen, & auxquels elle a accordé son approbation. Personne n'étoit plus en état que lui de faire un bon usage de cette précieuse Collection.

La place de premier Géographe du Roi, & celle de Géographe qu'il occupoit dans l'Académie, ont été remplies par M. d'Anville, de l'Académie Royale des Belles-Lettres, Associé-Étranger de celle de Péterſbourg, & Secrétaire ordinaire de S. A. S. Monseigneur le Duc d'Orléans.



Corrections & Addition aux Mémoires de M. de la Place, insérés dans ce Volume.

PAGE *336, ligne dernière,* au lieu de b, *lisez* (b).

Page 337, ligne première, au lieu de b_1, *lisez* (b_1).

Page 535, avant ces mots, *un avantage particulier, &c. ajoutez:* De-là naît une manière extrêmement ſimple de préſenter cette Méthode & ſon uſage dans l'Aſtronomie phyſique. Les différens Problèmes de cette branche importante des Mathématiques, conduiſent preſque toujours à des équations différentielles du ſecond ordre, dont l'intégration rigoureuſe offre des difficultés inſurmontables. On eſt donc réduit à faire uſage des méthodes d'approximation; or, il arrive ſouvent que les intégrales approchées ſont compoſées de quantités, les unes périodiques, & les autres croiſſantes proportionnellement au temps & à ſes puiſſances. Dans celles-ci, le temps eſt multiplié par un coëfficient très-petit, en ſorte que chaque variable eſt donnée par une ſuite infinie de termes, qui renferme ce produit, ſon quarré & ſes puiſſances ſupérieures. Ces ſuites peuvent être employées durant un eſpace de temps aſſez conſidérable, après lequel elles deviennent divergentes, & par conſéquent fautives; mais on doit obſerver que les termes proportionnels au temps & à ſes puiſſances, ne ſont que le développement de fonctions algébriques ou tranſcendantes que renferme l'intégrale rigoureuſe; ainſi toute la difficulté ſe réduit à déterminer ces fonctions. Pour cela, je ſuppoſe que l'intégrale commence lorſque le temps eſt égal à une conſtante quelconque arbitraire T, on aura, par les méthodes ordinaires d'approximation, l'intégrale exprimée par une ſuite infinie qui renferme les différentes puiſſances du temps t, écoulé depuis l'origine de l'intégrale. Préſentement, ſi l'on avoit l'intégrale rigoureuſe, en réduiſant les fonctions dont je viens de parler, en ſuites aſcendantes par rapport à t, il eſt clair que l'on auroit une nouvelle ſuite qui coïncideroit avec la première; or, en réduiſant en ſuites une quelconque de ces fonctions, le premier terme eſt égal à la fonction elle-même, dans laquelle on ſuppoſe le temps égal à T; & le ſecond terme eſt égal à t, multiplié par la différentielle de la fonction diviſée par ∂t, & dans laquelle on ſuppoſe enſuite le temps égal à T; or, il eſt clair que cette différence diviſée par ∂t, eſt la même choſe que la

différence du premier terme considéré comme fonction de T, & divisée par ∂T; donc, pour avoir la fonction cherchée, il faut égaler le coëfficient de t, donné par les méthodes ordinaires d'approximation, à la différence du terme constant, considéré comme fonction de T, divisée par ∂T; par exemple *(art. I des Recherches citées)*, l'intégrale approchée de l'équation $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y = \alpha y . \text{cos.} 2t$, α étant supposé fort petit, est

$$y = (p + \frac{\alpha}{4} qt).\text{sin.} t + (q + \frac{\alpha}{4} pt).\text{cos.} t$$
$$- \frac{\alpha p}{16}.\text{sin.} 3t - \frac{\alpha q}{16}.\text{cos.} 3t + \&c.$$

en regardant p & q comme fonctions de T, on aura donc les deux équations

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\alpha}{4}.q$$
$$\frac{\partial q}{\partial T} = \frac{\alpha}{4}.p;$$

d'où en intégrant on aura,

$$p = f.e^{\frac{\alpha}{4}T} + {}'f e^{-\frac{\alpha}{4}T}$$

$$q = f.e^{\frac{\alpha}{4}T} - {}'f e^{-\frac{\alpha}{4}T}$$

f_1 & $'f$ étant deux nouvelles constantes arbitraires; si l'on change dans ces valeurs de p, & de q, T ou t, on aura les fonctions dont le développement a produit dans la valeur de y, les termes proportionnels au temps; on pourra donc en effacer ces termes, pourvu qu'au lieu de p & de q, on y substitue ces nouvelles valeurs, & l'on aura

$$y = fe^{\frac{\alpha}{4}t}.[\text{sin.} t + \text{cos.} t - \frac{\alpha}{16}.\text{sin.} 3t - \frac{\alpha}{16}.\text{cos.} 3t]$$

$$+ {}'fe^{-\frac{\alpha}{4}t}.[\text{sin.} t - \text{cos.} t - \frac{\alpha}{16}.\text{sin.} 3t + \frac{\alpha}{16}.\text{cos.} 3t].$$

Page 543, ligne 21, au lieu de $\varphi'(\theta)$ & de $\varphi(\theta)$, lisez $\varphi'(\text{cos.}\theta)$ & $\varphi(\text{cos.}\theta)$.

Lû à l'Académie le 20 Novembre 1776.



MÉMOIRES



MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

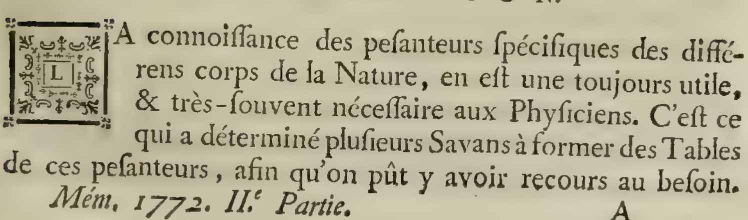
Suite de l'Année M. DCCLXXII.

SUR LA

PESANTEUR SPÉCIFIQUE DES CORPS.

Premier Mémoire.

Par M. BRISSON.



LA connoiſſance des peſanteurs ſpécifiques des différens corps de la Nature, en eſt une toujours utile, & très-ſouvent néceſſaire aux Phyſiciens. C'eſt ce qui a déterminé pluſieurs Savans à former des Tables de ces peſanteurs, afin qu'on pût y avoir recours au beſoin.

La ſcience dont je m'occupe exige cette connoiſſance plus que toute autre : j'ai donc ſouvent conſulté ces Tables, & ſurtout celle de M. Muſſchenbroek, qui eſt une des plus amples. Mais dans pluſieurs circonſtances, n'ayant pas eu des réſultats conformes aux peſanteurs indiquées par ces Tables, j'y ai ſoupçonné quelques erreurs; cela m'a engagé à les examiner plus ſcrupuleuſement: cet examen m'y a fait découvrir plus d'erreurs que je n'en avois ſoupçonné, & dès-lors j'ai ceſſé de les attribuer, comme je l'avois fait d'abord, à des fautes d'impreſſion; elles ſont trop nombreuſes pour cela. Mais connoiſſant d'ailleurs l'exactitude de M. Muſſchenbroek, cela me fait croire qu'il n'a pas travaillé ſeul à ſes Tables, & qu'il s'en eſt rapporté à d'autres ſur beaucoup d'objets, ou du moins qu'il a opéré ſur de trop petits volumes. Cette juſtice que je crois lui devoir, ne rend pas ſes Tables plus exactes: & comme j'éprouve tous les jours l'utilité dont elles peuvent être, je me ſuis déterminé à en former une, à laquelle je donnerai le plus d'exactitude & le plus d'étendue qu'il me ſera poſſible.

Il y a déja long-temps que j'ai commencé à y travailler. J'avois bien penſé que c'étoit un ouvrage de longue haleine; mais j'avoue que je ne l'avois pas cru auſſi pénible, & exigeant autant de précautions pour obtenir de l'exactitude. Ce n'eſt pas que la difficulté me rebute; au contraire, elle me donne plus d'ardeur, & me fait prendre tous les ſoins que je crois néceſſaires pour réuſſir. L'Académie jugera des précautions dont j'ai fait uſage; & ſi elle penſe que j'aie manqué à quelqu'une, je la ſupplie de m'aider de ſes conſeils, dont je profiterai avec reconnoiſſance, non-ſeulement pour ce qui me reſte à faire, mais encore pour rectifier ce que j'ai déjà fait.

Mon intention eſt de ne faire entrer dans cette Table que les matières que j'aurai éprouvées moi-même; mais toutes celles qui ſeront ſuſceptibles d'être miſes à l'épreuve, & que j'aurai pu me procurer. Toutes mes expériences ſont faites ſur les plus gros volumes poſſibles, afin que s'il s'y gliſſe quelques petites erreurs, preſqu'inévitables en pareil cas, elles ſoient

moins ſenſibles. Elles ſont auſſi toutes faites à la même température, qui eſt marquée par 14 degrés au-deſſus de la congélation du thermomètre de M. de Reaumur; & j'ai fait en ſorte que la température du lieu où j'opérois ne différât pas beaucoup de celle-ci, afin que celle dont j'avois beſoin pût demeurer plus long-temps la même. Je pèſe tous les corps hydroſtatiquement, à moins qu'ils ne ſoient ſuſceptibles de ſe diſſoudre dans l'eau, ou de s'en laiſſer pénétrer. Quand je ne puis pas les peſer ainſi, je prends les précautions que je crois convenables aux circonſtances, & que je détaillerai chacune en leur place, pour mettre tous les Phyſiciens à portée de vérifier mes épreuves, ſi bon leur ſemble.

Je me ſuis procuré deux balances hydroſtatiques très-exactes, dont les fléaux ſont ſuſpendus par leur centre de gravité, & dans leſquels les points de ſuſpenſion des baſſins ſont invariables. Le fléau de la plus grande a 16 pouces de long, & trébuche bien ſenſiblement à $\frac{1}{8}$ de grain lorſqu'elle eſt chargée. Avec cette balance je pèſe juſqu'à une livre dans chaque baſſin. Je ne me permets pas de la charger davantage, de peur de faire plier le fléau ou d'occaſionner trop de frottement à l'axe; ce qui diminueroit ſa mobilité. Le fléau de la plus petite n'a que 6 pouces & demi de long; malgré cela, il trébuche ſenſiblement à $\frac{1}{64}$ de grain. Je ne le charge jamais de plus de deux onces dans chaque baſſin; ainſi cette balance eſt deſtinée à peſer les matières qu'on ne peut ſe procurer qu'en petit volume; & la grande ſert à peſer toutes celles qu'on peut avoir en grand volume.

Pour peſer les liqueurs, je me ſers d'un aréomètre de verre, de la forme de celui de Fahrenheit; c'eſt-à-dire, dont la tige, qui eſt fort courte, eſt ſurmontée d'un petit baſſin propre à recevoir des poids étalonnés avec la plus grande exactitude. Je me ſuis aſſuré du poids exact de l'inſtrument, & en le chargeant de nouveaux poids, je le fais enfoncer toujours de la même quantité dans toutes les liqueurs; de cette manière j'opère toujours ſur des volumes égaux, & la différence du poids me donne celle des peſanteurs ſpécifiques; car l'on ſait

que la pesanteur spécifique d'un corps est le poids qu'il pèse sous un volume déterminé; & que les pesanteurs spécifiques des différens corps, comparées entr'elles, sont toujours proportionnelles aux poids que pèsent des volumes égaux de ces matières.

On courroit risque de faire faire la bascule à un aréomètre qui seroit trop chargé par le haut : par exemple, un aréomètre assez léger pour ne pas se noyer dans une liqueur peu dense, comme l'esprit-de-vin, exigeroit une très-grande addition de poids, pour s'enfoncer de la même quantité dans une liqueur très-dense, comme les acides concentrés ; ce qui feroit remonter de beaucoup son centre de gravité, & lui feroit faire la bascule. Le même instrument ne peut donc pas servir pour éprouver toutes les liqueurs ; c'est pourquoi je m'en suis procuré plusieurs, dont un me sert à éprouver, depuis l'eau inclusivement, jusqu'aux liqueurs les plus légères : un autre, qui sans addition de poids, s'enfonce dans l'eau presque jusqu'à sa tige, sert à éprouver les liqueurs plus pesantes que l'eau, excepté quelques-unes, qui, comme, par exemple, l'acide vitriolique concentré, ont une pesanteur spécifique, à peu-près double de celle de l'eau. Pour celle-ci, j'ai un troisième aréomètre, dont la tige & le centre du bassin sont percés. Moyennant cela les poids dont je le charge, passent dans sa partie inférieure, & il demeure toujours droit. Cela exige seulement une opération de plus, savoir; de repeser à chaque fois l'instrument, avec tout ce que je lui ai ajouté, pour le faire enfoncer de la quantité requise.

Cet Ouvrage est d'un si grand détail, & exige un si long temps pour l'amener à sa fin, que je n'ai pas cru devoir attendre qu'il fût achevé, pour le communiquer à l'Académie. C'est pourquoi je l'ai divisé en plusieurs articles, que je donnerai séparément; & à la fin de mon travail, de tous les résultats je formerai une table rangée par ordre alphabétique, pour fournir aux Physiciens la manière la plus commode de la consulter au besoin.

Dans le premier article, je traite des Métaux considérés

ſous tous les aſpects & de toutes les manières dont ils ſont d'uſage dans le commerce & les arts.

Le ſecond article contiendra les demi Métaux, & les autres matières métalliques qui ſont ſuſceptibles d'être miſes à l'épreuve.

Dans le troiſième article, je traiterai des Pierres précieuſes, des Criſtaux & des différentes eſpèces de Verre.

Dans le quatrième, je ferai entrer les Agates, les Jaſpes, les Porphyres, &c. les Marbres & les Pierres communes.

Le cinquième traitera des Bois, des Gommes & des Réſines.

Le ſixième contiendra les Cornes, les Écailles & autres Matières animales.

Enfin le ſeptième contiendra les Liqueurs.

Je terminerai cet Ouvrage par une Table du poids du pouce cube de chacune de ces matières.

Je compare les peſanteurs ſpécifiques de tous ces corps, à celle de l'eau de pluie ou de l'eau diſtillée, de laquelle je ſuppoſe que le pied-cube pèſe 70 livres; & je ſuppoſe toujours que le volume d'eau qui ſert de terme de comparaiſon, pèſe 10000.

L'eau de pluie dont il faut ſe ſervir en pareil cas, n'eſt pas celle qui a paſſé par-deſſus les toits; elle n'eſt pas pure, à beaucoup près. Pour l'avoir dans l'état de pureté convenable, il faut la recevoir immédiatement du nuage, dans de grands vaſes iſolés, de fayence ou de verre, & la laiſſer enſuite pendant quelque temps expoſée à l'air, afin qu'elle perde les matières volatiles qu'elle pourroit contenir. Il faut même, pour plus grande ſûreté, ne pas faire uſage de celle de la première ondée qui tombe; après un certain temps de ſechereſſe, elle eſt ſûrement moins pure que celles des ondées ſuivantes. A l'égard de l'eau diſtillée, il faut faire uſage, de préférence, de l'eau de rivière que l'on diſtille au bain-marie : s'il paſſe dans la diſtillation quelques matières étrangères, elles ſeront volatiles, & ſe diſſiperont aiſément, en laiſſant pendant quelque temps l'eau diſtillée expoſée à l'air : ce qui demeurera ſera de l'eau pure.

Je crois devoir avertir que je n'ai déterminé la peſanteur ſpécifique d'aucune matière, qu'après l'avoir éprouvée ſur pluſieurs morceaux différens, & même pluſieurs fois ſur le même morceau; & je n'ai regardé le réſultat comme exact, que lorſque ces différentes épreuves, ou ne m'ont point donné de différences, ou m'en ont donné de ſi petites, que j'ai cru pouvoir les négliger.

ARTICLE PREMIER.

De la peſanteur ſpécifique des Métaux.

Les Métaux forment une claſſe de corps, dont il paroît qu'il eſt le plus important de connoître les peſanteurs ſpécifiques. Ils ſont d'un ſi fréquent uſage dans le commerce, & ſont employés dans les Arts de tant de manières différentes, qu'il eſt très-intéreſſant pour nous de connoître leur état & leur valeur réelle; or, cet état & cette valeur peuvent ſe connoître par leur peſanteur ſpécifique. L'or & l'argent, par exemple, lorſqu'ils ſont alliés avec quelques autres métaux d'une moindre valeur, n'ont jamais une peſanteur ſpécifique ſi grande, que lorſqu'ils ſont purs, ſi l'on en excepte le cas où l'argent ſeroit allié avec le plomb ou le mercure: & leur peſanteur ſpécifique varie ſuivant les différentes ſubſtances & les différentes quantités qui leur ſont alliées. L'écroui fait auſſi varier leur denſité, ainſi que celle de preſque tous les autres métaux. J'ai donc éprouvé ces métaux dans tous les états de pureté & d'alliage permis dans le commerce; d'où je crois pouvoir conclure que toute autre peſanteur ſpécifique, ſenſiblement différente de celles qu'indiquent mes Tables dans ces différens états, ſera une marque certaine d'erreur.

J'ai conſidéré ſous les mêmes points de vue tous les autres métaux.

De plus, je ferai voir dans la ſuite de ce travail que la connoiſſance de la peſanteur ſpécifique des corps peut en procurer beaucoup d'autres très-intéreſſantes en Phyſique.

De l'Or.

J'ai éprouvé l'or; 1.° très-pur & ſans aucun alliage; 2.° allié au titre de l'Orfévrerie de Paris; 3.° allié au titre de la Monnoie de France; 4.° allié au titre des bijoux; & j'ai éprouvé ces différentes ſortes, 1.° n'étant que ſimplement fondues, 2.° étant bien écrouies.

L'or pur, ou à 24 karats, m'a été procuré par M. Tillet, qui me l'a fait fournir par M.rs du bureau des Affinages de la Monnoie. J'avois deſiré, pour en avoir un morceau bien plein & ſans ſoufflures, qu'on le fit fondre dans un petit creuſet neuf, & qu'au lieu de le couler en lingot, on le laiſſât refroidir lentement dans le creuſet pour en former un culot; mais cette opération n'a pas pu réuſſir: on l'a fondu juſqu'à ſept fois, & toutes les fois le culot s'eſt trouvé rempli de ſoufflures. J'ai donc pris le parti d'en choiſir des morceaux qui ont paru les plus pleins, dans les grands lingots que l'on coule au bureau des Affinages, & qui pèſent quelquefois juſqu'à 40 marcs. M. Tillet m'en a procuré pluſieurs, entre leſquels j'ai trouvé des différences ſi petites qu'elles peuvent être réputées zéro. Ces Meſſieurs du bureau des Affinages ſe ſont prêté à tout cela de la meilleure grâce du monde; & je ne puis que me louer de leur complaiſance.

Le morceau d'or ſur lequel j'ai compté le plus, peſoit 1 marc 1 once 5 gros 69 grains $\frac{3}{4}$, ou 5613 grains $\frac{3}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 3 grains $\frac{1}{2}$, ou 291 grains $\frac{1}{2}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 19258 : 1000, ou, plus exactement :: 192581 : 10000. Un autre morceau peſoit 1 marc 5 onces 5 gros 55 grains $\frac{7}{8}$, ou 7903 grains $\frac{7}{8}$; il a perdu dans l'eau de pluie 5 gros 50 grains $\frac{7}{16}$, ou 410 grains $\frac{7}{16}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 19257 : 1000, ou plus exactement :: 192572 : 10000; ce qui fait environ $\frac{1}{20000}$ de différence, laquelle peut être comptée pour rien. Il ſuit de-là que le pouce cube d'or pur, pèſe 1 marc 4 onces 3 gros 62 grains, & le pied cube pèſe 1348 livres 1 once 0 gros 41 grains.

Un morceau du même or, écroui autant qu'il a été poſſible à coups de marteaux, & qui peſoit 1 marc 0 once 4 gros 2 grains $\frac{1}{2}$, ou 4898 grains $\frac{1}{2}$, a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 37 grains, ou 253 grains; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 19362 : 1000, ou plus exactement :: 193617 : 10000; ſa denſité a donc été augmentée par l'écroui d'environ $\frac{1}{186}$. Ainſi le pouce cube de l'or pur ainſi écroui pèſe 1 marc 4 onces 4 gros 28 grains, & le pied cube pèſe 1355 livres 5 onces 0 gros 60 grains.

Pour ſavoir ſi l'or étoit écroui autant qu'il pouvoit l'être, après l'avoir écroui & peſé, pour reconnoître ſa peſanteur ſpécifique, je l'ai écroui & peſé de nouveau, & je n'ai ceſſé cette opération que lorſque ſa denſité a ceſſé d'augmenter par ce procédé. J'ai fait la même choſe à l'égard des autres métaux, ſoit ſimples, ſoit alliés.

J'ai enſuite éprouvé les différentes eſpèces d'or allié, qui ſont en uſage dans le commerce; ſavoir l'or allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, l'or allié au titre de la monnoie de France, & l'or allié au titre des bijoux.

L'or allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, doit être à 22 karats, c'eſt-à-dire qu'il doit y avoir 22 parties d'or & 2 parties d'alliage.

L'or allié au titre de la Monnoie de France, doit être auſſi à 22 karats; mais on permet $\frac{10}{32}$ de karat de remède; ainſi, il peut y avoir, & il s'y trouve ordinairement 694 parties d'or & 74 parties d'alliage, ou plus ſimplement 347 parties d'or & 37 parties d'alliage.

L'or des bijoux doit être à 20 karats; c'eſt-à-dire, qu'il doit y avoir vingt parties d'or & quatre parties d'alliage, ou plus ſimplement cinq parties d'or & une partie d'alliage.

Le morceau d'or allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, ou à 22 karats de fin, qui a ſervi à mes épreuves, & qui m'a été fourni par M. Gavelles, Horloger & fabricant de boîtes de montres, peſoit 8 onces 0 gros 30 grains $\frac{1}{4}$, ou 4638 grains $\frac{1}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 49 grains $\frac{1}{4}$, ou 265 grains $\frac{1}{4}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie

pluie :: 17486 : 1000, ou plus exactement :: 174863 : 10000. Ainsi le pouce cube d'or allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, pèse 1 marc 3 onces 2 gros 48 grains, & le pied cube pèse 1224 livres 0 onces 5 gros 18 grains.

Nous avons dit que l'or allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, est composé de 22 parties d'or pur, & deux parties d'alliage, ou de cuivre rouge mesurant par le poids. Nous avons dit aussi que la pesanteur spécifique de l'or pur, est à celle de l'eau de pluie :: 192581 : 10000. Nous verrons ci-après que la pesanteur specifique du cuivre rouge, est à celle de l'eau de pluie :: 77880 : 10000. Si donc nous supposons une masse d'or pur pesant 192581 grains, laquelle répondra par conséquent à un volume d'eau de pluie, pesant 10000 grains; les $\frac{22}{24}$ de cette masse d'or pèseront 176532 grains $\frac{14}{24}$; & les $\frac{2}{24}$ de cuivre rouge, que l'on y mêle pour l'allier, pèseront 16048 grains $\frac{10}{24}$. Si nous supposons de même une masse de cuivre rouge, égale en volume à une masse d'eau de pluie pesant 10000 grains, cette masse de cuivre pèsera 77880 grains, qui, divisés par 24, donnent 3245. Chaque vingt-quatrième de cette masse de cuivre, pèsera donc 3245 grains. Ainsi les 16048 grains $\frac{10}{24}$ de cuivre, ajoutés à la masse d'or ci-dessus, feront, à très-peu de chose près, un volume de $\frac{5}{24}$. Par conséquent, le volume de la masse du mélange devroit être augmenté de $\frac{3}{24}$ en sus; au lieu de vingt-quatre parties en volume, il devroit donc y en avoir vingt-sept. Si nous divisons 192581 grains, poids du total par 27, le poids de chaque petit volume sera 7132 grains $\frac{17}{27}$. Si nous retranchons maintenant les poids de trois de ces volumes, qui font 21397 grains $\frac{24}{27}$, il ne restera pour le poids d'un volume de mélange, égal à un volume d'eau de pluie, pesant 10000 grains, que 171183 grains $\frac{3}{27}$. C'est effectivement ce que devroit peser un pareil volume d'or allié au titre de l'Ofévrerie de Paris, si la densité du mélange demeuroit proportionnelle aux densités particulières des métaux qui le constituent. Mais, suivant nos expériences, un pareil volume d'or, ainsi allié, pèseroit 174863 grains; donc il y a une pénétration mutuelle de ces deux

métaux dans les pores l'un de l'autre, puiſque la denſité du mélange eſt augmentée.

Le même morceau d'or allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, éprouvé ci-deſſus, après avoir été bien écroui, & après en avoir retranché quelques petites inégalités, qui auroient pu retenir quelques bulles d'air, lorſque je l'ai peſé dans l'eau, s'eſt trouvé peſer 8 onces 0 gros 29 grains, ou 4637 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 47 grains $\frac{5}{8}$, ou 263 grains $\frac{5}{8}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 17589 : 1000, ou plus exactement :: 175894 : 10000; donc ſa denſité eſt augmentée par l'écroui d'environ $\frac{1}{170}$. Cela étant, le pouce cube de cet or pèſe 1 marc 3 onces 3 gros 15 grains; & le pied cube pèſe 1231 livres 4 onces 1 gros 2 grains.

L'or allié au titre de la Monnoie de France, ou à 21 karats $\frac{22}{32}$ de fin, m'a encore été fourni par M.[rs] du Bureau des affinages de la Monnoie. J'en ai pris un morceau ſimplement fondu & coulé ſans aucun écroui, qui peſoit 4 onces 6 gros 11 grains $\frac{3}{8}$, ou 2747 grains $\frac{3}{8}$; il a perdu dans l'eau de pluie 2 gros 13 grains $\frac{7}{8}$, ou 157 grains $\frac{7}{8}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 17402 : 1000, ou plus exactement :: 174022 : 10000. Ainſi le pouce cube d'or allié au titre de la Monnoie de France, pèſe 1 marc 3 onces 2 gros 17 grains; & le pied cube pèſe 1218 livres 2 onces 3 gros 51 grains.

La peſanteur ſpécifique de cet or ainſi allié, confirme ce que nous avons dit ci-deſſus, ſavoir, qu'il y a pénétration mutuelle de l'or & du cuivre dans les pores l'un de l'autre; car dans ce mélange il y a $\frac{694}{768}$ d'or pur, & $\frac{74}{768}$ de cuivre rouge. Or, dans la ſuppoſition que nous avons faite plus haut, les 694 parties d'or pèſeroient 174025 grains $\frac{14}{768}$; les 74 parties de cuivre pèſeroient donc 18555 grains $\frac{754}{768}$; ſi, comme nous l'avons dit ci-deſſus, une maſſe de cuivre rouge, égale en volume à une maſſe d'eau de pluie peſant 10000 grains, pèſe 77880 grains, chaque 768.[e] de cette maſſe pèſera donc 101 grains $\frac{312}{768}$. Ainſi les 18555 grains $\frac{754}{768}$

de cuivre rouge ajoutés à la maſſe d'or ci-deſſus, feront, à très-peu de choſes près, un volume de $\frac{183}{768}$. Par conſéquent le volume de la maſſe du mélange devroit être augmenté de $\frac{109}{768}$ en ſus. Au lieu de 768 parties en volume, il devroit donc y en avoir 877. Si nous diviſons 192581 grains, poids du total, par 877, le poids de chaque petit volume ſera 219 grains $\frac{518}{877}$. Si nous retranchons maintenant les poids de 109 de ces volumes, qui ſont 23935 grains $\frac{334}{877}$; il ne reſtera pour le poids d'un volume du mélange, égal à un volume d'eau de pluie peſant 10000 grains, que 168645 grains $\frac{543}{877}$. C'eſt en effet ce que devroit peſer un pareil volume d'or, allié au titre de la Monnoie de France, ſi la denſité du mélange demeuroit proportionnelle aux denſités particulières des deux métaux. Mais, ſuivant nos expériences, ce volume d'or pèſe 174022 grains; donc la denſité eſt augmentée; donc il y a pénétration.

Pour avoir l'or allié au titre de la Monnoie de France, écroui au point convenable, je me ſuis ſervi d'un double-louis, qui peſoit 4 gros 18 grains $\frac{5}{8}$, ou 306 grains $\frac{5}{8}$. Il a perdu dans l'eau de pluie 17 grains $\frac{3}{8}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 17647 : 1000, ou plus exactement :: 176474 : 10000; d'où il ſuit que ſa denſité a été augmentée par la forte preſſion qu'il a éprouvé ſous le balancier d'environ $\frac{1}{71}$. Ainſi le pouce cube de cet or pèſeroit 1 marc 3 onces 3 gros 36 grains; & le pied cube pèſeroit 1235 livres 5 onces 0 gros 51 grains.

J'ai été bien aiſe de comparer l'or de la Monnoie de France avec celui de la Monnoie d'Angleterre; pour cela, j'ai mis une Guinée à l'épreuve, elle peſoit 2 gros 13 grains $\frac{9}{16}$, ou 157 grains $\frac{9}{16}$; elle a perdu dans l'eau de pluie 8 grains $\frac{15}{16}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 17629 : 1000, ou plus exactement :: 176294 : 10000. Ainſi la peſanteur ſpécifique de l'or de la Monnoie de France eſt plus grande que celle de l'or de la Monnoie d'Angleterre, d'environ $\frac{1}{980}$.

L'or allié au titre des bijoux, ou à 20 karats de fin, m'a

été fourni par M.r Gavelles, Horloger, & fabricant de boîtes de montres; c'étoit un morceau ſimplement fondu & coulé, ſans aucun écroui, qui peſoit 1 marc 0 once 0 gros 20 grains $\frac{1}{4}$, ou 4628 grains $\frac{1}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 6 grains $\frac{5}{8}$, ou 294 grains $\frac{5}{8}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie : : 15709 : 1000, ou : : 157090 : 10000. Ainſi le pouce cube d'or allié au titre des bijoux, pèſe 1 marc 2 onces 1 gros 33 grains; & le pied cube pèſe 1099 livres 10 onces 0 gros 46 grains.

Nous avons encore ici une confirmation de ce que nous avons dit plus haut, ſavoir, qu'il y a pénétration de l'or & du cuivre dans les pores l'un de l'autre; car dans le mélange de l'or allié au titre des bijoux, il y a 20 parties d'or pur, & 4 parties de cuivre rouge. Or, dans la ſuppoſition que nous avons faite, en parlant de l'or allié au titre de l'Orſévrerie de Paris, les 20 parties d'or pèſeroient 160484 grains $\frac{1}{6}$; & les 4 parties de cuivre pèſeroient 32096 grains $\frac{5}{6}$. Si, comme nous l'avons déja dit plus haut, une maſſe de cuivre rouge, égale en volume à une maſſe d'eau de pluie peſant 10000 grains, pèſe 77880 grains; chaque 24.e de cette maſſe peſera donc 3245 grains. Ainſi les 32096 grains $\frac{5}{6}$ de cuivre rouge, ajoutés à la maſſe d'or ci-deſſus, feront, à peu de choſe près, un volume de $\frac{10}{24}$. Par conſéquent le volume de la maſſe du mélange devroit être augmenté de $\frac{6}{24}$ en ſus. Au lieu de 24 parties en volume, il devroit donc y en avoir 30. Si nous diviſons 192581 grains, poids du total, par 30, le poids de chaque petit volume, ſera 6419 grains $\frac{11}{30}$. Si nous retranchons maintenant le poids de ſix de ces volumes, qui ſont 38516 grains $\frac{6}{30}$; il ne reſtera pour le poids d'un volume du mélange, égal à un volume d'eau de pluie peſant 10000 grains, que 154064 grains $\frac{24}{30}$. C'eſt en effet ce que devroit peſer un pareil volume d'or, allié au titre des bijoux, ſi la denſité du mélange demeuroit proportionnelle aux denſités particulières des deux métaux. Mais ſuivant nos expériences, ce volume d'or pèſe 157090 grains; donc la denſité eſt augmentée; donc il y a pénétration.

Le même morceau d'or allié au titre des bijoux éprouvé ci-dessus, après avoir été bien écroui, s'est trouvé peser 1 marc 0 once 0 gros 19 grains $\frac{7}{8}$, ou 4627 grains $\frac{7}{8}$; il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 5 grains $\frac{3}{8}$, ou 293 grains $\frac{3}{8}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 15775 : 1000, ou plus exactement :: 157746 : 10000; donc sa densité est augmentée par l'écroui d'environ $\frac{1}{239}$. Cela étant, le pouce cube de cet or pèse 1 marc 2 onces 1 gros 57 grains; & le pied cube pèse 1104 livres 3 onces 4 gros 30 grains.

De l'Argent.

J'ai éprouvé l'argent de même que j'ai fait l'or; 1.° très-pur & sans aucun alliage; 2.° allié au titre de l'Orfévrerie de Paris; 3.° allié au titre de la Monnoie de France, & j'ai éprouvé ces différentes sortes; 1.° n'étant que simplement fondues, 2.° étant bien écrouies.

L'argent pur, ou à 12 deniers, m'a aussi été procuré par M. Tillet, qui me l'a fait fournir par M.rs du bureau des Affinages de la Monnoie. J'en ai d'abord essayé plusieurs morceaux choisis dans de très-grands lingots. Ensuite j'ai demandé qu'on en formât un culot, en en faisant fondre une certaine quantité dans un petit creuset neuf, & l'y laissant refroidir lentement, au lieu de le couler en lingot; ce qui a très-bien réussi.

Le culot qu'on m'a fourni pesoit 1 marc 3 onces 4 gros 1 grain, ou 6625 grains: il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 56 grains $\frac{1}{2}$, ou 632 grains $\frac{1}{2}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10474 : 1000, ou plus exactement :: 104743 : 10000. Il suit de-là que le pouce cube d'argent pur pèse 6 onces 6 gros 22 grains, & le pied cube pèse 733 livres 3 onces 1 gros 52 grains.

Un morceau du même argent, écroui autant qu'il a été possible, & qui pesoit 6 onces 6 gros 53 grains $\frac{1}{2}$, ou 3941 grains $\frac{1}{2}$, a perdu dans l'eau de pluie 5 gros 15 grains, ou 375 grains; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10511 : 1000, ou plus exactement

:: 105107 : 10000. Sa densité a donc été augmentée par l'écroui d'environ $\frac{1}{288}$. Ainsi le pouce cube d'argent pur ainsi écroui, pèse 6 onces 6 gros 36 grains, & le pied cube pèse 735 livres 11 onces 7 gros 43 grains.

J'ai ensuite éprouvé les deux espèces d'argent allié qui sont en usage; savoir l'argent allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, & l'argent allié au titre de la Monnoie de France.

L'argent allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, doit être à 11 deniers $\frac{1}{2}$; c'est-à-dire qu'il doit y avoir 23 parties d'argent, & une partie de cuivre; mais on permet 2 grains, c'est-à-dire, $\frac{2}{24}$ de denier de remède; ainsi, il peut y avoir 274 parties d'argent & 14 parties de cuivre, ou plus simplement 137 parties d'argent & 7 parties de cuivre.

L'argent allié au titre de la Monnoie de France doit être à 11 deniers; c'est-à-dire qu'il doit y avoir onze parties d'argent & une partie de cuivre; mais on permet 3 grains, c'est-à-dire $\frac{3}{24}$ de denier de remède; ainsi il peut y avoir, & il y a en effet 261 parties d'argent & 27 parties de cuivre, ou plus simplement 29 parties d'argent & 3 parties de cuivre.

L'argent allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, qui est à 11 deniers $\frac{1}{2}$, ou à 11 deniers 10 grains de fin, m'a été fourni par M. Durand, Orfévre de Paris. Le morceau d'argent après avoir été fondu, coulé dans une lingotière & ébarbé, mais sans être aucunement écroui, pesoit 1 marc 0 once 1 gros 54 grains, ou 4734 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 6 gros 33 grains $\frac{1}{4}$, ou 465 grains $\frac{1}{4}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10175 : 1000, ou plus exactement :: 101752 : 10000; ainsi le pouce cube d'argent, allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, pèse 6 onces 4 gros 55 grains, & le pied cube pèse 712 livres 4 onces 1 gros 57 grains.

Il n'en est pas de l'argent & du cuivre comme de l'or & du cuivre; il n'y a point de pénétration mutuelle de ces deux métaux dans les pores l'un de l'autre; car nous avons dit ci-dessus que l'argent allié au titre de l'Orfévrerie de Paris est composé de 144 parties; savoir, 137 parties d'argent pur,

& 7 parties de cuivre, meſurant par le poids. Nous avons dit auſſi que la peſanteur ſpécifique de l'argent pur eſt à celle de l'eau de pluie :: 104743 : 10000, & que la peſanteur ſpécifique du cuivre rouge eſt à celle de l'eau de pluie :: 77880 : 10000. Si donc nous ſuppoſons une maſſe d'argent pur peſant 104743 grains, dont le volume égalera par conſéquent un volume d'eau de pluie, peſant 10000 grains, les $\frac{137}{144}$ de cette maſſe d'argent pèſeront 99651 $\frac{47}{144}$ grains, & les $\frac{7}{144}$ de cuivre rouge que l'on y mêle pour l'allier, pèſeront 5091 $\frac{97}{144}$ grains. Si nous ſuppoſons de même une maſſe de cuivre rouge égale en volume à une maſſe d'eau de pluie peſant 10000 grains, cette maſſe de cuivre pèſera 77880 grains, qui, diviſés par 144, donnent 540 $\frac{120}{144}$; chaque 144.e de cette maſſe de cuivre peſera donc 540 grains $\frac{120}{144}$; ainſi les 5091 grains $\frac{97}{144}$ de cuivre ajoutés à la maſſe d'argent ci-deſſus, feront, à peu de choſe près, un volume de $\frac{19}{288}$; par conſéquent le volume de la maſſe du mélange devroit être augmenté de $\frac{5}{288}$ en ſus. Au lieu de 144 parties en volume, il devroit donc y en avoir 146 $\frac{1}{2}$. Si nous diviſons 104743 grains, poids du total, par 146 $\frac{1}{2}$, le poids de chaque petit volume ſera 714 grains $\frac{284}{293}$. Si nous retranchons maintenant les poids de 2 $\frac{1}{2}$ de ces volumes, qui font 1787 $\frac{124}{293}$ grains, il reſtera pour le poids d'un volume du mélange égal à un volume d'eau de pluie peſant 10000 grains, 102955 grains $\frac{169}{293}$. C'eſt effectivement ce que devroit peſer un pareil volume d'argent allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, ſi la denſité du mélange demeuroit proportionnelle aux denſités particulières des métaux qui le conſtituent. Mais, ſuivant nos expériences, un pareil volume d'argent, ainſi allié, ne pèſeroit que 101752 grains; donc, au lieu d'y avoir pénétration de ces deux métaux dans les pores l'un de l'autre, il paroît au contraire que leurs parties ne ſont pas autant rapprochées qu'elles pourroient l'être, puiſque la denſité du mélange eſt moindre.

Un morceau du même argent allié au titre de l'Orfévrerie de Paris, après avoir été bien écroui & ébarbé, comme je l'avois fait pour l'or, & pour les mêmes raiſons, peſoit 1 marc

o once 6 gros 31 grains $\frac{1}{2}$, ou 5071 grains $\frac{1}{2}$; il a perdu dans l'eau de pluie 6 gros 56 grains $\frac{3}{4}$, ou 488 grains $\frac{3}{4}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10376 : 1000, ou plus exactement :: 103765 : 10000; ce qui fait voir que sa densité a été augmentée par l'écroui d'environ $\frac{2}{103}$; ainsi le pouce cube de cet argent pèse 6 onces 5 gros 58 grains; & le pied cube pèse 726 livres 5 onces 5 gros 32 grains.

L'argent allié au titre de la Monnoie de France, ou à 10 deniers 21 grains de fin, m'a encore été fourni par M.rs du bureau des Affinages de la Monnoie. J'en ai pris un morceau simplement fondu & coulé, sans aucun écroui, qui pesoit 1 marc 1 once 0 gros 39 grains $\frac{1}{2}$, ou 5223 grains $\frac{1}{2}$; il a perdu dans l'eau de pluie 7 gros 15 grains $\frac{7}{8}$, ou 519 grains $\frac{7}{8}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10048 : 1000, ou plus exactement :: 100476 : 10000; d'où il suit que le pouce cube d'argent allié au titre de la Monnoie de France pèse 6 onces 4 gros 7 grains; & le pied cube pèse 703 livres 5 onces 2 gros 36 grains.

La pesanteur spécifique de cet argent, ainsi allié, est encore une preuve qu'il n'y a point de pénétration mutuelle de l'argent & du cuivre dans les pores l'un de l'autre; car dans ce mélange il y a $\frac{29}{32}$ d'argent pur, & $\frac{3}{32}$ de cuivre rouge. Or dans la supposition que nous avons faite plus haut, les 29 parties d'argent pèseroient 94923 grains $\frac{11}{32}$, les 3 parties de cuivre pèseroient donc 9819 grains $\frac{21}{32}$. Si, comme nous l'avons dit ci-dessus, une masse de cuivre rouge, égale en volume à une masse d'eau de pluie pesant 10000 grains, pèse 77880 grains, chaque 32.e de cette masse pesera donc 2433 grains $\frac{24}{32}$; ainsi les 9819 grains $\frac{21}{32}$ de cuivre rouge ajoutés à la masse d'argent ci-dessus, feront un volume d'un peu plus de $\frac{4}{32}$. Par conséquent le volume de la masse du mélange devroit être augmenté de $\frac{1}{32}$ en sus. Au lieu de 32 parties en volume, il devroit donc y avoir 33. Si nous divisons 104743 grains, poids du total, par 33, le poids de

de chaque petit volume, ſera 3174 grains $\frac{1}{33}$. Si nous retranchons maintenant le poids d'un de ces volumes, il reſtera pour le poids d'un volume du mélange égal à un volume d'eau de pluie peſant 10000 grains, 101568 grains $\frac{32}{33}$. C'eſt en effet ce que devroit peſer un pareil volume d'argent allié au titre de la Monnoie de France, ſi la denſité du mélange demeuroit proportionnelle aux denſités particulières des deux métaux; mais ſuivant nos expériences, ce volume d'argent ne pèſeroit que 100476 grains. Donc la denſité eſt diminuée; donc il n'y a pas de pénétration.

Pour avoir l'argent allié au titre de la Monnoie de France, écroui au point convenable, je me ſuis ſervi, ainſi que je l'ai fait pour l'or, de l'argent monnoyé. J'ai donc pris un écu de ſix livres, frappé à la Monnoie de Paris, qui peſoit 7 gros 52 grains $\frac{13}{16}$, ou 556 grains $\frac{13}{16}$: il a perdu dans l'eau de pluie 53 grains $\frac{1}{2}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 10408 : 1000, ou plus exactement :: 104077 : 10000; ce qui fait voir que ſa denſité a été augmentée par la forte preſſion qu'il a éprouvée ſous le balancier, d'environ $\frac{1}{28}$. Ainſi le pouce cube de cette matière peſeroit 6 onces 5 gros 70 grains; & le pied cube peſeroit 728 livres 8 onces 4 gros 71 grains.

Le poids abſolu de l'écu, dont je me ſuis ſervi dans cette épreuve, pourroit faire ſoupçonner de l'inexactitude dans ma balance ou dans mon opération, car j'ai trouvé qu'il peſoit 556 grains $\frac{13}{16}$; & cependant chaque écu de ſix livres ne doit peſer que 555 grains $\frac{15}{83}$, puiſque 166 écus de ſix livres pèſent dix livres; or, on n'imaginera pas qu'on faſſe à la Monnoie les écus plus peſans qu'ils ne doivent l'être, on aimera mieux croire que je me ſuis trompé; cependant il n'en eſt rien. Je fis voir dans le temps ce même écu à M. Tillet, qui le peſa de nouveau lui-même, & le trouva en effet d'environ 1 grain $\frac{3}{4}$ plus peſant qu'il ne devoit l'être.

Du Cuivre rouge & jaune.

J'ai éprouvé le cuivre, 1.° ſimplement fondu; 2.° comprimé par une grande force.

Pour avoir le cuivre fondu le plus plein poſſible, & dans lequel il ne ſe trouvât aucune ſoufflure, j'ai penſé qu'il vaudroit mieux, après l'avoir fondu, le laiſſer refroidir lentement dans le creuſet, plutôt que de le jeter en moule.

J'ai donc pris du cuivre de roſette; je l'ai fait fondre dans un petit creuſet neuf; je l'ai laiſſé long-temps en fuſion, après quoi je l'ai laiſſé refroidir lentement dans le fourneau; cela m'a donné un petit culot, que j'ai bien limé tout autour pour en ôter toutes les inégalités. Ce culot peſoit 4 onces 1 gros 67 grains $\frac{1}{2}$, ou 2443 grains $\frac{1}{2}$; il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 25 grains $\frac{3}{4}$, ou 313 grains $\frac{3}{4}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 7788 : 1000, ou :: 77880 : 10000. Ainſi le pouce cube de cuivre rouge pèſe 5 onces 0 gros 28 grains, & le pied cube pèſe 545 livres 2 onces 4 gros 35 grains.

J'ai pris du cuivre jaune en planche tout neuf, & l'ai fait fondre comme le cuivre rouge; cela m'a donné un culot, que j'ai bien limé pour en ôter les inégalités & la partie du cuivre qui avoit perdu ſon zinc; ce culot peſoit 5 onces 4 gros 14 grains, ou 3182 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 5 gros 19 grains, ou 379 grains; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 8396 : 1000, ou plus exactement :: 83958 : 10000; d'ou il ſuit que le pouce cube de cuivre jaune pèſe 5 onces 3 gros 38 grains, & le pied cube pèſe 587 livres 11 onces 2 gros 26 grains.

Pour avoir du cuivre qui fût comprimé par des forces ſenſiblement égales, j'ai pris de ces cylindres de cuivre qu'on a paſſés à la filière; le cylindre de cuivre rouge peſoit 1 once 7 gros 16 grains $\frac{1}{2}$, ou 1096 grains $\frac{1}{2}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 gros 51 grains $\frac{1}{2}$, ou 123 grains $\frac{1}{2}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 8878 : 1000, ou plus exactement :: 88785 : 10000. Ainſi le pouce cube de ce cuivre pèſeroit 5 onces 6 gros 3 grains, & le pied cube pèſeroit 621 livres 7 onces 7 gros 26 grains.

Le cylindre de cuivre jaune peſoit 2 onces 2 gros 34 grains $\frac{3}{4}$, ou 1330 grains $\frac{3}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 2 gros 11 grains $\frac{3}{4}$, ou 155 grains $\frac{3}{4}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 8544 : 1000, ou plus exactement :: 85441 : 10000. Le pouce cube de ce cuivre pèſeroit donc 5 onces 4 gros 22 grains, & le pied cube pèſeroit 598 livres 1 once 3 gros 10 grains.

On ſera ſans doute étonné de trouver le cuivre rouge qui n'a été que ſimplement fondu & non comprimé, moins peſant que le cuivre jaune, qui n'a pas non plus été comprimé; tandis que, lorſque ces deux métaux ont été battus, ou autrement comprimés, c'eſt le cuivre rouge qui eſt ſpécifiquement plus peſant. Je crois en apercevoir la raiſon.

Le cuivre rouge eſt un métal ſimple, au lieu que le cuivre jaune eſt un alliage du cuivre rouge avec environ $\frac{1}{5}$ de zinc. Mais dans ce mélange il y a une pénétration réelle des deux métaux dans les pores l'un de l'autre, telle que celle qui ſe trouve dans le mélange de certaines liqueurs, ce qui en augmente la denſité; car en effet, la denſité ou peſanteur ſpécifique de ce mélange eſt plus grande que ne l'exigent les denſités particulières des deux matières qui le compoſent. Ainſi, quoique le zinc que l'on mêle au cuivre, ait moins de denſité que ce dernier métal, cependant ce mélange eſt ſpécifiquement plus peſant que le cuivre rouge lui-même, lorſque l'un & l'autre de ces métaux n'ont été que fondus; parce que les pores du cuivre jaune ſont en partie remplis par le zinc, de même que ceux du zinc le ſont probablement par le cuivre: mais lorſque ces métaux ſont comprimés par une grande force, le cuivre rouge, qui n'a rien admis d'étranger dans ſes pores, cède davantage à la compreſſion, & acquiert par-là plus de denſité; au lieu que le cuivre jaune qui a déjà été pénétré par le zinc, qui eſt moins peſant que lui, cède moins à la force qui le comprime; c'eſt pourquoi, dans ce dernier cas, le cuivre rouge ſe trouve ſpécifiquement plus peſant que le cuivre jaune, quoique dans le premier cas ce ſoit le cuivre jaune qui ſoit le plus peſant des deux; de

ſorte que la compreſſion augmente la denſité du cuivre rouge d'environ $\frac{1}{8}$, tandis qu'elle n'augmente celle du cuivre jaune que d'environ $\frac{1}{57}$.

En parlant de l'argent, nous avons remarqué que la denſité ou peſanteur ſpécifique augmente d'autant plus par l'écroui, que le métal contient plus d'alliage. Ici, c'eſt le contraire, la denſité du métal ſimple augmente beaucoup plus par l'écroui, que ne le fait celle du métal allié ; la raiſon en eſt bien ſimple : dans l'argent allié avec le cuivre, non-ſeulement il n'y a pas de pénétration des deux métaux dans les pores l'un de l'autre; mais les parties ne paroiſſent pas même autant rapprochées qu'elles pourroient l'être. La compreſſion qui ſurvient occaſionne ce rapprochement; ce qui augmente beaucoup la denſité; au lieu que dans le cuivre allié avec le zinc il y a une pénétration réelle des deux métaux; leurs pores ſont en partie remplis par une matière étrangère, ce qui empêche que la compreſſion produiſe un auſſi grand effet.

Du Fer.

J'ai éprouvé le fer, 1.° ſimplement fondu, 2.° forgé & mis en barre, 3.° fortement écroui ou battu à froid, 4.° battu à chaud.

M. de Buffon m'a donné un petit morceau de fonte de fer, qui m'a paru très-pure & dégagée de matières étrangères; il peſoit 1 once 4 gros 58 grains $\frac{1}{2}$, ou 922 grains $\frac{1}{2}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 gros 56 grains, ou 128 grains; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 7207 : 1000, ou :: 72070 : 10000. Ainſi le pouce cube de cette fonte pèſe 4 onces 5 gros 27 grains; & le pied cube pèſe 504 livres 7 onces 6 gros 52 grains.

J'ai pris enſuite un morceau d'une barre d'excellent fer de Berri fort doux, que j'ai fait bien limer par-tout pour ôter toute la rouille, & afin que l'eau s'y appliquât exactement. Il peſoit 7 onces 2 gros 39 grains $\frac{1}{4}$, ou 4215 grains $\frac{1}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 7 gros 37 grains $\frac{1}{4}$, ou 541 grains $\frac{1}{4}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie

:: 7788 : 1000, ou :: 77880 : 10000. D'où il ſuit que le pouce cube d'un tel fer pèſe 5 onces 0 gros 28 grains; & le pied cube pèſeroit 545 livres 2 onces 4 gros 35 grains.

Il faut remarquer que la peſanteur ſpécifique varie, non-ſeulement dans les différentes eſpèces de fer, mais encore dans différens morceaux du même fer. Cette variété n'eſt pas très-conſidérable; la plus forte que m'aient fournie mes épreuves a été d'environ $\frac{1}{100}$. Cela vient ſans doute de ce que les lames qui compoſent le fer ne ſe touchent pas parfaitement, & que les vides qu'elles laiſſent entr'elles ſont plus ou moins grands.

Le fer qui a été mis en barre augmente rarement de denſité par l'écroui, ſans doute parce qu'il l'a déjà été fortement en le mettant en barre; & quand il en augmente, c'eſt d'une très-petite quantité; la plus forte augmentation que j'en aie trouvée dans mes épreuves a été de $\frac{1}{2862}$. Il arrive beaucoup plus ſouvent qu'il diminue de denſité par cette voie, & cela arrive ſûrement s'il a été écroui dans les deux ſens oppoſés, comme, par exemple, lorſqu'une barre quarrée a été battue à froid ſur ſes quatre côtés. J'ai cru en apercevoir la raiſon, voici celle que j'ai ſoupçonnée. En battant à froid une barre de fer dans un ſens ſeulement, on peut quelquefois rapprocher ſes lames les unes des autres, de façon à diminuer ſon volume, & augmenter par conſéquent ſa denſité; c'eſt ce qui m'eſt arrivé; mais une fois ſeulement, comme je l'ai déja dit, & cela n'a été que d'une très-petite quantité. Si enſuite on bat à froid cette barre dans l'autre ſens, ſes lames déja reſſerrées ſur elles-mêmes, & devenues plus dures par l'écroui, ne pouvant plus ſe reſſerrer davantage, la percuſſion les écarte les unes des autres, en les courbant; elles laiſſent entr'elles des vides plus ou moins grands, ce qui en augmente le volume & en diminue la denſité. J'ai voulu voir ſi mon ſoupçon étoit fondé; j'ai donc pris un morceau de fer, qui n'ayant été battu à froid que dans un ſens, avoit un peu augmenté de peſanteur ſpécifique; je l'ai fait battre à froid dans l'autre ſens; ſa peſanteur ſpécifique a été beaucoup plus

diminuée par ce ſecond écroui, qu'elle n'étoit augmentée par le premier; car ſon augmentation dans le premier cas n'a été que d'environ $\frac{1}{2862}$; & ſa diminution dans le ſecond, a été d'environ $\frac{1}{140}$.

Cela prouve qu'en battant une barre de fer à froid, on court les riſques d'y produire des gerçures & de l'affoiblir. C'eſt une remarque aſſez importante pour les Arts.

J'ai enfin fait rougir ces morceaux de fer qui avoient été écrouis, & les ai fait battre fortement à chaud: par ce procédé leur denſité a regagné ce qu'elle avoit perdu par l'écroui; de ſorte qu'elle s'eſt trouvée, à très-peu de choſe près, la même qu'elle étoit dans leur état primitif, étant un peu moindre dans quelques morceaux, & un peu plus grande dans d'autres; mais la différence n'a été que d'environ $\frac{1}{3000}$.

De l'Acier.

J'ai éprouvé l'Acier neuf, 1.° ſans être ni écroui ni trempé, 2.° étant écroui & non trempé, 3.° étant trempé & non écroui, 4.° étant écroui & enſuite trempé.

J'ai pris un morceau du meilleur acier d'Angleterre en barreau, tout neuf, tel qu'on le trouve chez les Marchands; je l'ai fait bien limer par-tout, pour ôter toutes les inégalités de ſa ſurface. Il s'eſt trouvé peſer 12 onces 6 gros 47 grains $\frac{1}{2}$, ou 7391 grains $\frac{1}{2}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 5 gros 7 grains $\frac{5}{8}$, ou 943 grains $\frac{5}{8}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 7833 : 1000, ou plus exactement :: 78331 : 10000; d'où il ſuit qu'un pouce cube de cet acier pèſeroit 5 onces 0 gros 44 grains; & le pied cube pèſeroit 548 livres 5 onces 0 gros 41 grains.

Un morceau du même acier, après avoir été bien écroui, s'eſt trouvé peſer 11 onces 1 gros 3 grains $\frac{1}{2}$, ou 6411 grains $\frac{1}{2}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 25 grains $\frac{3}{4}$, ou 817 grains $\frac{3}{4}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 7840 : 1000, ou plus exactement :: 78404 : 10000. Sa denſité n'augmente donc par l'écroui

que d'environ $\frac{1}{1074}$. Ainsi, le pouce cube de cet acier pèseroit 5 onces 0 gros 47 grains; & le pied cube pèseroit 548 livres 13 onces 1 gros 71 grains.

Le même morceau d'acier écroui, après avoir été trempé de tout son dur, s'est trouvé peser 11 onces 0 gros 65 grains, ou 6401 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 26 grains $\frac{3}{4}$, ou 818 grains $\frac{3}{4}$, ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7818 : 1000, ou :: 78180 : 10000. Cela prouve que la densité de l'acier diminue beaucoup plus par la trempe, qu'elle n'augmente par l'écroui; car elle est diminuée par la trempe de $\frac{1}{350}$, & elle n'étoit augmentée par l'écroui que d'environ $\frac{1}{1074}$. Le pouce cube de cet acier ne pèseroit donc que 5 onces 0 gros 39 grains; & le pied cube ne pèseroit que 547 livres 4 onces 1 gros 20 grains.

Un autre morceau du même acier, qui a été trempé de tout son dur, sans avoir auparavant été écroui, s'est trouvé peser 11 onces 4 gros 14 grains, ou 6638 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 57 grains $\frac{1}{4}$, ou 849 grains $\frac{1}{4}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7816 : 1000, ou plus exactement :: 78163 : 10000; d'où l'on voit que sa pesanteur spécifique est à peu-près la même que celle de l'acier qui avoit été fortement écroui avant d'être trempé; sa densité étant diminuée de son état primitif d'environ $\frac{1}{466}$; & la densité de l'acier qui avoit été écroui avant la trempe, étant diminuée, aussi de son état primitif, d'environ $\frac{1}{518}$. Ce qui prouve que l'action du feu, avant de le tremper, avoit ôté à l'acier écroui à peu près l'augmentation de densité qu'il avoit acquise par l'écroui. Le pouce cube de cet acier ne pèseroit donc que 5 onces 0 gros 38 grains; & le pied cube ne pèseroit que 547 livres 2 onces 2 gros 3 grains.

Ces résultats nous apprennent 1.° que l'acier par la trempe augmente toujours de volume, & par conséquent diminue de densité; 2.° que l'acier, dans tous les cas, a une pesanteur spécifique plus grande que celle du fer, même celle qui est

augmentée par l'écroui; ce qui paroîtroit d'abord confirmer l'opinion qu'ont aujourd'hui les Chimiſtes, que l'acier eſt plus fer que le fer qui l'a formé; puiſque les matières étrangères qui pourroient lui être unies en pareil cas, ayant une denſité moindre que la ſienne, devroient alors faire diminuer cette denſité; ce qui n'arrive pas, comme le prouvent mes expériences. Mais, l'exemple du cuivre, qui au moyen du zinc, moins peſant que lui, acquiert une peſanteur ſpécifique plus grande, doit nous faire ſuſpendre notre jugement. Il ſe pourroit donc faire que des matières étrangères, moins peſantes que le fer, en rempliſſant en grande partie ſes pores, pour en faire de l'acier, lui donnaſſent plus de denſité, & par conſéquent une peſanteur ſpécifique plus grande. Ce qui me donne ce ſoupçon, c'eſt que je trouve dans l'acier les deux propriétés les plus remarquables des métaux alliés, ſavoir, la plus grande fuſibilité, & la plus grande dureté & roideur dans ſes parties.

Du Plomb.

J'ai éprouvé le plomb, 1.° ſimplement fondu, ſans être battu ni même coulé; 2.° après avoir été fortement battu à coups de marteau.

J'ai donc pris une maſſe de plomb, que j'ai fait fondre dans une cuiller de fer, & l'y ai enſuite laiſſé refroidir lentement. Après quoi j'ai bien limé toute la ſurface, pour ôter toutes les inégalités, & pour emporter la portion du métal qui s'étoit décompoſée. Cela m'a donné une eſpèce de plateau, qui peſoit 7 onces 7 gros 56 grains, ou 4592 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 5 gros 44 grains $\frac{1}{2}$, ou 404 grains $\frac{1}{2}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie : : 11352 : 1000, ou plus exactement : : 113523 : 10000. D'où il ſuit que le pouce cube de plomb pèſe 7 onces 2 gros 62 grains; & le pied cube pèſe 794 livres 10 onces 4 gros 44 grains.

J'ai enſuite battu ce plomb à coups de marteau; par-là le plateau s'eſt aminci; mais il s'eſt étendu en proportion: de

de ſorte qu'en le peſant de nouveau, j'ai trouvé qu'il ne change point ou preſque point de denſité par l'écroui. J'y ai cependant trouvé, une fois ſeulement, une différence de $\frac{1}{348}$, dont le plomb battu peſoit plus que le plomb non battu. Mais cela venoit peut-être de ce que, dans ce morceau, il y avoit quelques petites ſoufflures; puiſque c'eſt la ſeule de mes expériences où j'en ai trouvé la denſité augmentée.

De l'Étain.

J'ai éprouvé ſix ſortes d'étain; 1.° ſimplement fondus, 2.° bien écrouis, ſavoir, l'étain pur de Cornouailles, l'étain de Mélac, & les quatre ſortes d'étain qu'on trouve chez les Potiers, qui ſont l'étain neuf, l'étain fin, l'étain commun, & l'étain appelé *claire-étoffe.*

J'ai fait fondre ces métaux l'un après l'autre dans une cuiller de fer, & j'en ai formé de petits plateaux, que j'ai laiſſés refroidir lentement, & dont j'ai ôté avec ſoin toutes les inégalités de la ſurface, afin qu'il n'y demeurât aucune bulle d'air adhérente lorſque je les ai peſés dans l'eau.

L'étain pur de Cornouailles m'a été donné par M. du Hamel, qui l'a rapporté du voyage qu'il a fait en Angleterre avec M.^rs de Juſſieu & l'abbé Nollet, & qu'il m'a dit lui avoir été procuré, dans toute ſa pureté, par le moyen de Milord Duc de Richemond. Ce morceau peſoit 3 onces 4 gros 11 grains, ou 2027 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 62 grains, ou 278 grains; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 7291 : 1000, ou plus exactement :: 72914 : 10000. Ainſi le pouce cube de cet étain pèſe 4 onces 5 gros 58 grains; & le pied cube pèſe 510 livres 6 onces 2 gros 68 grains.

L'étain de Mélac m'a été procuré par M. Macquer, qui m'en a fourni pluſieurs échantillons, entre leſquels j'ai trouvé de ſi petites différences, que je les ai comptées pour rien. Le morceau d'après lequel j'ai conclu ſa peſanteur ſpécifique, peſoit 10 onces 1 gros 38 grains $\frac{3}{4}$, ou 5870 grains $\frac{3}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 12 grains $\frac{5}{8}$, ou

804 grains $\frac{5}{8}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 7269 : 1000, ou plus exactement :: 72963 : 10000. Le pouce cube de cet étain pèſe donc 4 onces 5 gros 60 grains; & le pied cube pèſe 510 livres 11 onces 6 gros 61 grains.

A l'égard des différentes ſortes d'étain qu'on trouve chez les Potiers, j'en ai acheté des quatre eſpèces chez pluſieurs Marchands, & les ai éprouvées. J'y ai trouvé des différences, qui ſe réduiſent à peu de choſe dans les étains qui doivent avoir peu d'alliage, tels que l'étain neuf & l'étain fin; mais qui ſe ſont trouvées plus conſidérables dans les autres eſpèces. Pour déterminer leur peſanteur ſpécifique, j'ai choiſi, dans chaque eſpèce, celle qui avoit le moins d'alliage, c'eſt-à-dire, celle qui étoit ſpécifiquement la moins peſante; parce que je ſuis perſuadé que tous les Marchands ne manquent pas de mettre pour le moins la quantité d'alliage qu'on leur permet pour chaque eſpèce. Il ne m'a pas été poſſible de ſavoir d'eux quelle eſt cette quantité d'alliage permiſe pour chaque eſpèce; il m'a paru qu'ils en faiſoient un ſecret.

J'ai donc déterminé les peſanteurs ſpécifiques de ces quatre ſortes d'étain, de la manière ſuivante.

Le morceau d'étain neuf peſoit 7 onces 7 gros 55 grains $\frac{5}{8}$, ou 4591 grains $\frac{5}{8}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 52 grains $\frac{7}{8}$, ou 628 grains $\frac{7}{8}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 7301 : 1000, ou plus exactement :: 73013 : 10000. Ainſi le pouce cube de cet étain pèſe 4 onces 5 gros 62 grains; & le pied cube pèſe 511 livres 1 once 3 gros 47 grains.

Le morceau d'étain fin peſoit 7 onces 6 gros 39 grains $\frac{1}{4}$, ou 4503 grains $\frac{1}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 26 grains $\frac{1}{8}$, ou 602 grains $\frac{1}{8}$; ce qui donne ſa peſanteur ſpécifique à celle de l'eau de pluie :: 7479 : 1000, ou plus exactement :: 74789 : 10000; d'où il ſuit que le pouce cube de cet étain pèſe 4 onces 6 gros 56 grains; & le pied cube pèſe 523 livres 8 onces 2 gros 68 grains.

Le morceau d'étain commun peſoit 8 onces 0 gros 20

grains $\frac{1}{4}$, ou 4628 grains $\frac{1}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 8 grains $\frac{3}{8}$, ou 584 grains $\frac{3}{8}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7920 : 1000, ou :: 79200 : 10000. Ainsi le pouce cube de cet étain pèse 5 onces 1 gros 5 grains; & le pied cube pèse 554 livres 6 onces 3 gros 14 grains.

Le morceau d'étain appelé *claire-étoffe* pesoit 8 onces 1 gros 26 grains, ou 4706 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 7 gros 50 grains $\frac{1}{2}$, ou 554 grains $\frac{1}{2}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 8487 : 1000, ou plus exactement :: 84869 : 10000; le pouce cube de cet étain pêse donc 5 onces 4 gros 0 grains; & le pied cube pèse 594 livres 1 once 2 gros 45 grains.

J'ai ensuite écroui, le plus qu'il m'a été possible, ces six sortes d'étain, & les ai pesés de nouveau.

Le morceau d'étain de Cornouailles pesoit 3 onces 4 gros 10 grains $\frac{1}{2}$, ou 2026 grains $\frac{1}{2}$; il a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 61 grains $\frac{5}{8}$, ou 277 grains $\frac{5}{8}$, ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7299 : 1000, ou plus exactement :: 72994 : 10000. Sa densité est donc augmentée par l'écroui d'environ $\frac{1}{912}$; d'où il suit que le pouce cube de cet étain pèseroit 4 onces 5 gros 61 grains; & le pied cube pèseroit 510 livres 15 onces 2 gros 45 grains.

Le morceau d'étain de Mélac pesoit 10 onces 1 gros 38 grains $\frac{3}{4}$, ou 5870 grains $\frac{3}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 11 grains $\frac{1}{2}$, ou 803 grains $\frac{1}{2}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7306 : 1000, ou plus exactement :: 73065 : 10000. Sa densité est donc augmentée par l'écroui d'environ $\frac{1}{716}$. Ainsi le pouce cube de cet étain pèseroit 4 onces 5 gros 64 grains; & le pied cube pèseroit 511 livres 7 onces 2 gros 17 grains.

Le morceau d'étain neuf pesoit 7 onces 7 gros 55 grains $\frac{5}{8}$, ou 4591 grains $\frac{5}{8}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 52 grains, ou 628 grains; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7311 : 1000, ou plus exactement :: 73115 : 10000. Sa densité est donc augmentée

par l'écroui d'environ $\frac{1}{716}$, de même que celle de l'étain de Mélac, de la pureté duquel l'étain neuf approche beaucoup. Le pouce cube de cet étain pèseroit 4 onces 5 gros 66 grains; & le pied cube pèseroit 511 livres 12 onces 7 gros 3 grains.

Le morceau d'étain fin pesoit 7 onces 6 gros 38 grains $\frac{1}{4}$, ou 4502 grains $\frac{1}{4}$; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 22 grains $\frac{3}{4}$, ou 598 grains $\frac{3}{4}$; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7519 : 1000, ou plus exactement :: 75194 : 10000. Sa densité est donc augmentée par l'écroui d'environ $\frac{1}{185}$. Ainsi le pouce cube de cet étain pèseroit 4 onces 6 gros 71 grains; & le pied cube pèseroit 526 livres 5 onces 5 gros 59 grains.

A l'égard de l'étain commun & de celui que les Potiers appellent *claire-étoffe*, ces deux espèces ne changent point ou presque point de densité par l'écroui; ce qui vient sans doute de ce qu'elles sont alliées avec beaucoup de plomb, que nous avons vu ci-dessus ne guère changer lui-même de densité par cette voie. Il paroît même, par les résultats ci-dessus, qu'en général l'étain, de même que le plomb, augmente peu de densité par l'écroui. Aussi remarque-t-on que l'écroui n'augmente que peu, ou même point, l'élasticité de ces métaux.



SUR UN INSECTE QUI S'ATTACHE À LA CHEVRETTE.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

PLUSIEURS pêcheurs, & des personnes qui habitent les rivages de la mer, à la vérité peu instruites, croient encore que les soles doivent leur naissance à une espèce de crustacée de la famille des Écrevisses, que l'on nomme *Chevrettes* ou *Crevettes*, dans d'autres endroits *Salicoques* ou *Barbots*. 11 Avril 1772.

J'ai voulu m'assurer, dans le voyage que j'ai fait en Normandie en 1771, de ce qui avoit pu donner quelque fondement à ce dire populaire.

M. Deslandes ayant eu la même intention, a donné sur cet objet une Observation insérée dans l'*Histoire de l'Académie, année 1722, page 19.* Il y dit qu'ayant fait pêcher une quantité de chevrettes, & les ayant mises dans une baille avec de l'eau de mer, au bout de treize jours il y vit huit ou dix petites soles qui croissoient insensiblement. Il répéta l'expérience plusieurs fois & trouva toujours de petites soles. M. Deslandes mit encore au mois d'Avril des soles avec des chevrettes dans une baille, & dans une autre des soles seulement. Dans l'une & l'autre baille les soles frayoient en perfection; mais il ne parut de petites soles que dans celle où il avoit mis des chevrettes.

M. Deslandes a cru avoir ôté le merveilleux en annonçant, d'après ses observations, que les chevrettes n'engendroient point les soles, comme on l'avoit imaginé, & avoir dévoilé le mystère, en concluant que ce sont des œufs de soles qui ont besoin, pour éclore, de s'attacher à des chevrettes. Par cette explication, les chevrettes deviennent en quelque sorte les nourrices des soles pendant le premier temps de leur vie, au lieu qu'on les faisoit passer pour être leurs mères.

C'eſt travailler utilement au progrès de la Phyſique que de s'élever contre de fauſſes idées, qui peuvent quelquefois ſe trouver dans nos Mémoires, & celle-ci ſembloit mériter d'autant plus de confiance que l'Auteur s'appuie d'obſervations, & que cependant en voulant détruire un conte ridicule ſur la génération des ſoles, il en ſubſtitue un autre preſqu'auſſi abſurde; en effet, ne ſeroit-il pas ſingulier que la Nature eut réſervé à des cruſtacées le ſoin de faire éclore des œufs d'une eſpèce de poiſſons?

Pour m'éclairer ſur ce fait, je demandai à des pêcheurs ce qu'ils en penſoient, & j'avouerai que ceux qui m'aſſuroient avoir trouvé, en grattant les ſables des rivages, du frai de ſoles, ne pouvoient que difficilement accorder avec cela la génération des petites ſoles que ſouvent portoient les chevrettes ou ſalicoques. Je ne crus pas devoir heurter de front leur façon de penſer, avant d'avoir fait l'examen de ce qu'ils m'annonçoient; & je commençai par leur demander de ces cruſtacées qui fuſſent dans l'état où ces pêcheurs me les dépeignoient avec de jeunes ſoles qui leur fuſſent adhérentes & prêtes à paroître. Je ne tardai pas à être pleinement ſatisfait. Ils m'en apportèrent une grande quantité ſur leſquelles je fis les remarques ſuivantes.

Je vis ſur ces chevrettes un renflement très-apparent *B*, à la plus grande écaille du caſque de ce cruſtacée *(fig. 1)*; cette groſſeur indiquoit, ſuivant les pêcheurs, les chevrettes ou ſalicoques ſoupçonnées de porter de jeunes ſoles.

En levant cette écaille *(A, fig. 2)* je trouvai un animal ou inſecte que l'on ne peut comparer à une ſole qu'en ayant l'eſprit préoccupé, & ſans ſe laiſſer entraîner par le goût du merveilleux; je tirai cet animal pour l'examiner avec ſoin, & je mis d'autres chevrettes chargées de ces inſectes dans de l'eau de mer.

J'eus bientôt reconnu que cet animal n'étoit point une jeune ſole, & après l'avoir enlevé de la chevrette à laquelle il étoit adhérent, je m'aſſurai que cet animal avoit quelque rapport, par la forme de ſon corps, avec l'*Oſcabrion;* mais il

diffère du coquillage que l'on a appelé *oſcabrion*, parce qu'il n'eſt point couvert d'écailles articulées.

Comme je ne crois pas que l'inſecte des ſalicoques ait encore été décrit, je vais entrer dans plus de détails qui ſerviront à le faire connoître.

Il a à-peu-près quatre lignes ou quatre lignes & demie de longueur ſur trois lignes dans ſa partie la plus large *(fig. 2)* (l'animal eſt ici groſſi de près de moitié) c'eſt-là le dernier terme où il parvient; il eſt figuré en cœur; une extrémité de ſon corps *(d, fig. 3)* eſt arrondie; l'autre *D* eſt un peu pointue. Je crois ſa tête ſituée vers la partie arrondie. On aperçoit, en regardant l'animal en-deſſous, ſa bouche *(c, fig. 4)* formée par un mamelon ou une eſpèce de trompe comme celle des animaux qui vivent par ſuccion. Une des ſurfaces de ſon corps eſt aplatie, c'eſt le deſſous de l'inſecte *(fig. 4)*, je veux dire celle de l'inſecte qui porte ſur le corps de la chevrette. Le dos de l'inſecte eſt au contraire un peu creuſé & concave *(fig. 2, 3 & 5)*.

Autour de cet inſecte, à la naiſſance des écailles qui bordent la partie ſupérieure, & au milieu deſquelles il paroît une concavité *(fig. 3 & 5)*; on voit, dis-je, à la naiſſance de ces écailles un rang de petits crochets qui lui ſervent ſans doute à ſe cramponner au corps de l'animal ſur lequel il vit. Ces crochets deviennent plus apparens ſur la figure 5 où l'inſecte eſt vu un peu de côté, & ſont marqués par les chiffres *1, 2, 3, 4, 5, 6 & 7*: à la partie moins arrondie qui ſemble être la queue de l'inſecte, en le regardant du côté que nous avons nommé le dos *(D, fig. 3)*, on voit pluſieurs feuillets ou lames qui ſe recouvrent les unes les autres & ſont partagées dans leur milieu *(fig. 6)*.

Lorſqu'on paſſe une pointe pour lever ces écailles ſur des chevrettes pêchées au mois de Juillet, on trouve dans la plupart de ces inſectes un autre petit inſecte placé dans l'eſpace formé par ces lames, & poſé de façon que les crochets, au nombre de ſeize ou dix-huit dont il eſt garni, ſe préſentent à l'Obſervateur *(fig. 7 & 8)*.

Si l'on tire ce petit inſecte pour l'examiner à la loupe, & qu'on le retourne, on le voit composé de pluſieurs anneaux, & on aperçoit vers la queue une portion *L* plus mince & comme voilée *(fig. 9)*.

Deſirant voir cet inſecte dans ſes différens états, je crus ne pouvoir mieux l'obſerver qu'en allant à la pêche des ſalicoques.

J'ai trouvé rarement cet animal attaché à d'autres parties de ces cruſtacées. Quand on le voit ſous l'écaille, il eſt près de ſa perfection; jeune encore & petit, il s'attache entre les pattes & vers l'eſtomac de la chevrette. Il paroît qu'il quitte cette partie de l'animal, pour paſſer ſous l'écaille du caſque du thorax, lorſqu'il a déjà ſongé à ſa multiplication.

On le diſtingue plus facilement quand il eſt adhérent à cette partie de la chevrette, parce que l'inſecte eſt plus gros, qu'il y eſt tranquille & que les ſecouſſes de la chevrette ne peuvent pas le déranger. Sous cette écaille où l'inſecte reſte empriſonné, il eſt adhérent à la chevrette, & en ſe nourriſſant à ſes dépens, il eſt aſſujetti à partager ſon infortune. Si la chevrette eſt priſe & qu'elle meure, l'inſecte a le même ſort; on le fait cuire avec le cruſtacée: l'inſecte fait donc ſes petits ſous cette écaille de la chevrette, & comme les cloportes, il tient quelque temps ce petit enfermé ſous lui.

J'aurois ſouhaité ſuivre avec plus de ſoin la génération de cet inſecte; mais il falloit l'examiner en différentes ſaiſons, & multiplier encore les obſervations; le temps & les facilités manquoient pour me ſatisfaire.

Il eſt certain que cet animal n'eſt point une ſole, & qu'il ne donne point naiſſance aux ſoles, puiſqu'il change peu de forme durant ſa vie, & qu'il produit des petits qui ne reſſemblent, non plus que lui, nullement aux ſoles.

M. Lyonnet *, ſans nier la concluſion de M. Deſlandes, croit que ſon expérience eût été plus ſûre, ſi au lieu d'avoir

* Théologie des Inſectes, Traduction de M. Leſſer, tome I. *A la Haye*, édition de 1742, *page 144*.

mis

mis dans une baille un nombre de chevrettes parmi lesquelles il se seroit pu mêler quelques petites soles sans qu'il les ait vues, il se fût contenté de prendre quelques chevrettes chargées de vessies (qu'il regardoit comme les embryons des soles qui devoient naître); & si ayant mis de ces chevrettes seule à seule dans un vase, il eût vu quelques jours après une petite sole dans l'eau d'un des vases & une vessie de moins à la chevrette, M. Lyonnet dit qu'il y eût eu une preuve plus décisive que la sole seroit née d'une de ces vessies.

On voit aujourd'hui ce qui a trompé M. Deslandes, & que même, en répétant l'expérience, comme l'indique M. Lyonnet, il se seroit assuré, mieux encore à la vérité, que la vessie donnoit origine à un petit animal: mais il falloit que M. Deslandes prêtât au fait plus d'attention, & qu'il s'assurât si c'étoit une vraie sole, ou seulement un animal d'un genre tout différent qui vit sur la chevrette, & à ses dépens.

Cette manière de considérer le fait étant trop simple, on a eu recours au merveilleux; maintenant que nous l'avons dissipé, on ne demandera plus pourquoi & comment les œufs de soles se trouvoient sur des chevrettes; si le mâle les avoit fécondés avant ou après que la Nature les eut confiés aux chevrettes, & c'étoit bien inutilement que l'on imaginoit que ces œufs avoient besoin, pour éclore, du mouvement des chevrettes & de la chaleur produite par l'agitation de ce crustacée; ainsi les soles resteront dans la classe des poissons qui déposent leur frai sur le sable, & il restera pour constant que les chevrettes portent sur leur corps des animaux incommodes qui les sucent.

Nous avons dit que c'étoit gagner & faire un pas utile en Histoire Naturelle que de détruire de fausses idées, & que l'on pouvoit savoir gré à celui qui contredisoit des explications qui seroient au moins inutiles quand elles regardent un fait entièrement faux.

Ceci prouve combien on doit être en garde pour adopter des idées merveilleuses ou singulières; & combien il faut d'attention pour observer, sur-tout quand on se propose

d'établir un ſyſtème ſur ſes obſervations, ou d'en tirer de nouvelles conſéquences.

EXPLICATION DES FIGURES.

Figure 1.re Une chevrette, ſalicoque, ou barbot, avec un renflement ſous l'écaille de ſon caſque qui indique la préſence d'un inſecte que l'on croyoit être une jeune ſole. *B*, cette loupe ou renflement.

Fig. 2. Cette écaille levée & coupée, pour faire voir l'inſecte adhérent à ce cruſtacée. *A*, l'inſecte.

Fig. 3. L'inſecte beaucoup groſſi pour mieux diſtinguer ſes parties; il eſt ici repréſenté vu en deſſus; c'eſt-à-dire que l'on voit la partie de l'inſecte apparente lorſqu'on lève l'écaille du caſque de la chevrette; *d*, ſa tête; *D*, ſa queue; il a ſur les côtés de petits crochets *1, 2, 3, 7*, qui ſervent à le tenir adhérent au corps du cruſtacée.

Fig. 4. L'inſecte vu ſur l'autre face que nous appelons le ventre; *e, e* ſa tête; *E* ſa queue. On y voit du côté de la tête des mamelons ou ſuçoirs qui dénotent ſa bouche; *c* ſa bouche.

Fig. 5. L'inſecte vu ſur le dos, comme dans la figure 3, mais un peu de côté pour mieux apercevoir les crochets *1, 2, 3, 7* qui ſont autour de l'animal; *K* repréſente un de ces crochets deſſiné ſéparément.

Fig. 6. La queue *(D, fig. 3)* de l'inſecte, mais beaucoup groſſie pour offrir plus de détails; *F* des lames ou feuillets qui ſont ſéparés dans le milieu, & qui dans un temps de l'année recouvrent un petit inſecte.

Fig. 7. Cette queue dont on a enlevé les feuillets pour examiner l'inſecte *G* qu'elles recouvroient. On voit ſur ce petit inſecte qu'elles couvroient, pluſieurs crochets qui deviennent apparens depuis que les lames ſont enlevées.

Fig. 8. Ce petit inſecte ſéparé, vu de ce même côté avec ſes crochets, dont deux les plus près de ſa queue ſont plus longs.

Fig. 9. Ce même petit inſecte vu en deſſous, eu égard à la poſition qu'il occupoit *(fig. 7)*; il eſt compoſé de neuf anneaux *I*, & eſt terminé par une partie moins épaiſſe, & comme voilée, *L*.



OBSERVATIONS DE VÉNUS,

DANS SA PLUS GRANDE DIGRESSION,

Et Obſervations de JUPITER, dans ſon oppoſition avec le Soleil; faites à l'Obſervatoire Royal en 1772.

Par M. JEAURAT.

LE mural où j'ai fait mes obſervations, ne vaut pas, à beaucoup près, celui dont M.rs Caſſini ſe ſervent habituellement & aſſidûment. Le leur a 6 pieds de rayon; & ſon plan eſt peut-être auſſi exactement qu'il ſoit poſſible dans le plan du Méridien. Le mien n'a que 5 pieds de rayon, & le ſeul point de ſon limbe qui ſoit ſenſiblement dans le plan du Méridien, eſt celui de la hauteur de 49 degrés: il a été placé en 1682, par les ſoins de M.rs D. Picard & de la Hire; & pour en faire uſage avec fruit, il m'eſt eſſentiel d'en vérifier par des hauteurs correſpondantes l'exacte poſition à l'égard du plan du Méridien: or, c'eſt ce que j'ai commencé de faire, en comparant, avec M. Caſſini le fils, plufieurs midis obſervés à nos deux muraux, & cela les jours où d'ailleurs il avoit été pris des hauteurs correſpondantes du Soleil.

Cette vérification de mon inſtrument, ſi importante pour la ſûreté de mes Obſervations, n'a pas, à beaucoup près, été faite aſſez de fois pour que j'y puiſſe compter beaucoup; mais l'eſſentiel eſt que j'ai obtenu à cet égard une préciſion ſuffiſante pour les Obſervations que je donne dans ce Mémoire, & préalablement à toutes vérifications de la déviation de mon mural. Voici, quant au moment préſent, la détermination ſur laquelle j'ai fait fonds dans mon Mémoire.

CORRECTIONS à faire à mon mural, pour les ascensions droites observées.

Hauteurs.	Déclinaisons.	Corrections en temps.
Degrés.	*D. M. S.*	*S.*
10.	A. 31. 9. 46	+ 11,5
15.	26. 9. 46	+ 10,9
20.	21. 9. 46	+ 10,2
25.	16. 9. 46	+ 9,5
30.	11. 9. 46	+ 8,9
35.	6. 9. 46	+ 8,2
40.	1. 9. 46	+ 5,2
45.	B. 3. 50. 14	+ 2,2
50.	8. 50. 14	— 0,8
55.	13. 50. 14	— 3,8
60.	18. 50. 14	— 8,3
65.	23. 50. 14	— 12,7
70.	28. 50. 14	— 17,1

CORRECTIONS EN DEGRÉS.

Hauteurs.	Déclinaisons	Corrections
Deg.	*Deg.*	*M. S.*
60. 0	B. 18. 50	+ 2. 0
60. 30	19. 20	+ 2. 7
61. 0	19. 50	+ 2. 15
61. 30	20. 20	+ 2. 22
62. 0	20. 50	+ 2. 30
62. 30	21. 20	+ 2. 37
63. 0	21. 50	+ 2. 45
63. 30	22. 20	+ 2. 52
64. 0	22. 50	+ 3. 0
64. 30	23. 20	+ 3. 7
65. 0	23. 50	+ 3. 15
65. 30	24. 20	+ 3. 21
66. 0	24. 50	+ 3. 27
66. 30	25. 20	+ 3. 33
67. 0	25. 50	+ 3. 39
67. 30	26. 20	+ 3. 45
68. 0	26. 50	+ 3. 51
68. 30	27. 20	+ 3. 57
69. 0	27. 50	+ 4. 3
69. 30	28. 20	+ 4. 9
70. 0	28. 50	+ 4. 15

J'ajoute que mon instrument donne les hauteurs vraies, en retranchant, non-seulement comme il convient, l'effet de la réfraction, mais aussi la quantité constante 57 secondes: alors la hauteur vraie étant comparée à la hauteur de l'Équateur, $41^d\ 9'\ 46''$, on a, comme de raison, les déclinaisons cherchées.

Comme mon mural a une déviation considérable, il est évident que n'ayant pas toujours été le maître de comparer au Méridien les Planètes observées avec des Étoiles connues

qui fussent dans le même parallèle, il étoit indispensable que je corrigeasse de l'erreur de mon instrument les ascensions droites observées: aussi n'ai-je pas manqué de faire à mes Observations ces corrections dont je me suis procuré la connoissance; & immédiatement à côté de chaque ascension droite observée, j'ai mis la correction particulière que j'y ai faite; ce qui fait que dans ce Mémoire, non-seulement je donne les Observations telles qu'elles ont été faites, mais aussi les quantités dont je les ai corrigées, & dont j'ai conclu les vraies ascensions droites cherchées.

Ayant aussi réduit les déclinaisons marquées par l'instrument aux déclinaisons vraies, j'ai déduit du tout les lieux géocentriques observés. De plus, ayant calculé ces mêmes lieux géocentriques avec les Tables publiées par M. de la Lande dans la seconde édition de son Astronomie, j'ai déduit l'erreur des Tables, tant en longitude qu'en latitude: alors, j'ai trouvé par un milieu pris entre les différentes Observations, que les Tables de Vénus à $45^d\ 18'\ 28''$ d'élongation, & à $8^f\ 17^d\ 32'\ 30''$ d'anomalie moyenne, différoient du vrai de $-30''$ en longitude héliocentrique, & de $-15''$ en latitude héliocentrique; & que les Tables de Jupiter diffèrent du vrai à $4^f\ 20^d\ 37'\ 14''$ d'anomalie moyenne, de $+2'\ 45''$ en longitude héliocentrique, & de $-31''$ en latitude héliocentrique. Pour mes huit Observations de Jupiter, dont la dernière a été faite $6^h\ 35'$ avant l'opposition, l'erreur de mon instrument en ascension droite a été nulle, parce que Jupiter & les deux Étoiles α du Capricorne, auxquelles il a été constamment comparé, passoient tous trois dans le même champ de la lunette.

Quant aux Observations de Vénus, celles du 20 & du 21 Avril ont aussi été dans le cas de n'être assujetties à aucune correction, par rapport à l'ascension droite, parce que Vénus étoit très-près du même parallèle de ζ du Lion; mais en Mai la correction en ascension droite a été jusqu'à $1'\ 7''$ en plus, & le 15 Juin elle a été de $7'\ 7''$ en moins, comme le marquent mes calculs.

De mes vingt-une Observations de Vénus faites en Avril, en Mai & en Juin, il est à remarquer que celle du 7 Mai est propre à rectifier les Tables quant à l'inclinaison de Vénus, parce que le Soleil étoit dans le nœud de cette Planète *(Astronomie de M. de la Lande, article 1357)*, & que l'Observation du 2 Juin est propre à fixer le lieu de l'aphélie, parce que *(Astronomie de M. de la Lande, art. 1318)*, Vénus étoit presque dans sa plus grande digression; mais je réserve ces discussions de théorie pour un Mémoire particulier que je donnerai dans peu, & où je discuterai même les Observations de Flamsteed, faites dans des circonstances pareilles, & propres à fixer les principaux élémens de la théorie: & je ferai en sorte de décider, autant qu'il me sera possible, la question du vrai mouvement de l'aphélie de Vénus; savoir, si effectivement M. de la Lande a fait ce mouvement trop grand, comme on est presque tenté de le croire d'après M.rs Halley & Cassini. Enfin je termine ce Mémoire par les Observations que voici, & qui sont, comme je l'ai dit, accompagnées de leurs calculs & des conséquences que j'en ai tirées.

Position apparente des Étoiles qui ont servi à déterminer les lieux géocentriques de Vénus, observés en Avril, en Mai & en Juin 1772.

ζ du Lion, en Avril 1772, *Connoissance des Temps, année 1769, p. 203.*	Ascension droite	$150^d\ 59'\ 55''$
	Déclinaison boréale	24. 32. 33.
	Hauteur de l'instrument	65. 43. 44.
	Correction des hauteurs apparentes	— 0. 57.
	Correction de l'instrument en degrés pour l'ascension droite	+ 3. 21.
δ du Lion, en Mai 1772, *Connoissance des Temps, année 1764, p. 99.*	Ascension droite	$165^d\ 29'\ 37''$
	Déclinaison boréale	21. 46. 10.
	Hauteur de l'instrument	62. 57. 17.
	Correction de l'instrument en degrés pour l'ascension droite	+ 2. 45.

Arcturus, en Mai 1772. *Connoiſſance des Temps, année 1763, p. 93.*	Aſcenſion droite	211^d 20′ 8″
	Déclinaiſon boréale	20. 24. 37.
	Hauteur de l'inſtrument	61. 33. 37.
	Correction de l'inſtrument en degrés, pour l'aſcenſion droite	+ 2. 22.
ε précédente du Bouvier, déterminée par δ du Lion & par Arcturus.	Aſcenſion droite	218^d 45′ 11″
	Déclinaiſon boréale	28. 2. 45.
	Correction de l'inſtrument en degrés, pour l'aſcenſion droite.	+ 4. 9.

Selon le Catalogue des Étoiles fixes de feu M. l'Abbé de la Caille, & ſelon la Connoiſſance des Temps, *année 1770, page 160,* ε du Bouvier a une aſcenſion droite plus grande d'une minute que celle que je donne ici; peut-être cette différence eſt-elle une erreur provenant de celle que j'ai aſſignée à mon inſtrument: c'eſt ce que j'examinerai lorſque je vérifierai de nouveau la véritable poſition de mon mural. Quant à la variation de la déclinaiſon d'Arcturus, M. de la Lande m'a averti que dans ſon Catalogue des Étoiles fixes, *page 213 de la ſeconde édition de ſon Aſtronomie,* & pour l'eſpace de dix années,

il faut lire	vers 1750 — 3′ 14″,0,	& non pas	— 2′ 14″,0.
	vers 1770 — 3. 13,6,		— 2. 13,6.
	vers 1800 — 3. 12,9,		— 2. 12,9.

OBSERVATIONS de Vénus faites au mural de M. PICARD, à l'Observatoire Royal de Paris, en 1772.

JOURS des Observat.	TEMPS de la pendule pour les passages au méridien.				
	VÉNUS.	ζ du Lion.	δ du Lion.	Arcturus.	ε du Bouvier.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.
20 Avril.	2. 40. 28	8. 4. 8			
21.....	2. 41. 42	8. 0. 25			
4 Mai..	2. 57. 16	......	8. 9. 45	11. 12. 37	11. 42. 7
5.....	2. 58. 25	......	8. 6. 0	11. 8. 53	11. 38. 22
6.....	2. 59. 34	......	8. 2. 16	11. 5. 8	11. 34. 37
7.....	3. 0. 41	......	7. 58. 31	11. 1. 23	11. 30. 53
8.....	3. 1. 47	......	7. 54. 45	10. 57. 38	11. 27. 8
9.....	3. 2. 53	......	....	10. 53. 54	11. 23. 23
14.....	3. 8. 12				
24.....	3. 17. 7				
26.....	3. 18. 9	......	....	9. 50. 25	10. 19. 55
29.....	3. 19. 49	......	....	9. 31. 11	10. 8. 40
2 Juin.	3. 21. 27	......	....	9. 24. 9	9. 53. 38
5.....	3. 22. 5				
8.....	3. 22. 23	......	....	9. 1. 29	9. 30. 59
10.....	3. 22. 11				
11.....	3. 22. 3				
13.....	3. 21. 38	......	....	8. 38. 46	
14.....	3. 21. 13				
15.....	3. 20. 56	......	....	8. 34. 56	9. 4. 26
16.....	3. 20. 30	......	....	8. 31. 10	9. 0. 40

RÉDUCTION

RÉDUCTION DES PRINCIPALES OBSERVATIONS DE VÉNUS.

TEMPS VRAI des Obſervations DE VÉNUS. *Année 1772.*	Aſcenſ. droite de Vénus, non corrigée.	Correction de l'inſtrument.	Aſcenſion droite de Vénus, corrig. de l'erreur de l'inſtrument.	Déclinaiſon vraie de Vénus, corrigée de l'erreur de l'inſtrument.
H. M. S.	*Deg. M. S.*	*S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*
20 Avril.. 2. 43. 52	69. 52. 25	+ 0	69. 52. 25	24. 15. 26 B.
21........2. 45. 5	71. 6. 45	+ 0	71. 6. 45	24. 27. 16 B.
4 Mai. . 3. 0. 6	87. 10. 22	+ 72	87. 11. 34	26. 0. 12 B.
5.......3. 1. 8	88. 23. 56	+ 72	88. 25. 8	26. 2. 40 B.
6.......3. 2. 11	89. 37. 26	+ 67	89. 38. 33	26. 4. 39 B.
7.......3. 3. 11	90. 50. 38	+ 67	90, 51. 45	26. 5. 49 B.
8.......3. 4. 10	92. 3. 51	+ 67	92. 4. 58	26. 6. 29 B.
9.......3. 5. 9	93. 17. 29	+ 25	93. 17. 54	26. 6. 29 B.
26.......3. 16. 35	113. 1. 15	+ 10	113. 1. 25	24. 30. 7 B.
29.......3. 17. 22	116. 15. 35	+ 0	116. 15. 35	23. 56. 6 B.
2 Juin...3. 17. 43	120. 26. 13	— 12	120. 26. 1	23. 4. 33 B.
8.......3. 6. 36	126. 21. 0	— 40	126. 20. 20	21. 34. 20 B.
15.......3. 12. 49	132. 38. 28	— 67	132. 37. 20	19. 33. 44 B.

CALCUL des Obſervations de Vénus, & Détermination de l'erreur des Tables de la ſeconde édition de l'Aſtronomie de M. de la Lande.

TEMPS VRAI des Obſervations DE VÉNUS.	Longit. géocent. obſervée de Vénus.	Latit. géocen. obſervée de Vénus, boréale.	ERREUR DES TABLES en longit.	en latit.	ANOMALIE moyenne DE VÉNUS.
H. M. S.	*Sig. D. M. S.*	*D. M. S.*	*S.*	*S.*	*Sig. D. M. S.*
20 Avril.. 2. 43. 44	2. 11. 42. 17	2. 3. 48	— 37	— 8	6. 8. 37. 2
21......2. 44. 54	2. 12. 51. 0	2. 6. 32	— 31	— 12	6. 10. 13. 12
4 Mai.. 3. 0. 6	2. 27. 28. 29	2. 33. 51	— 26	— 12	7. 1. 3. 41
5......3. 1. 8	2. 28. 34. 42	2. 35. 27	— 23	— 17	7. 2. 39. 53
6......3. 2. 11	2. 29. 40. 43	2. 36. 50	— 18	— 18	7. 4. 16. 4
7......3. 3. 11	3. 0. 46. 31	2. 38. 6	— 12	— 14	7. 5. 52. 15
8...... 3. 4. 10	3. 1. 52. 20	2. 39. 27	— 10	— 16	7. 7. 28. 25
9...... 3. 5. 9	3. 2. 57. 53	2. 40. 40	— 13	— 18	7. 9. 4. 37
26......3. 16. 35	3. 20. 52. 19	2. 41. 32	— 20	— 11	8. 6. 19. 31
29......3. 17. 22	3. 23. 52. 47	2. 37. 25	— 25	— 12	8. 11. 7. 57
2 Juin.. 3. 17. 43	3. 27. 48. 15	2. 30. 15	— 35	— 15	8. 17. 32. 30
8...... 3. 16. 36	4. 3. 28. 5	2. 14. 56	— 46	— 12	8. 27. 8. 59
15...... 3. 12. 49	4. 9. 40. 17	1. 46. 48	— 56	— 13	9. 8. 21. 57

POSITION apparente des deux étoiles α du Capricorne, qui ont servi à l'observation de l'opposition de Jupiter avec le Soleil, du 19 Août 1772.

α précédente du Capricorne.	Ascension droite	301ᵈ 16′ 1″
	Déclinaison australe	13. 11. 52.
α suivante du Capricorne.	Ascension droite	301ᵈ 21′ 46″
	Déclinaison australe	13. 13. 52.

OBSERVATIONS de Jupiter, faites au mural de l'Observatoire Royal de Paris, en 1772.

JOURS des Observations.	TEMPS DE LA PENDULE POUR LES PASSAGES AU MÉRIDIEN.		
	α précédente du Capricorne.	α suivante du Capricorne.	CENTRE DE JUPITER.
11 Août	10ʰ 36′ 51″	10ʰ 37′ 14″	12ʰ 36′ 51″
12	10. 33. 7	10. 33. 30	12. 32. 37
13	10. 29. 22	10. 29. 45	12. 28. 23
15	10. 21. 54	10. 22. 17	12. 19. 55
16	10. 18. 9	10. 18. 32	12. 15. 40
17	10. 14. 25	10. 14. 48	12. 11. 26
18	10. 10. 41	10. 11. 4	12. 7. 12
19	10. 6. 57	10. 7. 20	12. 2. 57

CALCUL DES OBSERVATIONS DE JUPITER.

TEMS VRAI des Observations de Jupiter. *Année 1772.*	Ascens. droite observée de Jupiter.	Déclinaison observée de Jupiter.	Longit. géocent. observée de Jupiter.	Lat. géocen. observée de Jupiter.
		Australe.		
11 Août.. à 12ᵈ 37′ 20″	331ᵈ 20′ 39″	13ᵈ 5′ 12″		
12 à 12. 33. 0	331. 13. 9	13. 8. 2		
13 à 12. 28. 45	331. 5. 37	13. 10. 52		
15 à 12. 20. 15	330. 50. 50	13. 16. 32		Australe.
16 à 12. 16. 0	330. 43. 18	13. 19. 22.	*Sig. D. M. S.*	*D. M. S.*
17 à 12. 11. 47	330. 35. 50	13. 22. 12	10. 27. 58. 16	1. 15. 25
18 à 12. 7. 34	330. 28. 10	13. 25. 2	60. 27. 50. 18	1. 15. 30
19 à 12. 3. 20	330. 20. 33	13. 27. 52	10. 27. 42. 22	1. 15. 35

RÉSULTAT des Observations de Jupiter.

Opposition obs. de Jupiter le 19 Août 1772, à 18h 38′ 30″, Temps vrai.
à 18. 41. 40, Temps moy.

Longitude héliocentrique observée	10s 27d 40′ 10″
Calculée selon M. Wargentin	10. 27. 42. 55.
Calculée selon mes Tables	10. 27. 43. 30.
Erreur des Tables de M. Wargentin	+ 2. 45.
Erreur des miennes	+ 3. 20.
Latitude géocentrique observée, australe	1d 15′ 33″
Latitude héliocentrique, déduite de l'observation australe	1. 0. 19.
Latitude calculée, selon M. Wargentin, australe	0. 59. 48.
Erreur des Tables de M. Wargentin, en latitude	− 31.
Enfin Jupiter avoit alors pour anomalie moyenne, selon M. Wargentin	4s 20d 37. 14″
Selon moi	4. 20. 43. 39.



DESCRIPTION

De plusieurs BOUSSOLES *qui sont établies dans le parc de Denainvilliers, pour observer les variations de l'Aiguille aimantée, tant en déclinaison qu'en inclinaison.*

Par M. DU HAMEL.

COMME en 1744, on parloit beaucoup d'un procédé par lequel un Médecin anglois, nommé *M. Knight*, procuroit une très-grande force magnétique à des barreaux d'acier trempé dur, j'essayai d'apprendre quel étoit son procédé; mais mes tentatives furent inutiles : feu Milord Duc de Richemont m'écrivit même que M. Knight étoit si éloigné de vouloir publier sa méthode, qu'on ne tireroit pas son secret, quand même on le chargeroit de guinées. Ne pouvant espérer d'obtenir le mot de l'énigme que le Docteur Anglois proposoit aux Physiciens, je tentai de le deviner; heureusement je me rappelai des expériences que j'avois faites il y avoit quelques années, avec M. Lemaire fils, Ingénieur pour les Instrumens de Mathématiques; elles me mirent sur la voie, & dès-lors je crus apercevoir une route qui devoit me conduire à la résolution du problème Physique qui excitoit ma curiosité.

Mes espérances se sont réalisées, puisque je suis parvenu à faire des barreaux d'acier, au moins aussi chargés de la vertu magnétique que ceux qui nous étoient venus d'Angleterre, comme on le peut voir dans le volume des Mémoires de l'Académie, publié en 1745.

Comme il seroit superflu de répéter ici ce qu'on peut trouver à l'endroit cité, je me contenterai, pour en rafraîchir la mémoire, de rapporter un seul fait : le voici en peu de mots.

Si l'on touche avec une pierre d'aimant un barreau d'acier

qui ait, si l'on veut, deux pieds de longueur, on remarque que la plus grande force magnétique de ce barreau, est à l'extrémité par laquelle on a fini la touche; & si l'on scie avec de l'émeri pour ne point causer d'ébranlement, deux ou trois pouces de l'extrémité de ce barreau, on trouve qu'il a beaucoup plus de force que ce qui en reste; de sorte qu'on peut, en cet état, le comparer aux petits barreaux qui nous avoient été envoyés d'Angleterre. Je n'en suis pas resté-là, & plusieurs personnes engagées, par la découverte que nous venons d'annoncer, se sont occupées de faire des barres magnétiques. M. Antheaume s'étant joint à moi, qui étois pourvu d'excellentes barres magnétiques, de deux pieds six pouces de longueur, nous sommes parvenus à remplir supérieurement une seconde propriété qu'avoient les aimans artificiels de M. Knight, elle consiste à employer ces aimans artificiels avec plus de succès que les naturels, pour communiquer aux aiguilles des boussoles une grande force magnétique. Nous avons fait, de plus, des faisceaux magnétiques d'une grande force, & des aimans artificiels en forme de fer à cheval. M. l'abbé Carron nous en a fait voir un exécuté suivant mon principe, qui pesoit neuf livres, & qui portoit plus de quatre-vingts livres; M. Antheaume de son côté a imaginé des moyens de diminuer le frottement des aiguilles de boussoles sur leur pivot; ces moyens sont représentés *(fig. 1, 2 & 3)*. M. Antheaume, pour empêcher que ces aiguilles très-mobiles ne fussent volages, a collé sous la rose, de petites ailes de papier très-légères, qui ayant de la peine à diviser l'air, empêchoient les trop grands mouvemens de cette rose.

J'abrège tous les détails qu'on trouve dans les Mémoires de l'Académie, *année 1750;* mais je crois devoir rapporter encore un moyen très-ingénieux & fort simple, que M. Antheaume a employé pour faire des barreaux magnétiques, sans le secours d'aucun aimant, ni naturel ni artificiel: voici une idée fort abrégée de son procédé. M. Antheaume remarqua qu'en plaçant un barreau de fer, tel qu'il soit, dans la direction de l'axe magnétique, il acquéroit une très-petite force

magnétique, qui se réduisoit à avoir des pôles qu'on connoît en présentant ce barreau à une aiguille aimantée : cette vertu, à la vérité, n'est que passagère, & elle ne subsiste plus quand on ôte le barreau de l'axe magnétique ; mais M. Antheaume a su profiter de cette légère impression de magnétisme pour, en conservant le barreau dans l'axe magnétique, frotter assez long-temps de petites verges de fer, grosses comme de fortes broches à tricoter, aux deux bouts desquelles il attachoit une masse de fer, comme seroit un étau à main. Par ce moyen il a rendu les broches capables d'attirer de petites parcelles de limaille ; & en formant, avec un nombre de ces broches, un petit faisceau qui lui a servi à toucher des broches un peu plus grosses, il est parvenu, par degrés, à faire des aimans artificiels très-bons : voici encore un fait qui me paroît mériter de trouver place ici.

M. Antheaume desirant avoir un faisceau magnétique comme les miens, nous cherchames chez un Marchand de fer, des barreaux d'acier d'Angleterre, le plus parfait qu'il nous fût possible; après les avoir fait limer & réduire aux dimensions que nous desirions, comme nous voulions les avoir fort durs, nous les portames chez un Ouvrier qui faisoit des noix pour des moulins à café, lui recommandant de les tremper en paquet le mieux qu'il lui seroit possible, ce qu'il exécuta : mais quelle fut notre surprise quand nous vimes qu'avec nos meilleurs barreaux, nous ne pouvions leur procurer qu'une force magnétique très-foible ; nous les mimes rougir dans une cheminée, au milieu du charbon de bois, & nous les trempames à l'ordinaire dans de l'eau froide, alors ils reçurent très-bien la vertu magnétique. Oseroit-on, pour expliquer ce fait si singulier, dire que par la trempe en paquet, on avoit surchargé cet acier de soufre, & qu'on l'avoit presque réduit à l'état de la mine de fer qui ne contracte point la vertu magnétique ? Mais je m'écarte de mon objet qui consiste à décrire les boussoles qui m'ont servi pour mes observations.

Ces boussoles sont établies chacune sur un pilier de pierre

de taille, dans différens bosquets du parc de Denainvilliers. Il y en a quatre de déclinaison, & deux d'inclinaison; je les distinguerai par les chiffres Romains I, II, III, IV, V, VI. Toutes ces aiguilles sont faites avec de l'acier d'Angleterre, trempé dur, & touchées avec nos barreaux; ainsi elles avoient une grande force magnétique : le pivot qui les supporte, est reçu aux unes dans des chapes d'agate bien travaillées, & aux autres dans des chapes de cuivre bien écroui; on a fait en sorte que les aiguilles de déclinaison fussent parfaitement de niveau, après avoir été aimantées. Toutes ces attentions devant rendre nos aiguilles très-sensibles, il étoit d'autant plus important d'empêcher qu'aucune cause extérieure ne pût les faire varier; ainsi, pour prévenir que le fer, qui est toujours dans les bâtimens, ne dérangeât leur vraie direction, nous les avons placées dans différens bosquets sur des piédestaux de pierre de taille, évitant d'employer dans leur construction, ni brique ni mortier de ciment, de crainte qu'un peu de fer revivifié par la cuisson, ne pût agir sur nos aiguilles : voilà des considérations générales, parlons maintenant de chacune de ces boussoles en particulier.

La *figure 1.ere* représente une petite boussole de déclinaison, dont l'aiguille est soutenue suivant le système de M. Antheaume, dont nous avons parlé plus haut. Numéro I.er

a est une boîte de cuivre qui renferme l'aiguille.

b son couvercle.

La *figure 2* représente cette boîte coupée verticalement par son axe.

b le couvercle; *a* le corps de la boîte dans laquelle on voit l'aiguille posée sur son pivot, dont nous donnerons dans la suite la description.

Cette aiguille qui n'a que six pouces de longueur, est donc renfermée dans une boîte *a*, sous une glace qui est recouverte par le couvercle *b*; de plus, pour qu'elle soit plus à l'abri de l'humidité, cette boîte est encore recouverte d'une calotte de cuivre *c c*; en *d* est une charnière, & en *e* une serrure entièrement de cuivre, même les ressorts & la clef. Le

dosseret de pierre *f* est destiné à recevoir la calotte, pour que quand on l'ouvre, la charnière *d* ne soit point fatiguée.

Moyennant ces attentions, l'aiguille est parfaitement à couvert de l'humidité; aussi depuis plusieurs années qu'elle est en cet état, elle n'a pas été attaquée de la rouille : il nous reste maintenant à expliquer la disposition que nous avons donnée au support de l'aiguille, pour qu'elle fût très-mobile.

Au milieu & au fond de la boîte *a* représentée par *A B* *(fig. 3)*, il s'élève bien à-plomb un petit pilier de cuivre *C D:* au centre de la partie supérieure *D* de ce pilier est un petit trou pour recevoir la pointe d'en bas du fuseau de cuivre *E F;* & afin que ce fuseau se place exactement dans la verticale, on a ajouté à la moitié de sa hauteur, quatre balanciers semblables à ceux marqués *G (fig. 3)*, ayant soin d'ajuster tellement les petits poids *G*, que les deux pointes *E F* du fuseau fussent exactement placées dans la verticale : on pose sur la pointe *F* du fuseau, la chape *H* de l'aiguille *I K*, qui se termine en pointes à ses deux extrémités; néanmoins pour pouvoir observer les degrés avec encore plus d'exactitude, j'ai attaché sur l'aiguille, avec de la cire, deux fils d'acier très-fins *L L*, qui approchent tout près du limbe où sont marqués les degrés.

Par cette disposition, s'il y avoit un petit arêt en *F*, elle tourneroit sur l'autre pivot marqué *E*, & cette aiguille est en même temps très-sensible & très-mobile, puisqu'en lui présentant successivement à 15 pieds de distance, les deux pôles d'une de nos grandes barres, la direction de l'aiguille change de place.

Numéro II. La *figure 4* représente une plus grande boussole de déclinaison, elle est établie dans un autre bosquet sur un pilier de pierre de taille *AB:* pour recevoir l'aiguille qui a quinze pouces de longueur, nous avons fait creuser dans une pierre de liais bien dure, une cuvette *C (fig. 4, 5 & 6)*, qui a seize pouces de diamètre en dedans, & quatre pouces de profondeur; sur les bords de cette cuvette, qui ont un pouce & demi d'épaisseur, est ménagée une feuillure pour recevoir une

une glace ſous laquelle eſt un limbe d'argent qui porte les diviſions ; au centre de cette cuvette s'élève le ſtyle *E (fig. 7)*, pour ſupporter l'aiguille *HH*, qui a 15 pouces de longueur, 12 lignes de hauteur verticale, & une ligne d'épaiſſeur. Ceci demande quelque éclairciſſement.

Comme nous nous étions aſſurés qu'un barreau d'acier un peu fort prend plus de force magnétique, qu'un qui ſeroit plus léger, il nous reſtoit à connoître ſi cette augmentation de force eſt plus conſidérable que ce qu'on doit perdre par les frottemens qui ſont aſſurément plus grands quand on emploie des aiguilles peſantes que lorſqu'on en prend de légères.

Pour ſavoir à quoi nous en tenir, & afin de mettre en comparaiſon deux aiguilles, dont l'une ſeroit peſante, & l'autre très-légère, j'ai beaucoup augmenté les dimenſions de l'aiguille *numéro II.* Mais comme nous avons remarqué que dans une règle d'acier d'un pouce de largeur, il ſe rencontroit des filets qui ſont plus durs, & pour ainſi dire plus acier que d'autres, nous avons ſoupçonné que ces parties dures prenant plus de force magnétique que les autres, donneroient une fauſſe direction à l'aiguille ſi elles ſe trouvoient placées diagonalement dans la longueur de notre large aiguille. Pour éviter cet inconvénient, nous avons pris le parti de placer nos aiguilles ſur le champ, comme on le voit en *D (fig. 7)*; & au milieu ou au point *D*, la règle *HH* étoit creuſée en forme de gouttière pour recevoir la chape, dont l'ouverture conique répondoit exactement au milieu de l'épaiſſeur de la règle : il eſt ſenſible que s'il y a des filets d'acier plus durs les uns que les autres, ils ne peuvent pas produire une erreur conſidérable, puiſque l'aiguille n'a qu'une ligne d'épaiſſeur*.

* Comme on a ſoupçonné, & ce n'eſt peut-être pas ſans raiſon, que l'électricité pouvoit cauſer les variations qu'on remarque dans les aiguilles, je me ſuis propoſé d'ôter la glace qui recouvre mon aiguille, & qui pourroit retenir l'électricité ; j'ai donc mis à la place de cette glace un fort carton bien battu, qui étoit ferme comme une planche ; j'y ai fait une ouverture vis-à-vis le limbe d'argent qui portoit les degrés : j'ai couvert cette ouverture avec un morceau de corne très-tranſparente. On verra, lorſque je rapporterai les variations de toutes ces bouſſoles, que celle-ci n'en a pas été plus exempte que les autres.

E (fig. 7) eſt le ſtyle; *FF* repréſente le fond de la cuvette qui eſt ſolidement ſcellée ſur le pilier *AB (fig. 4).*

L'aiguille eſt tenue à couvert de la pluie, & même de l'humidité de l'air, par une glace qui recouvre toute la cuvette de pierre, & qui eſt ſcellée dans la feuillure avec de la cire; & en outre par un couvercle de cuivre *G (fig. 4)*, qui joint exactement l'extérieur de la cuvette de pierre, bien entendu qu'on l'ôte lorſqu'on veut obſerver. On a, comme à la bouſſole, *numéro I.er* attaché avec de la cire aux deux extrémités de cette aiguille, des pointes d'acier très-déliées *HH (fig. 7)*, qui indiquent très-préciſément les degrés gravés ſur le limbe d'argent qui eſt ſous la glace.

Numéro III. Pour m'aſſurer laquelle des deux aiguilles, ſavoir une peſante, telle que celle que je viens de décrire, & une autre très-légère, ſeroit la plus avantageuſe pour connoître les variations, j'ai fait faire, avec tout le ſoin poſſible, une aiguille très-légère, pas plus groſſe qu'une broche à tricoter; elle a été placée dans un boſquet particulier ſur un pilier de pierre de taille. Mais pour éviter de multiplier inutilement les figures, je ne l'ai pas repréſentée ſur la planche; le peu que je viens de dire étant ſuffiſant pour en donner une idée juſte; & on verra par le détail de nos obſervations, que l'aiguille peſante eſt au moins auſſi ſenſible que la légère: je dois ſeulement prévenir que celle-ci n'a que 7 pouces de longueur.

Numéro IV. Pour connoître encore plus ſenſiblement les variations des bouſſoles, j'ai fait établir dans un boſquet ſéparé une bouſſole de déclinaiſon, dont les degrés marqués ſur le limbe, ont un pied & ſont diviſés en 60 minutes.

Il en faut donner la deſcription. La *figure 8* repréſente la poſition de cette grande bouſſole relativement au limbe; *A* eſt la boîte où eſt renfermée l'aiguille; *B* eſt le limbe qui en eſt éloigné de 52 pieds. La ligne ponctuée *NS* indique la direction nord & ſud, elle eſt coupée à angle droit par la ligne *EO* qui eſt orientée eſt & oueſt, & la ligne *AB* déſigne la déclinaiſon actuelle de l'aiguille; le limbe ne s'étend pas juſqu'aux lignes nord & oueſt, parce qu'on

l'a placé à l'endroit où ſe font, depuis nombre d'années, les variations : ſi elle venoit à excéder l'étendue du limbe, nous ſerions obligés de l'augmenter ou de le changer de place, mais probablement cela n'arrivera pas. L'aiguille *(fig. 9)* de cette bouſſole a 14 pouces de longueur, elle eſt formée par deux lames qui ſe touchent exactement, excepté au milieu de leur longueur, à l'endroit *C* où elles ſont courbées ſur leur plan pour recevoir la chape dans laquelle doit entrer le ſtyle qui ſupporte l'aiguille. Les deux lames forment donc, par leur réunion, une ſeule aiguille, comme on le voit en *D:* on aperçoit vers l'extrémité de cette aiguille, deux pointes d'acier *a b* très-déliées qui s'élèvent perpendiculairement; elles ſervent de points de mire, comme nous le dirons dans la ſuite. Cette aiguille eſt établie dans une gouttière de pierre de liais *E* *(fig. 10)*, qui repréſente la bouſſole vue en plan, ſans ſon couvercle de pierre de liais, qu'on voit en *f (fig. 11 & 12)*.

b (fig. 11) eſt le fond de cette gouttière qui eſt encaſtrée d'une partie de ſon épaiſſeur dans la pierre de taille qui forme le deſſus du pilier *a b*, ſur lequel eſt poſée la bouſſole, comme on le voit à la *figure 11* qui repréſente le pilier coupé par une ligne parallèle à l'aiguille; on la voit dans ſa longueur poſée ſur ſon pivot, qui eſt au-deſſus de *b*, comme elle eſt repréſentée en plan à la *figure 10*; la hauteur *ab (fig. 11)* de ce pilier eſt de 4 pieds; ſa largeur *e d* de 22 pouces: on voit donc dans cette figure la coupe de la gouttière de liais encaſtrée dans la pierre de taille, qui fait le couronnement de ce pilier, & l'on aperçoit comment l'aiguille eſt placée ſur ſon pivot dans cette gouttière, ainſi que les fils d'acier qui ſervent de points de mire, pour, par la prolongée de la ligne depuis *A* juſqu'à *B (fig. 8)*, apercevoir à quelle diviſion du limbe répond le plan de l'aiguille.

Les deux bouts de cette gouttière de liais ſont fermés par des glaces enchâſſées & maſtiquées dans un cadre de menuiſerie, qui joint la partie intérieure de la gouttière de liais; & pour intercepter le paſſage, non-ſeulement à l'humidité, mais même à l'air, on a enduit l'épaiſſeur du cadre qui entre

dans la gouttière de liais, d'une couche de cire & de ſuif, de ſorte que ſi l'on rempliſſoit d'eau la gouttière, elle ne ſe videroit pas. Quoique cette gouttière ait un couvercle de pierre de liais qui fait ſaillie d'un pouce tout au pourtour de la gouttière de liais, dont les bords ſont reçus dans une feuillure creuſée dans le couvercle, ainſi qu'on le voit à la *figure 12;* j'ai en outre mis aux quatre angles du pilier de pierre de taille quatre forts montans de bois, retenus par des traverſes aſſemblées à tenons & mortaiſes avec les montans; toute la partie d'en haut qui renſerme la bouſſole eſt garnie de panneaux de menuiſerie qui forment un petit toit *G,* comme on le voit à la *figure 12.* Aux deux bouts *ff* de cette menuiſerie *(fig. 11),* ſont deux petits volets vitrés, à charnière de cuivre; car on ouvre ces volets quand on veut obſerver, il n'y a que les glaces au bout de la gouttière de liais qui reſtent en place, & au travers deſquelles on fait les obſervations.

Pour tenir cette bouſſole encore plus à l'abri des impreſſions de l'air, nous avons rempli l'eſpace qui eſt entre la gouttière de liais & la menuiſerie avec de l'étoupe, que nous avons bien foulée; enfin, le tout eſt recouvert d'une toile bien ſerrée, enduite des deux côtés de pluſieurs couches de rouge broyé à l'huile.

H (fig. 13) eſt le limbe fait d'une bande de pierre de liais très-dure, dans laquelle, ſur la face oppoſée aux diviſions, eſt noyée & ſcellée en plâtre une forte barre de fer: comme elle eſt à 52 pieds de l'aiguille, il n'y a point à craindre qu'elle influe ſur ſa direction; la face de devant de ce limbe eſt diviſée par degrés, qui ont chacun 1 pied de largeur, & chaque degré eſt ſubdiviſé en minutes. Cette bande de pierre a 6 pieds de longueur, ſur 6 pouces de largeur. Il eſt vrai que, rigoureuſement parlant, le limbe qui eſt droit devroit être courbe; mais on aperçoit aiſément qu'une portion de cercle de 6 pieds d'étendue, & qui eſt à 52 pieds de ſon centre, s'éloignant peu d'une ligne droite, il ne peut pas y avoir une différence ſenſible dans la projection du rayon viſuel.

On voit en *K (fig. 13 & 14),* comment ce limbe eſt ſoutenu

par deux piliers de pierre de taille, dont le haut eſt entaillé de quelque choſe de plus que l'épaiſſeur du limbe, qui en outre eſt fermement aſſujetti dans ſon entaille par de forts crampons de fer; la hauteur de ces piliers eſt de 3 pieds 6 pouces, leur groſſeur eſt de 8 pouces en carré, non compris la ſaillie du ſocle & celle du couronnement: il y a des perſonnes qui ont la vue aſſez bonne pour, en prenant la direction de l'aiguille, apercevoir ſur le limbe les degrés où elle répond.

Mais comme pluſieurs n'ont pas la vue aſſez étendue pour cela, un aide qui eſt auprès du limbe place l'indicateur *L* à l'endroit que lui preſcrit celui qui ſe dirige ſur les points de mire; avec ce ſecours, il n'y a perſonne qui ne puiſſe obſerver très-exactement les variations de cette bouſſole.

Les *figures 15 & 16* repréſentent une bouſſole d'inclinaiſon; Numéro V. elle eſt formée du cercle de cuivre *AA*, qui a 1 pouce $\frac{1}{2}$ de largeur, il porte de chaque côté une traverſe ſemblable à *BB (fig. 15)*, qui ſert à ſoutenir l'axe de l'aiguille aimantée *CC*; le limbe *AA*, a à chacun de ces bords une feuillure pour recevoir une glace qui y eſt maſtiquée, pour tenir à l'abri de l'air & de l'humidité l'aiguille aimantée *CC (fig. 15)*; les ſupports *BB* ſont ſous la glace, & les diviſions ſont gravées dans l'intérieur du limbe de cuivre *AA*. L'axe de l'aiguille repoſe ſur deux feuillets d'agate bien polis, il y a en outre deux pareils feuillets qui ſont placés verticalement pour que les deux bouts de l'axe ne reçoivent aucun frottement. Le limbe *AA* eſt tenu dans une ſituation verticale, par une forte pièce de cuivre *DD (fig. 15)*, à laquelle il eſt ſoudé; cette pièce de cuivre eſt en outre ſoudée ſur un plateau rond de cuivre *EE (fig. 15 & 16)*, on le voit en plan à la *figure 16*, indiqué par les mêmes lettres qu'à la *figure 15*; ce plateau porte à ſa circonférence un index *F*, dont nous allons dire l'uſage. Il faut concevoir que le plateau *E* peut tourner ſur la pièce *GG (fig. 16)*, qui eſt fermement attachée par des vis *H*, à la pierre de taille formant le couronnement du pilier qui ſoutient cette bouſſole & ce plateau fixe; *GG* porte des diviſions par degrés & demi-degrés.

Pour apercevoir l'uſage de ces diviſions, il faut ſe rappeler

que les aiguilles des bouſſoles d'inclinaiſon ne marquent exactement l'élévation des pôles magnétiques, que quand on met l'aiguille d'inclinaiſon ſur la déclinaiſon indiquée par les aiguilles de déclinaiſon. On y parvient, à notre bouſſole, en mettant l'index *F* ſur le degré de déclinaiſon indiqué par les autres bouſſoles ; & comme cette déclinaiſon varie, il étoit néceſſaire de rendre le plateau *E* mobile : je ferai ſeulement remarquer qu'il faut que l'index *F* ſoit placé exactement dans le même plan que l'aiguille *CC*, & je l'ai mis à un autre endroit, parce qu'il n'auroit pas pu être aperçu, ſi je l'avois mis ſous le limbe *AA*, qui eſt ſa vraie place. Cette bouſſole eſt ſur un pilier & couverte d'un dôme de cuivre entièrement ſemblable à celui de la première bouſſole de déclinaiſon *fig. 1.ere* Outre la bouſſole d'inclinaiſon que je viens de décrire, nous en avons placé une ſeconde dans un autre boſquet, qui ne diffère de la première, que parce que l'aiguille eſt beaucoup plus légère. On verra par le détail de nos obſervations, que toutes les deux ont varié; mais la légère plus que l'autre, apparemment parce qu'elle éprouvoit moins de frottement. Il eſt vrai que cette bouſſole légère, au lieu d'être couverte par une calotte de cuivre, l'eſt par une cage de glace; mais je n'aperçois pas que cette différence puiſſe influer ſur les variations des bouſſoles : je dois prévenir que, quoique j'aie orienté toutes mes bouſſoles ſur une bonne méridienne, mon but n'a pas été de fixer plus exactement qu'on ne fait ordinairement, les variations vraies, mais d'obſerver, avec le plus de préciſion qu'il me ſeroit poſſible, les variations accidentelles des bouſſoles, tant d'inclinaiſon que de déclinaiſon.

Il eſt bon d'être prévenu que la bouſſole *n.° I.er* ſur la planche, comprend les *figures 1, 2, 3;* celle cotée *II,* comprend les *figures 4, 5, 6 & 7;* que celle cotée *III,* eſt une bouſſole de déclinaiſon légère, qui n'eſt pas repréſentée ſur la planche; que celle *n.° IV,* comprend les *figures 8, 9, 10, 11, 12, 13 & 14;* que la bouſſole d'inclinaiſon *n.° V,* comprend les *figures 15 & 16;* & celle *n.° VI,* eſt une bouſſole d'inclinaiſon légère qui n'eſt pas marquée ſur la planche.

SECOND MÉMOIRE SUR LE VARECH.

Par M.rs FOUGEROUX DE BONDAROY & TILLET.

NOUS avons donné dans le premier Mémoire, M. Tillet & moi, les obſervations que nous avons faites par ordre du Roi, ſur les côtes de Normandie, au ſujet des effets pernicieux qu'on prétendoit, dans le pays de Caux, être produits par la fumée du Varech, lorſqu'on brûle cette plante pour la réduire en ſoude.

Il étoit eſſentiel que nous nous bornaſſions, dans le premier compte que nous en rendions, à expoſer ce qui intéreſſoit le plus le Gouvernement, & ce qui devoit être le motif principal de nos recherches; il nous tardoit auſſi de détromper ſur des inconvéniens que l'on avoit attachés à cette fabrique, par un défaut d'examen aſſez approfondi; enfin, il étoit flatteur pour nous, en rendant juſtice à la vérité, de pouvoir eſpérer que nous donnerions une ſolidité & une conſiſtance durable à une branche de commerce conſidérable & utile à l'État, qui avoit eſſuyé des chocs en différens temps.

Cependant les obſervations que nous avions faites pour démêler la vérité, nous ayant conduits à l'examen de pluſieurs faits curieux, concernant l'hiſtoire de ces plantes, & nous en ayant appris d'autres qui tendent à les rendre plus abondantes ſur nos côtes, & par conſéquent qui concourent à augmenter la fabrique de la ſoude, nous avons cru devoir les communiquer à l'Académie dans ce ſecond Mémoire.

Nous nous propoſons donc ici de réunir les obſervations ſur les plantes apelées *Varech*, *Vraicq*, *Sar* ou *Goëmon*; & après avoir décrit différentes eſpèces que l'on brûle pour les réduire en ſoude ſur les côtes de Normandie, nous parlerons

de leur accroiſſement ſucceſſif, & de leur reproduction *(a).*

On y verra une queſtion réſolue, & qui pouvant mettre à portée de réformer un article de l'Ordonnance concernant la récolte du Varech, méritoit de notre part une grande attention *(b).*

On demandoit depuis long-temps s'il eſt plus avantageux pour la reproduction du Varech, de couper cette plante, ou s'il convient plutôt de l'arracher; nous eſpérons que le Miniſtère pourra ſe décider d'après des expériences que nous avons répétées en différens endroits; elles ſeules peuvent conduire avec ſûreté pour appuyer la loi ſur des fondemens inébranlables.

Lieu où croît cette Plante & ſes différentes eſpèces.

On donne indifféremment le nom de *Varech, Vraicq;* dans d'autres pays, de *Sar* ou *Goëmon,* à des plantes de pluſieurs eſpèces, qui pour végéter & ſe multiplier, doivent être baignées par l'eau de la mer, ou continuellement dans les *bas-fonds,* ou au moins deux fois en vingt-quatre heures, par les retours ſucceſſifs de la marée; car il n'en vient point dans les parties élevées des côtes, qui ne ſont lavées que dans les grandes marées. Nous avons même remarqué que la pouſſe du Varech ſur de *grands fonds,* ou ſur les parties qui ſe découvrent ſeulement dans les grandes marées, eſt plus prompte & plus vigoureuſe que celle du Varech placé ſur les rochers qui reſtent à ſec tous les jours.

On trouve ces plantes ſur des fonds, ou de *roches* ou de *galet,* ſeulement quand ces dernières pierres roulées, ſont

(a) M. Fougeroux, l'un de nous, avoit deſſiné les plantes de Varech, mais leur multiplicité auroit occaſionné des frais de gravures, & l'obligation où on auroit été de les réduire ſous un petit format, l'a engagé à réſerver ces deſſins pour un ouvrage particulier.

(b) L'Ordonnance de la Marine, du mois d'Août 1681, titre X, de la coupe du *Varech* ou *Vraicq, Sar* ou *Goëmon,* emploie toujours le mot de *couper.*

adhérentes

adhérentes au fond, & qu'elles y ſont retenues par du ſable battu. Nous en avons vu qui ſembloient porter immédiatement ſur le ſable, mais en les examinant plus attentivement, & en faiſant fouiller, on voyoit que ſous ce ſable étoit le fond de roche qu'il recouvroit, & que la racine de la plante enſablée, portoit ſur la pierre.

Les digues, les jetées en bois, les vaiſſeaux qui ont ſéjourné quelque temps dans un port, en ſont ſouvent couverts au-deſſous de la ligne d'eau; enfin, on trouve le varech ſur les coquilles, ou ſur toutes autres ſubſtances qui ſont retenues à un fond ſolide, & qui peuvent être baignées par l'eau de la mer, ſans être emportées par la vague. Nous prévenons cependant que l'on ne trouve plus de varech, quand on fait draguer dans des endroits profonds.

Les grandes eſpèces de varech que l'on emploie particulièrement à la fabrique de la ſoude, ne ſe ſoutiennent ſur leurs tiges, que lorſqu'elles ſont couvertes d'eau; car lorſque la mer découvre le rocher qui les porte, elles ſont couchées deſſus, & tapiſſent entièrement la pierre.

Comme le varech vient ſur la pierre, ſur la baſe des *falaiſes* ou ſur des roches qui s'en ſont détachées, on conçoit que l'on ne doit point le trouver ſur les côtes plates & ſablonneuſes; auſſi eſt-il moins commun dans la Méditerranée, où l'on peut aborder dans preſque toutes les anſes.

Donnons une idée de ce qu'on appelle *falaiſes.* La mer eſt bordée, depuis la côte de Picardie, dans le pays de Caux & dans la haute Normandie, par des montagnes, dont le fond eſt une pierre de la nature de la craie, coupées, le plus ſouvent à pic, & élevées au-deſſus du niveau des hautes marées, à Mers de 250 pieds, à Dieppe de 200, à Fécamp de 312 à 350 pieds *(c).*

Les pierres qui compoſent ces montagnes, ſemblent être retenues de diſtance en diſtance par des lits ou chaînes d'un

(c) Mers, eſt le dernier village de la côte de Picardie, proche la rivière de la Breſle, qui ſépare la Picardie de la Normandie. Le Tréport ſitué de l'autre côté de la rivière eſt le premier Bourg de la Normandie.

caillou brun, qui forment des lignes horizontales & parallèles, le plus ſouvent éloignées les unes des autres, de deux à trois pieds ſeulement.

Il s'écroule (& ſouvent au riſque de ceux que le travail conduit le long de ces montagnes) particulièrement dans les dégels, ou après de grandes humidités, des parties conſidérables de ces falaiſes, qui en tombant, roulent dans la mer. C'eſt ſur la baſe de ces falaiſes, qui s'étend aſſez loin dans la mer, ou ſur ces groſſes maſſes éboulées, que s'attache le varech; il y vient ſouvent en ſi grande quantité, & les plantes ſont ſi proches les unes des autres, que les pierres en ſont entièrement couvertes.

Nous verrons dans un moment que, dans les *fucus* qui ſervent particulièrement à la fabrique de la ſoude, les uns ſont adhérens à la roche par un large pédicule *(Planche I, fig. 6, 7 & 8)* qui forme un empatement, & il prend la figure de la petite pierre ſur laquelle croît la plante *(fig. 8)*; d'autres ont pour racines des eſpèces de griffes qui les retiennent au rocher *(Pl. II, fig. 16 & 17)*: nous citerons ces différences à meſure que nous parlerons des eſpèces de *fucus.*

Quoique les tiges de ces *fucus* ſoient ployantes & qu'elles obéiſſent à la lame, ces plantes ſont quelquefois emportées, flottent ſur l'eau, & ſont jetées par la mer ſur ſes bords. Certaines eſpèces dont la baſe du pédicule eſt moins large, & a moins de priſe ſur le roc, ou qui étant parvenues à leur dernier terme d'accroiſſement ont plus de longueur, étant plus expoſées à la force de la vague, ſe caſſent aiſément, ſont ſujettes à être emportées par les flots, & à être jetées ſur le rivage.

Nous avons dit dans le premier Mémoire *(Mém. de l'Acad. année 1771, p. 325)* que ce varech d'échouage eſt ſouvent aſſez abondant ſur une des côtes de la baſſe Normandie pour fournir les engrais d'une année à dix-neuf villages voiſins.

Il y a certaines anſes où la mer en eſt couverte; les cables des vaiſſeaux en ſont ſi chargés qu'on a peine à les tirer.

Ces plantes de mer ſont de bien des eſpèces, & nous ne nous propoſons pas d'en donner ici une hiſtoire complète.

Pour n'en point omettre, il faudroit avoir fait draguer dans différens fonds qui ne découvrent jamais & dans différens mois de l'année; car l'on ſait qu'il y a des plantes particulières à ces fonds, que quelques-unes n'ont acquis toute leur perfection que dans certaines ſaiſons & au bout d'un certain temps. Nous nous bornerons à parler ici de celles dont on fait uſage ſur les côtes de Normandie pour la fabrique de la ſoude.

ESPÈCES de Fucus *que l'on brûle en Normandie pour la fabrique de la Soude.*

RACINES à empatement.	à feuille de Chêne.	N.° 1. *Fucus* ſive *alga latifolia major dentata.* Raii, Synopſ. 3, ou *Fucus fronde dichotomâ ſerratâ ad apices tuberculatâ.* Linn. Spec. plant.
	à veſſies.	N.° 2. *Fucus* ſive *alga marina anguſtifolia, veſiculas habens.* Raii. Reaumur, Mém. de l'Acad. année 1711.
	à véſicules.	N.° 3. *Fucus* ſive *Quercus marina, veſiculas habens.* C. B. pin. *Fucus fronde dichotomâ integrâ, caule medium folium tranſcurrente, veſiculis verrucoſis terminalibus.* Linn. Spec. plant. 2.
	Noueux ou qui a des nœuds	N.° 4. *Fucus maritimus, veſiculis majoribus ſingularibus, per intervalla diſpoſitis.* Moriſ. Hiſt. Oxon. part. III. *Fucus caule compreſſo, dichotomo medio ramorum in veſiculam dilatata.* Linn. Spec. plant.
RACINES formant un petit empatement.	à lacets.	N.° 5. *Fucus in ligulas longas, anguſtas, & ſubrotundas diviſus.* Reaum. Mém. de l'Acad. année 1711.
	à ſilique.	N.° 6. *Fucus anguſtifolius, veſiculis latis ſiliquarum æmulis.* Raii, Hiſt. p. 73; ou *Fucus caule tereti ramoſiſſimo, pedunculis alternis veſiculis oblongis acuminatis.* Linn. Spec. plant.

RACINES en griffe au lieu d'empatement.	à main.	N.° 7. *Fucus arboreus, polychides; caule plano & tortuoso.* Hist. de l'Académ. année 1711. Raii, Hist. pag. 75.
	Baudrier.	N.° 8. *Fucus folio singulari, longissimo, lato; in medio rugoso.* Raii, Synopf. 6. Le Baudrier, Hist. de l'Acad. 1711.

Les quatre premières plantes que nous venons de nommer, servent particulièrement à la fabrique de la soude; elles sont en plus grande quantité que d'autres sur les côtes de Normandie, & connues pour y donner le plus de soude & de meilleure qualité.

Numéro 1.er Le Numéro 1.er est commun sur les côtes de Picardie, & principalement sur celles de Normandie. M. de Reaumur qui l'a observée sur les côtes d'Aunis & de Poitou, l'a décrit & fait graver dans les Mémoires *de l'Acad. de l'année 1711.* Nous nous appuierons souvent pour les détails de la fructification de ceux qu'en a donné cet habile Physicien.

La feuille *(d)* de cette plante est grasse, épaisse & dentelée; chaque découpure de cette feuille a quelque ressemblance avec celles du chêne, ce qui l'a fait nommer par des auteurs *Quercus maritima. (Voyez Pl. I, fig. 5 & 9).*

La plante dans la mer est d'un vert brillant, qui s'éteint & devient plus sombre à mesure qu'elle se sèche, & qu'elle a été privée d'eau; chaque division de la plante est plus ou moins large, les bords en sont toujours dentelés, mais plus ou moins profondément; une nervure principale la partage suivant sa longueur, elle est en relief sur l'une & l'autre des surfaces de la feuille. *(Voy. Pl. I, fig. 3 & 5).* Cette plante dans son premier état n'a que la grandeur d'une laitue, *(fig. 1, a)*, qui sort de sa graine. Cette feuille divisée à son extrémité supérieure s'étend & produit de nouvelles

(d) Nous nous servons du mot *feuille*, quoique nous convenions, qu'à parler plus strictement, la plante ne soit formée que par des découpures, & de nouvelles divisions de la même feuille. Nous développerons cette idée dans la suite de ce Mémoire.

découpures, *(fig. 1, 2, 3 & 4)* ; toute la plante n'eſt donc formée que par des diviſions de la première feuille ; ces feuilles toujours diviſées en deux parties, ont ſervi aux Botaniſtes de caractères pour partager les *fucus ;* & ceux à deux diviſions ont été mis dans la Dychotomie.

L'extrémité de la feuille eſt plus ou moins large, & plus ou moins arrondie, elle ſe termine par une ſimple dentelure, ou le plus ſouvent, étant dentelée profondément, la nervure partage également la feuille ; ces différences ſont autant de variétés dans cette eſpèce.

Les feuilles de cette plante ſont garnies de filets blancs, raſſemblés en eſpèce de houpes, & diſperſés çà & là ; ces aigrettes très-apparentes ſur le varech frais, font un plus bel effet encore, lorſqu'on les examine baignées par l'eau de la mer. Ils forment, en ſe ſéparant, une houpe blanche agréable, *(Pl. I, fig. 5 & 9, x x)*

M. de Reaumur a regardé ces filets comme les fleurs mâles de la plante, il avoue cependant n'avoir jamais vu leurs extrémités garnies de *ſommets,* comme le ſont la plupart des étamines fécondantes ; mais on connoît différentes ſortes d'étamines. Il y en a qui paroiſſent n'être que des filets, & qui ſont cependant des ſommets, comme dans le *Riccia* & l'*Anthoceros* de Micheli. Ces plantes étant auſſi des *fucus,* il y a tout lieu de croire qu'elles doivent reſſembler à nos *fucus* marins, par les parties de la fructification.

Nous avons trouvé pluſieurs de ces plantes vers le mois de Septembre, dont les feuilles étoient garnies, à leurs extrémités, de petits tubercules reſſemblans aux capſules des graines, qui ſont plus apparents dans la plante ſuivante, où nous nous propoſons de les examiner.

Ce *fucus* a une tige ronde, ployante, ſoutenue ſur la pierre par un fort empatement, *(Pl. I, fig. 6, 7 & 8).*

On ſait que les feuilles concourent, dans toutes les plantes, à favoriſer leur végétation, mais leur néceſſité eſt encore plus prouvée pour l'accroiſſement des *fucus* marins ; & il ſemble, comme nous le dirons plus bas, qu'ils tirent leur nourriture

principalement par ces productions, l'empatement de la tige servant plutôt à les retenir au rocher sur lequel ils végètent.

La plante parvient ainsi à sa perfection dans l'espace d'une année ou deux, & acquiert la hauteur d'un pied, de deux, & même de trois dans les bas-fonds. Nous avons remarqué que les plantes en vieillissant perdent de leur adhérence aux rochers; & les Ouvriers qui font la Soude, prétendent que la mer, dans ce temps, les enlève facilement de dessus la roche; & que cette cause, en produisant le dépérissement des anciennes plantes, concourt à leur renouvellement.

Numéro 2. On trouve fréquemment sur les côtes de Normandie le varech *Numéro 2;* dans certains cantons il est en plus grande abondance que le *Numéro 1.er*. Ce varech a des vessies plus ou moins grosses au bout des feuilles; la plante a la feuille plus ou moins épaisse, unie, souvent point dentelée, & plus ou moins large; ce sont encore autant de variétés *(fig. 10).*

Quelques auteurs, & M. de Reaumur dans son Mémoire, *année 1711,* ont pensé que les Numéros 1 & 2 étoient les deux individus; ils ont cru que l'*Alga marina latifolia* Raii, étoit le mâle, tandis que la plante à vessies placées à l'extrémité des branches que nous examinons maintenant, étoit l'individu femelle.

Les vessies que nous disons se trouver à l'extrémité des branches de cette plante, sont plus ou moins renflées, elles sont simples ou fourchues, & ont deux ou trois cornichons, *(fig. 10 & 12);* si l'on regarde à la loupe l'extérieur de ces vessies, on y voit de petites aspérités *(fig. 11, d, e),* dont les sommets sont surmontés de courts filets. Lorsque cette plante est restée long-temps hors de l'eau, il suinte de ces boutons une liqueur jaunâtre, qui a une odeur différente de celle de la plante.

Si l'on coupe ces grosses vessies au sortir de l'eau, on voit que ces boutons sont attachés *(fig. 11, f, g)* à l'enveloppe générale du fruit, & que toute sa capacité est remplie d'une liqueur gélatineuse, plus ou moins épaisse & transparente, suivant que la plante est plus proche de sa maturité. Ray avoit regardé ces boutons comme les graines de la plante, mais M. de Reaumur

pense que ce sont les capsules qui contiennent les semences de ces plantes *(fig. 11, g)*. Lorsque l'on écrase ces vessies, elles font un bruit sous les pieds en s'éclatant.

Quelquefois cette plante, au lieu d'avoir des vessies à l'extrémité de ses feuilles, n'a que des boutons peu éminens; celles-là seroient une variété dans l'individu femelle, & nous avons dit, en parlant de la première plante, que nous avions découvert sur certains pieds à l'extrémité de leurs feuilles, des tubercules ou boutons entièrement semblables à ceux de l'espèce à grosses vessies que nous examinons maintenant; quoique la partie inférieure de ces feuilles, fut aussi garnie de filets blancs, que M. de Reaumur regarde comme caractérisant l'individu mâle. Ces pieds seroient donc des hermaphrodites, qui, comme d'autres végétaux, auroient sur la même plante des fleurs mâles & des fruits; & cette observation auroit échappé à la sagacité de M. de Reaumur. *(Voy. Pl. I, fig. 5)*.

Souvent l'on trouve les *fucus* dont nous parlons avec des véficules globulaires, un peu aplaties à l'endroit où elles font attachées aux plantes, & dispersées çà & là sur les ramifications de la plante. Nous les avons désignés, d'après les auteurs qui en ont parlé, sous le n.° 3. Numéro 3.

Ces vésicules sont plus ou moins grosses, elles sont creuses & ne contiennent qu'un réseau composé de filamens fins, déliés & transparens, *(fig. 13, h, i)*.

Ces vésicules *h* qui contiennent de l'air, seroient-elles destinées à soutenir la plante, en la rendant beaucoup plus légère que le volume d'eau qu'elle déplace? Les plantes qui ont des fruits, où ces vésicules se trouvent en plus grande quantité, sont aussi celles qui ont le plus besoin de ce secours.

Nous éprouvons des difficultés pour fixer avec sûreté dans les végétaux terrestres, les vraies espèces & les distinguer des variétés; elles doivent se multiplier encore, quand il s'agit d'établir les mêmes distinctions entre des plantes marines.

Nous serions disposés à ne regarder ces trois varech que comme des variétés, parce que nous avons trouvé sur la

même racine ſix tiges, dont une étoit le varech à feuille dentelée avec des filets ou houpes ſur les feuilles, une autre tige avoit des véſicules répandues ſur les feuilles; enfin des tiges qui outre ces véſicules avoient encore des veſſies au bout de leurs branches; mais nous convenons qu'ici chacune de ces tiges pourroit être provenue d'une graine particulière, qui s'étant dépoſée ſur un empatement d'une vieille plante, auroit ainſi donné lieu à leur réunion.

Nous croyons que l'on ne peut mieux comparer la fructification de ces varech, qu'à celle d'une plante décrite par M. Marchant, dans les Mémoires de l'Académie, *année 1711,* ſous le nom de *lithophiton terreſtre, digitatum, nigrum;* avec la ſeule différence qu'au *lithophiton* de M. Marchant, les fleurs mâles ſont au bout des branches, & que les fleurs femelles ſont répandues ſur le reſte de la plante, au lieu que les fleurs ſont poſées tout différemment dans les *fucus* marins que nous examinons. Nous indiquons ceci pour mettre ſur la voie ceux qui deſireroient d'étudier plus particulièrement la façon dont ſe multiplie le varech, & les différentes eſpèces de vraies plantes marines.

Ces plantes graſſes, & principalement celles qui ſont garnies de veſſies, permettent difficilement que l'on marche deſſus, & ce n'eſt pas ſans courir les riſques de tomber, que l'on parcourt les rochers qu'elles recouvrent.

Donati, *Eſſai ſur l'Hiſtoire Naturelle de la mer Adriatique, traduit de l'Italien. La Haye, 1758,* dit que les plantes marines diffèrent des terreſtres dans les parties de leur fructification, en ce que dans les premières le principe d'où elles dépendent, conſiſte en un fluide mucilagineux, tandis que dans les dernières le principe fécondant eſt ſous la forme de pouſſière régulière.

Nos obſervations ne nous mettent pas à portée de décider comment ſont fécondées les parties femelles des *fucus* de mer, mais il paroît hors de doute que les ſemences ſont humectées par cette liqueur gluante ou ce mucilage, & c'eſt encore une occaſion d'admirer la ſageſſe de la Providence, qui dans certains végétaux,

végétaux, & principalement pour les *fucus* de mer, a pourvu la graine d'un mucilage qui la rend adhérente aux rochers ſur leſquels elle doit germer & croître, tandis que d'autres graines terreſtres ſont en pouſſière, ou ont la forme de grains ailés qui ſont emportés par le vent ou arrondis, qui roulent ſur la terre, ou pointus & épineux pour s'arrêter & s'accrocher vers les endroits où ces grains, étant recouverts de terre, germeront & ſe multiplieront ſans le ſoin du Cultivateur, ou au moins en lui épargnant les précautions pour les ſemer.

Nous ne parlerons point de l'une & de l'autre de ces plantes ſur leſquelles il ſe trouve des feuilles qui, ayant été piquées par quelques inſectes ou un peu mangées par d'autres animaux, ſont devenues monſtrueuſes : celles-là s'alongent extraordinairement, ou prennent des formes plus ou moins ſingulières.

Nous avons trouvé ſur ces varech, différens polypiers : ils ſe placent ou le long de la tige de ces plantes, ou ſur une des feuilles; un de ces polypiers occupe un eſpace circulaire, qui a aſſez la forme d'un bouton : lorſqu'on l'obſerve à la loupe dans l'eau de la mer, on reconnoît qu'il eſt compoſé de pluſieurs loges en tuyaux, d'où il ſort un polype dont la tête eſt ſurmontée de filets. M. de Juſſieu l'a décrit dans les Mémoires de l'Académie, *année 1742 ;* Petiver l'avoit nommé *millepora arenoſa Anglica*, & Dillenius *Eſcara.* Nous avons auſſi vu ſur le varech un autre polypier qui garnit une grande partie de la plante, & dont les loges ſont plus alongées qu'au premier & ont aſſez la forme d'un ſabot, avec deux petites pointes ſur l'ouverture de la loge. M. de Juſſieu l'a auſſi décrit *(Mém. de l'Académie, année 1742)*, & il avoit été nommé par Imperati, *porus cervinus;* c'eſt le *fucus telam* aut *ſericeam texturâ æmulans* de Ray, parce que ſouvent au lieu de s'attacher comme ici à une plante étrangère, le polypier entier, étant compoſé de deux plans de loges poſés l'un ſur l'autre, reſſemble, par la forme qu'il prend, à un *fucus;* ce qui l'a fait ranger par ces Auteurs, dans la claſſe

des végétaux. M. de Reaumur l'a décrit *(Mém. Acad. année 1712, page 42)* ſous le nom de *coralline.*

La côte de la baſſe Normandie par ſa diſpoſition, rend le varech d'échouage très-commun; on en employe une grande partie à faire de la ſoude, & il s'y rencontre, plus ſouvent qu'ailleurs, des varech de bas-fonds de pluſieurs eſpèces, qui ne ſont pas également bons au travail de la ſoude; d'ailleurs nous avons déjà dit qu'il y avoit des eſpèces de *fucus*, communes ſur une côte & qui ne ſe trouvoient pas ſur d'autres. L'eſpèce ſuivante, *n.° 4*, eſt aſſez généralement répandue aux environs de Cherbourg, pour être employée avec d'autres à la fabrique de la Soude; elle y eſt connue ſous le nom de *Robert:* cette eſpèce eſt ordinairement peu branchue, formée dans ſon étendue par la diviſion de deux branches; ſa tige menue eſt un peu aplatie, & elle a des nœuds ou de groſſes veſſies qui diviſent ces branches de diſtance en diſtance, elles ſont terminées par de petites feuilles charnues; ſa racine eſt en empatement moins large qu'au *quercus maritima.* Le *nodoſus* qu'a fait graver M. de Reaumur dans les Mémoires de l'*année 1712*, ne nous a pas paru ſemblable à celui-ci *(voyez planche II, fig. 23 & 24)*; nous croyons en avoir trouvé deux variétés, *ibid.*

M. de Reaumur a décrit les fruits d'un *nodoſus*, mais ayant été à portée de voir un fruit différent de celui dont il a parlé *(Mém. Acad. année 1712, page 28)* nous l'avons fait graver ici. C'eſt une maſſe charnue *r, r* peu renflée, ſillonnée & relevée de petites éminences *(voyez planche II, fig. 23 & 24).* Ce fruit eſt ordinairement placé au bout des branches, ou ce ſont des feuilles qui ſe gonflent & forment des veſſies; dans quelques eſpèces ces veſſies ſemblent être portées par un long pédicule. Il s'attache ſouvent à ce *fucus* une plante paraſite, compoſée de filets fins & doux ſous les doigts, d'une couleur violette ſombre preſque noire.

L'eſpèce de *fucus* que l'on a nommée *lacets*, eſt auſſi très-commune ſur les côtes de Normandie, elle vient encore

dans les bas-fonds, & par conséquent fait souvent partie du varech d'échouage *(pl. I, fig. 14)*. La tige de cette plante a peu de longueur; au-dessus de la racine, on remarque une sorte de chapeau *(planche II, s, t, t, fig. 18 & 19)*, qui caractérise cette espèce. Quelques-uns de ces *fucus* ont plusieurs tiges *(fig. 19)* & chaque tige a sa soucoupe *(t, t, t)*, ou cette espèce de chapeau, placé un peu au-dessus de la racine; les feuilles qui sont souvent d'une longueur singulière donnent par leurs soudivisions multipliées beaucoup d'étendue à cette plante. J'ai dessiné une des ramifications de cette plante vue à la loupe; l'on y découvre de petits suçoirs que M. de Reaumur a déjà remarqués, & qui sont les capsules des graines de ce *fucus (planche I, y, fig. 14)*.

Il se rencontre encore assez fréquemment parmi les varech une espèce *n.° 6*, dont la plus grande longueur est d'environ 10, 12 ou 15 pouces; elle est composée d'une & plus souvent de plusieurs tiges, qui partent d'un même empatement de racines *(pl. II, fig. 20 & 21)*, sa feuille est mince & alongée; la plante porte aux extrémités de ses branches, des siliques *(fig. 22, l, m, n, o, p, q)*, plus ou moins longues & comme composées d'articulations.

Au premier coup-d'œil, on seroit tenté de croire que les graines de cette plante vont se trouver dans l'intérieur de ces siliques, qui dans quelques-unes sont divisées par différentes cloisons *m, n*, & ressemblent beaucoup extérieurement aux enveloppes des semences de plusieurs plantes terrestres, mais ce seroit inutilement qu'on chercheroit des graines dans l'intérieur des siliques, on n'y voit que des filamens déliés *n* qui s'entrelacent entre chaque cloison, & qui ressemblent à ceux que nous avons décrits en parlant des vessies dispersées sur les feuilles propres à une espèce de varech, *n.° 3*. Nous avons représenté cette silique ouverte & les filets qui sont entre chaque cloison *(planche II, fig. 22, n)*. Ces siliques sont cependant le fruit de cette plante, & les graines y sont placées dans l'enveloppe extérieure; il est aisé de les y voir principalement sur celles où l'on découvre quelques boutons

aſſez ſemblables à ceux que M. de Reaumur a décrit dans l'eſpèce de *fucus* à groſſes veſſies, *n.° 2 (voyez planche II, fig. 22, l).* Quelques-uns de ces *fucus* ont les articulations de leurs ſiliques plus ou moins apparentes à l'extérieur, & les unes ſont arrondies par leurs extrémités, d'autres ſont ſurmontées d'un court filet *o, p, n.*

On trouve ſur les côtes de Normandie, & ſur-tout dans les bas-fonds le *n.° 7;* ce *fucus (planche II, figure 17)* eſt ordinairement ſur une forte tige ronde ou aplatie, qui eſt ſurmontée d'une eſpèce de palette, diviſée enſuite comme les doigts d'une main; ſa racine *u* ſe ſépare en pluſieurs ramifications ou eſpèces de griffes qui s'accrochent au rocher, & l'y retiennent avec beaucoup de force. La couleur de ce *fucus* eſt d'un jaune-clair. Il y a pluſieurs variétés dans cette eſpèce; ſouvent la plante n'a qu'une tige, & les diviſions de la palette ne commencent qu'après un eſpace large, qui reſſemble à la paume de la main: ces diviſions ou lanières ſont plus ou moins longues, & en plus ou en moins grande quantité.

Ray l'a nommé *fucus arboreus polychides, edulis;* lorſqu'il eſt jeune, il laiſſe dans la bouche une ſaveur aſſez agréable, & les Irlandois mâchent cette eſpèce.

M. de Reaumur a décrit les fleurs de cette plante, mais il n'a point vu de ſemences. *Mém. Acad. 1712, page 24.*

Les environs de Cherbourg offrent une variété dans cette eſpèce qui n'a pas encore été décrite; cette plante diffère du *polychides* commun, dont la palette ſe diviſe en pluſieurs lanières par la tige qui, dans cette variété eſt plate; on voit vers la racine, des bourſes renflées attachées à la tige, qui, dans l'eau, font le plus ſingulier effet, & qui par leurs ſinuoſités, reſſemblent aſſez à ce qu'on nomme *la fraiſe*, dans le veau, ou aux plis du méſentère.

On trouve auſſi le *fucus, n.° 8,* qui prend la forme d'un ruban, ce qui lui a fait donner ce nom, ou celui de baudrier, parce qu'il reſſemble à une lanière de peau; il eſt plus ou moins large, uni ou bien godronné, & d'un vert d'olive ou bigarré de vert & de jaune: ce *fucus* a quelquefois quatorze

ou quinze pieds de longueur *(voyez pl. I, fig. 15)*. Sa racine eſt en griffes terminées ſouvent par des eſpèces de ſuçoirs, ou des parties peu renflées.

M. de Reaumur *(Mém. Acad. année 1712)* a décrit les fleurs mâles de cette eſpèce & n'a point vu la graine; il nous a paru que les capſules des graines ſont le long de deux lignes nerveuſes qui partagent ces feuilles ſuivant leur longueur, & voiſines de quelques parties renflées qui ſont plus ou moins apparentes ſur des eſpèces de ces *fucus*, & ſur-tout lorſqu'elles ſortent de la mer, ou qu'on les y obſerve, quand, dans les grandes marées, la mer étant très-baſſe, permet d'approcher du lieu où croiſſent ces plantes.

Nous avons dit que nous ne décririons ici que les eſpèces que l'on brûloit pour les réduire en ſoude; cependant nous devons faire mention d'un *fucus* paraſite qui ſouvent s'attache à d'autres *fucus* & végète ſur ceux-ci; cette eſpèce a les feuilles larges d'environ cinq à ſix lignes, & ſouvent chaque pied n'eſt compoſé que d'une feuille, mais pluſieurs pouſſent près les unes des autres; elles ſont ordinairement rougeâtres ou couleur de lie-de-vin: nous avons trouvé ce *fucus* paraſite ſur le vrai varech ou ſur le baudrier, c'eſt celui que Tournefort a appelé *fucus lactucæ folio*. Quelques perſonnes le mangent en ſalade.

On trouve encore ſur les côtes de Normandie pluſieurs eſpèces de *fucus*, mais dont quelques-unes n'ayant point aſſez de parties ſolides, ſe réduiſent à preſque rien en ſéchant, ou d'autres plantes qui étant trop petites, ne ſervent point à la fabrique de la ſoude. On ne les prend que lorſqu'elles ſont voiſines de quelques-unes des eſpèces que nous venons de décrire, & ſeulement en arrachant ces dernières plantes utiles.

Dans ce nombre ſont, l'*ulva oblonga, plana, undulata, membranacea, viridis*. Flora Suec. 1156, & le *fucus pumilus Dichotomos, ſegmentis ex unâ parte gibboſis, ex alterâ excavatis*. Raii, Synopſ. app. 31.

Enfin, parmi les *fucus*, on voit pluſieurs eſpèces de corallines, & différens polypiers dont nous ne parlerons pas ici, parce

que nous avons prévenu que nous ne prétendions pas faire l'hiſtoire entière & complète des plantes & polypiers de nos côtes.

Comment pouſſe le Varech à feuilles de Chêne, convient-il mieux de l'arracher que de le couper !

En traitant de la multiplication du varech, ce ſeroit le lieu, ſans doute, de parler du développement des graines de cette plante ; mais nous avouons que le premier moment de leur naiſſance, a échappé à toutes nos recherches ; ainſi pour ne point haſarder, nous n'ajouterons rien à ce que M. de Reaumur en a dit dans les Mémoires de l'Académie, *ann. 1711*, & nous renvoyons au travail de cet habile Phyſicien.

Ces *fucus* jeunes ſont, ou ſur l'empatement des racines de vieilles plantes arrachées, où on les voit pouſſer (& c'eſt le plus grand nombre), ſur des roches à des endroits où il n'exiſte plus de racines, & ſans doute ceux-là viennent de graines.

Nous avons vu vers le mois d'Août des rochers entièrement couverts de plantes, qui en naiſſant étoient auſſi proches les unes des autres, que pourroient l'être ſur une couche, des laitues qui ſortiroient de leurs graines ; on conçoit que ces pieds s'éclairciſſent, & que le nombre de ces plantes diminue, les plus fortes étouffant les plus petites. *(Voyez pl. I, fig. 1, a, b).*

Nous avons déjà dit en décrivant la première & la ſeconde eſpèce de varech, que dans ces deux *fucus*, la feuille très-petite dans ſon origine *a, b*, s'élargit par ſon extrémité & ſe découpe en deux parties ; la tige s'alonge, les productions de la plante ne ſont que des développemens de cette première feuille, qui toujours en ſe partageant en deux, donnent de nouvelles découpures, & forment une grande plante. *(Voyez pl. I, a, b, c ; & fig. 2, 3 & 4).*

Cette loi eſt générale pour la plupart des *fucus* dont nous avons donné ici la deſcription, il n'eſt pas beſoin de dire

qu'il ne faut pas comprendre dans ce nombre les *fucus polychides* & le baudrier *n.os 7 & 8*, mais elle a ſon application aux eſpèces appelées *chêne de mer*, dont on ſe ſert principalement pour faire de la ſoude; la plante parvient à ſa perfection ſuivant les ouvriers, au bout d'un an, quoiqu'elle puiſſe croître ou au moins ſubſiſter pendant trois ou quatre années.

Il y a quelquefois ſur une racine des feuilles qui donnent l'origine à pluſieurs plantes, mais plus communément il n'y a qu'une tige ſur chaque empatement. Sur le même rocher & près d'un grand pied de varech, on en voit d'autres qui ſont encore jeunes & petits; les ouvriers (ainſi que nous l'allons dire) ont grand ſoin de ménager ces derniers, en faiſant la récolte des grands varechs.

Les veſſies ou les fruits du varech qui ſont à l'extrémité des branches, ne paroiſſent que lorſque la plante a acquis une certaine grandeur : nous les avons vus dès le mois d'Avril. Pour les véſicules que nous avons dit ſe trouver diſperſées ſur les feuilles d'une eſpèce, on les voit dès que la plante a des feuilles formées, & de grandeur à pouvoir les porter.

Les gelées gâtent les grandes plantes en les déracinant; il eſt encore conſtant que les *fucus* pouſſent pendant l'hiver, & dans cette morte ſaiſon, les petites plantes ſe forment un empatement de racines, & ne font que de foibles productions en comparaiſon du printemps ou de l'été, qui ſont bien plus favorables à leur végétation. Nous prévenons ici que les ouvriers qui font en Normandie la ſoude avec le varech, arrachent les plantes, quoiqu'un article de l'Ordonnance preſcrive de les couper: on a tenu la main à l'exécution de la loi, juſqu'à ce que les ouvriers de cette province aient repréſenté, qu'ils ne coupoient le varech qu'au détriment de la multiplication de la plante, & depuis on a fermé les yeux ſur la façon dont ils en faiſoient la récolte.

Les uſages pour la façon de récolter le varech, varient; dans d'autres provinces, au lieu de l'arracher (comme nous venons de dire qu'on le faiſoit en Normandie), on le coupe avec une faucille.

Nous n'ignorions pas que ſouvent les préjugés entraînent aiſément les gens dénués de connoiſſances, & il étoit de notre devoir, d'examiner ſi l'intérêt ne conduiſoit pas ceux qui font la ſoude, au détriment du bien général; enfin ſi engagés par l'appât d'un gain apparent pour une année, ils ne le ſacrifioient pas à l'avantage qu'ils en auroient pu eux-mêmes tirer par la ſuite.

Nous avons donc premièrement écouté les ouvriers, ils nous ont fait voir qu'il leur en coûtoit plus de temps & de peine pour arracher que pour couper ces plantes, car (comme nous l'avons dit) elles tiennent fortement à la pierre, & ſouvent en les enlevant avec la force néceſſaire, on emporte des morceaux de pierre qui tiennent aux racines, & il faut enſuite les ôter, avant de brûler les plantes pour les réduire en ſoude; on récolteroit donc ces *fucus* beaucoup plus promptement, en les coupant avec la faucille; mais un grand avantage attaché à la façon d'arracher les plantes, c'eſt qu'au mois d'Avril, on ménage avec le plus grand ſoin, des pieds trop jeunes, pour être alors employés, & qui ſe trouvent le long & près des grands: ceux-là donnent lieu à une ſeconde récolte vers le mois de Septembre de la même année.

Les ouvriers ajoutoient encore à cette première raiſon, qu'ils s'étoient convaincus que les pieds coupés ne pouſſoient plus, qu'ils pourriſſoient, & que ſi on les coupoit près de leurs extrémités ſupérieures, qu'ils ne faiſoient plus que de foibles productions, & nuiſoient à la pouſſe des jeunes plantes voiſines, qui ſeroient devenues beaucoup plus belles, ils nous faiſoient voir quelques extrémités de tiges, qui, s'étant caſſées à la dernière récolte en voulant les arracher, n'avoient point pouſſé & commençoient à pourrir.

Il convenoit donc de déterminer le vrai ſur un objet auſſi important: l'on avouera que l'on pouvoit déjà avoir quelque confiance, en ce qu'avançoient des gens accoutumés à voir ces plantes; mais eux-mêmes ſont d'avis différens dans la Normandie & la Bretagne, quoique ſur les mêmes eſpèces de plantes.

Nous

Nous choisîmes donc vers la fin d'Avril, deux endroits éloignés l'un de l'autre de plusieurs lieues, en préférant un terrein le mieux garni en varech *(quercus maritima)* & celui le moins exposé à être endommagé : nous fîmes marquer un espace, & nous le divisâmes en trois parties; dans la première, le varech fut arraché entièrement; dans la seconde, on en coupa plusieurs rangées à deux pouces de l'empatement de la racine, d'autres à quatre; & les dernières rangées aux trois quarts de sa hauteur.

Enfin dans la troisième & dernière partie, nous laissâmes le varech, en recommandant qu'on le respectât, & dans le dessein de pouvoir (si la mer ne l'emportoit pas) juger du temps où le varech des endroits qui découvrent, peut croître & rester sur la roche, sans se détruire de lui-même ; ce moyen nous paroissoit le plus propre à décider le temps de sa crûe: des circonstances que nous ne pouvions prévoir, nous ont empêché de prononcer sur ce dernier article; mais nous pouvons faire part de nos observations, recueillies dans ces deux endroits différens, elles serviront à décider, s'il est plus avantageux en récoltant le varech, de le couper ou de l'arracher.

A la fin de Septembre, la partie dont nous avions arraché les plantes au mois d'Avril, étoit garnie de nouvelles, qui avoient autour de 2 à 3 pouces de hauteur, & le 25 Novembre, le varech avoit environ 6 pouces, & quelques pieds étoient déja crus de plus de 9 pouces.

Celui qui avoit été coupé ayant été examiné à la fin de Septembre, nous reconnumes qu'il étoit encore dans le même état que dans le mois d'Avril où on l'avoit soumis à l'expérience. On se souviendra que les tiges des premières rangées avoient été coupées assez près de leurs racines, celles-là étoient dans le même état, les tiges avoient pris une couleur plus noire, & principalement leur extrémité près de la partie coupée.

On voyoit seulement çà & là quelques pieds qui étoient venus de graines, & éloignés des tiges dont nous venons de parler.

La seconde rangée de ces plantes coupées à 3 & 4 pouces de leurs racines, n'offroit rien de différent des premières; seulement quand on n'avoit pas coupé des feuilles latérales, on y voyoit une houppe de nouvelles feuilles qui ne paroissoient pas devoir donner de belles productions. Le 25 de Novembre, ces tiges coupées étoient entièrement fanées, & il ne s'est trouvé, dans tout le carré réservé pour cette expérience, qu'un seul pied coupé, sur la racine duquel on ait vu une nouvelle tige d'environ un pouce & demi de hauteur attachée à son empatement, & ceci nous donne occasion de remarquer que les *fucus* s'attachent indifféremment sur tous les corps; les jeunes pieds de semence peuvent se trouver posés sur un empatement de racines anciennes, comme sur d'autres parties du rocher; mais ayant déja dit que les pieds en vieillissant perdent de leur adhérence à la pierre, il est à craindre que les empatemens, en se détachant, n'emportent les jeunes pieds qui seroient crûs sur les racines. Les faits se sont présentés de la même manière dans l'un & l'autre des deux endroits destinés à cette expérience. Si l'on se rappelle que les ouvriers, pour confirmer leur façon de penser, nous faisoient voir que la plupart des pieds qui avoient été cassés, en voulant les détacher de dessus les rochers, se pourrissoient sans donner aucune production. Enfin, si l'on joint à ces remarques une réflexion tirée d'après la peinture que nous avons faite de la quantité de plantes qui couvre les bords de la mer, & les rochers que l'eau baigne dans les marées (même dans les endroits où depuis plusieurs années, on arrache constamment ces plantes); ne sera-t-on pas obligé au moins, d'avouer que ce moyen employé dans la Normandie pour récolter le varech, n'est point nuisible à la multiplication de ces plantes; & nos observations ne peuvent-elles pas encore conduire à penser qu'il est même plus avantageux d'arracher le varech que de le couper, & que les ouvriers demandoient, pour le bien, & pour concourir à une plus grande multiplication de cette plante utile, qu'on ne suivît pas l'Ordonnance qui prescrit de le couper?

Si l'on considère que la plupart des *fucus*, & principalement ceux à feuilles de chêne, sont le développement successif d'une première feuille, qui par de nouvelles divisions forment la plante; que la plante entière, ainsi que s'explique M. de Fontenelle en rendant compte *(Hist. Acad. année 1710, p. 72)* des observations M. le Comte Marsigli, est plutôt une espèce de racine, entourée de toutes parts de l'élément propre à lui fournir la nourriture convenable, & qu'ainsi ces plantes, plus qu'aucune autre, semblent devoir particulièrement leur principe de végétation à l'eau de la mer qu'elles pompent ou reçoivent plutôt par leurs feuilles que par leurs racines; on concevra aisément comment en coupant les feuilles, & ne laissant que la tige, on nuit essentiellement à la production de la plante.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

FIGURE 1. *a.* Le *quercus maritima n.° 1*, a sa première crûe, *b* un peu plus grand, *c* plus grand encore; l'échancrure que l'on voit à l'extrémité des plantes *b*, *c*, indique la première division qui doit se faire dans ce varech.

Fig. 2. Ce varech assez grand pour que l'on puisse y voir la division de deux feuilles.

Fig. 3. Le même varech dont les divisions subséquentes sont indiquées par des nervures.

Fig. 4. Le *quercus maritima*, avec plusieurs divisions auxquelles on a donné le nom de *feuilles*.

Fig. 5. Un fragment de feuille du *quercus maritima*, sur laquelle on voit en *xx* les poils que M. de Reaumur a regardés comme les étamines de la plante; à l'extrémité de cette feuille, il y avoit aussi des boutons qu'il croyoit contenir les graines.

Fig. 6, 7 & 8. La racine du *quercus maritima n.os 1, 2 & 3*, elle forme un empatement, & s'attache sur la roche ou les cailloux qu'elle embrasse, comme on le voit *fig. 8*.

Fig. 9. La feuille du *quercus maritima n.° 1*, avec les poils qui dénotent l'individu mâle.

Fig. 10. L'extrémité de la feuille du *quercus maritima n.° 2*, avec de grosses vessies à deux cornichons, & qui est regardé comme l'individu femelle.

Fig. 11. La peau de ces vessies & la vessie coupée, vues à la loupe avec les tubercules *d e* qui contiennent les graines *g*.

Fig. 12. Une vessie à trois cornichons.

Fig. 13. Le varech *n.° 3, à vésicules; h* ces vésicules; *i* la vésicule ouverte, & dans laquelle on voit un réseau très-fin.

Fig. 14. Le varech *n.° 5*, appelé *lacet; y* un fragment de la feuille qui porte la graine.

Fig. 15. Le varech *n.° 8*, nommé *baudrier*. Quand ce varech est fraîchement cueilli, on voit sur la feuille des parties plus relevées & différemment colorées.

PLANCHE II.

Fig. 16. La racine du varech *n.° 8*, la tige est ronde.

Fig. 17. La racine du varech *n.° 7*, la tige de celui-ci est plate; la tige imite la figure de la paume de la main, & se partage ensuite en plusieurs lanières: l'extrémité des racines est en suçoirs.

Fig. 18. La racine du varech *n.° 5*, appelé *lacet*, avec le chapeau *s*, qui est ordinairement à l'origine de la tige.

Fig. 19. La racine du lacet *n.° 5*. Quand la plante a trois tiges, il s'y trouve aussi trois soucoupes ou chapeaux *t t t*.

Fig. 20. La racine du varech *n.° 6*, à *siliques*.

Fig. 21. Cette racine avec un petit empatement.

Fig. 22. Les siliques *l, m, n, o, p, q* de cette espèce de varech *n.° 6*; certaines sont comme articulées *m*, & divisées par des cloisons *n*; les unes sont terminées par une partie arrondie *o*, d'autres sont pointues *p, q*.

Fig. 23. Une variété de l'espèce *n.° 4*, connu sous le nom de *nodosus*; *r* son fruit.

Fig. 24. Autre variété du nodosus; *r r r* son fruit porté par un long pédicule. Les nœuds de cette variété sont concaves vers leurs centres, & relevés par les bords.



MÉMOIRE

TOUCHANT LA SUPÉRIORITÉ DES PIÈCES D'ARTILLERIE longues & solides, sur les Pièces courtes & légères; & où l'on fait voir l'importance de cette supériorité à la Guerre.

Par M. le Marquis DE VALLIÈRE.

IL y avoit environ trois siècles que toutes les Nations policées, travailloient à l'envi, à perfectionner leur Artillerie, lorsque feu M. de Vallière fut chargé de travailler à la perfection de la nôtre, comme il avoit déjà travaillé à la perfection du Corps destiné à son service. Notre Artillerie alors s'étendoit depuis la pièce de 33 livres de balle, jusqu'à celle du fauconneau de $\frac{1}{4}$ de livre; & on avoit, outre cela, des pièces courtes & légères depuis le calibre de 4 livres jusqu'à celui de 24 livres, particulièrement destinées pour la guerre de campagne.

Ce ne fut point arbitrairement & sur des conjectures vagues, que M. de Vallière se détermina dans la réforme importante qui lui étoit confiée. Il avoit vu pendant les vingt-huit dernières années du règne de Louis XIV, les effets & les inconvéniens des différentes Artilleries de l'Europe; & il les avoit médités à loisir, pendant la longue paix dont jouit la France, au commencement du règne de Louis XV. Ce fut d'après cette longue étude qu'il conçut le projet si simple & si fécond d'une seule Artillerie réduite à cinq calibres, depuis 4 livres jusqu'à 24, qui tous étoient propres à l'attaque & à la défense des Places, & dont les trois premiers, combinés suivant les circonstances, l'étoient particulièrement pour la guerre de campagne; de sorte que dans le besoin, les Places pourroient fournir aux Armées & les Armées aux Places. En conséquence de ce premier point de

vue, M. de Vallière détermina la longueur des pièces, par celle qui leur étoit néceſſaire pour ſervir dans des embraſures: propriété indiſpenſable dans l'attaque & la défenſe des Places, qui devient ſouvent néceſſaire pour la guerre de campagne, & qui fournit une longueur avantageuſe pour le pointement, la force & la portée des coups; il donna à ces pièces toute la ſolidité dont ſa longue expérience lui avoit fait connoître la néceſſité, tant pour la réſiſtance & la durée des pièces, que pour la ſécurité de ceux qui ſeroient employés à leur ſervice. Quant aux affûts & autres attirails, il eut particulièrement égard à leur ſolidité & à la facilité de leurs conſtruction & réparation: il négligea l'agrément du coup-d'œil, aujourd'hui ſi fort à la mode.

Ces cinq calibres de canons ſuffiſoient alors, parce que la France n'avoit pas encore adopté le ſyſtème de l'aſſociation indiſſoluble de l'Artillerie avec l'Infanterie. L'Artillerie concertoit ſes manœuvres propres avec celles de l'Infanterie & de la Cavalerie, mais elle ne les aſſimiloit pas à celle d'aucun de ces deux Corps; elle préféroit les poſitions les plus avantageuſes, à des diſpoſitions ſymétriques à tant de pièces par bataillon, lorſque, à l'exemple des Étrangers, au lieu de perfectionner notre Tactique, nous nous déterminames à lui donner ces faux appuis; les pièces de 4 courtes, appelées *à la Suédoiſe*, rempliſſoient cet objet; elles étoient déjà introduites parmi nous; mais l'expérience de guerre ne leur ayant pas été favorable, elles n'étoient propres qu'à cet uſage, auquel on ne pouvoit employer commodément de meilleures pièces plus longues & plus peſantes.

Le ſyſtème des pièces courtes & légères, s'eſt accrédité dans le nord de l'Europe, au point de l'adapter, non-ſeulement aux pièces de Régiment, vu, diſoit-on, la commodité de pouvoir les manœuvrer à bras, mais encore aux pièces des calibres ſupérieurs qui ne ſe peuvent plus manœuvrer à bras. Les partiſans de cette nouvelle Artillerie ont oſé même conteſter la ſupériorité des pièces longues, ſur les pièces courtes & légères, de même calibre; & toutes les fois qu'ils ſe ſont

vus forcés dans un retranchement si peu soutenable, ils ont recouru au subterfuge de dire, que cette supériorité est inutile à la guerre ; & quand on les force dans ce second poste, ils rentrent dans le premier. Si le préjugé tient chez eux à trop de racines pour céder aux preuves que je vais accumuler de leur double erreur, j'espère au moins qu'elles suffiront pour toutes les personnes qui cherchent uniquement la vérité, & qui ont assez de discernement pour la reconnoître.

ARTICLE PREMIER.

SUPÉRIORITÉ des Pièces longues, sur les Pièces courtes de même calibre.

Supériorité de portée.

QUAND on voit que constamment le fusil porte plus loin que le pistolet ; quand on apprend, par une tradition uniforme, que les coulevrines portoient plus loin que les autres pièces ; comment peut-on douter que les pièces plus longues portent plus loin ? Pour éluder la force de la comparaison du fusil au pistolet, on abuse de la maxime qu'il ne faut pas conclure du petit au grand.

On conviendra bien que les effets ne paroissent pas toujours croître ou diminuer exactement dans la même proportion que croît ou diminue la cause qui les produit, mais il n'est pas moins incontestable que toutes les fois que la cause augmentera, l'effet augmentera dans quelque proportion que ce puisse être, & diminuera réciproquement, plus ou moins, suivant les circonstances incidentes, lorsque la cause diminuera, comme il s'annullera par la cessation absolue de la cause.

En effet, les Auteurs les plus célèbres qui ont travaillé à établir les principes de l'Artillerie, Robins, Euler, d'Arcy & d'Antoni, sont d'accord qu'on peut ici conclure, du petit au grand, puisqu'ils ont fait la plupart de leurs expériences avec de petits canons semblables à ceux de fusils & de pistolets.

Pour infirmer la ſeconde comparaiſon (de la coulevrine), on oppoſe des exceptions peu approfondies à des faits innombrables; & on dit qu'un morceau de deux pieds & demi de longueur étant emporté par le boulet, de l'extrémité de la volée d'une pièce extrêmement longue, il ſe trouva qu'après cet accident, la même pièce chaſſoit ſon boulet plus loin qu'auparavant; mais la nature même de l'accident prouve que l'ame de cette pièce n'étoit pas droite, & que ſa courbure occaſionnoit au boulet, un choc qui devoit retarder ſa vîteſſe, avant que cet obſtacle fût emporté. La coulevrine de Nanci, dit-on, encore, portoit moins loin que des pièces plus courtes; on peut répondre 1.° que les défauts de cette pièce, exceſſivement longue, ne concluent rien contre les plus grandes longueurs actuellement en uſage: 2.° que la ſurpriſe même qu'a cauſée cette pièce, & les recherches qu'on a faites ſur ſes défauts de portée & de juſteſſe, prouvent aſſez qu'on étoit bien convaincu que les pièces plus longues, quand elles ſont bien faites, doivent avoir plus de portée & plus de juſteſſe; & que l'on regardoit le défaut de ces deux qualités, comme un ſigne certain & non équivoque de quelque vice réel, quoique caché dans la conſtruction de la pièce: 3.° ſi on conſidère combien il étoit difficile, pour fondre une pièce auſſi longue, de faire tenir le noyau aſſez bien aſſuré dans un moule proportionné à cette longueur exceſſive, pour que la chute & le bouillonnement du métal en fuſion, ne le puſſent ébranler ni déranger; on conviendra que l'ame de cette pièce ne pouvoit être bien droite.

Pour faire illuſion aux perſonnes peu inſtruites, on avance que les avantages attribués aux pièces longues, étoient ſuppoſés ſans preuve, & qu'on n'avoit fait aucune expérience pour les conſtater. Compte-t-on donc pour rien les expériences de guerre ſans nombre qui leur ont conſtamment confirmé cette ſupériorité? Ne ſont-elles pas, au contraire, la vraie pierre de touche en pareille matière, & les ſeules déciſives?

En effet, combien d'opérations & d'épreuves ont réuſſi un

un jour ſupérieurement dans des exercices particuliers d'une École, qui, répétées le lendemain, ont manqué, quoiqu'on eût, en apparence, obſervé les mêmes précautions; quelquefois du matin à l'après-midi ! Rien de plus difficile que de faire bien, des expériences; celles de l'Artillerie peut-être plus que toute autre. Que de variations dans la poudre & dans ſes effets! Dans la poudre, quoique fabriquée dans les mêmes manufactures, ſoit par la qualité des ſalpêtres, plus ou moins rafinés, du charbon plus ou moins pulvériſé, du ſoufre plus ou moins pur, du mélange plus ou moins égal; ſoit par ſon inflammabilité plus ou moins complette, à raiſon du plus ou moins de ſiccité. Quelle différence ne fait pas une compreſſion plus ou moins exacte du boulet contre la poudre, un peu plus ou moins de vent au boulet, le plus petit défaut dans ſa ſphéricité! que d'inconvéniens de la part de la température de l'air; s'il eſt ſec le matin, humide l'après-midi; de chaud s'il devient ſubitement froid; ſi le vent vient en face, en arrière ou de côté, ne doit-on pas s'attendre à autant de variations dans les effets ? Ce qui réuſſit à la guerre, réuſſira par-tout; mais ne réuſſira pas toujours à la guerre, ce qui aura réuſſi ailleurs. Ce n'eſt pas que l'on doive blâmer des expériences bien méditées, faites ſans prévention & avec le deſir de trouver la vérité, favorable ou non à un ſyſtème qu'on aura adopté d'avance. J'obſerve ſeulement, qu'autrement elles ne pourroient ſervir qu'à étayer ou établir de fauſſes opinions; confirmer l'erreur ou détruire les connoiſſances déja acquiſes; & que c'eſt avec la plus grande réſerve qu'on y peut donner ſa confiance, juſqu'à ce qu'elles aient reçu le ſceau de l'épreuve faite à la guerre, ſeule déciſive de leur utilité. Y a-t-il en effet quelqu'un aſſez peu inſtruit de l'hiſtoire de l'Artillerie, pour ignorer les efforts qu'ont faits à l'envi, les différentes nations de l'Europe pour la perfectionner, & les réſultats de leurs opérations ? Entre un grand nombre d'expériences qu'on pourroit leur citer, on choiſira celles que fit faire M. de Montecuculli, dont la réputation & les ouvrages ſont connus de tous les militaires.

Il fit fondre, dit-il dans ses Mémoires, quantité de pièces de degrés en degrés, depuis la plus courte jusqu'à la plus longue; depuis la plus légère jusqu'à la plus grosse; & il fit tendre ensuite, d'espace en espace, depuis la plus petite distance jusqu'à la plus grande, un grand nombre de toiles, l'une derrière l'autre, en travers dans la ligne du coup. Il fit encore tirer plusieurs coups contre une terre plus ou moins épaisse, afin de juger à l'œil, de la résistance, de la justesse & de la force des pièces, & de connoître de plus, l'étendue & le genre de la ligne que le boulet auroit tracée dans l'air. C'est d'après ces épreuves qu'il conclut que l'Artillerie trop légère, ne peut faire un grand effet, qu'elle recule trop, qu'elle s'échauffe en peu de temps, qu'elle ne tire pas toujours juste, &c. & que les coulevrines auxquelles il donne depuis 32 jusqu'à 36 calibres de longueur d'ame, servent pour porter loin. Il est vrai que ce grand homme blâme aussi l'Artillerie trop grosse & trop pesante; mais à en juger par celle qu'il adopte, il est clair que ce blâme est bien éloigné de tomber sur la nôtre.

Quelque fondé que l'on pût être à croire que feu M. de Vallière, l'auteur de la célèbre Ordonnance de 1732, qui a blanchi au milieu des feux de l'Artillerie, & qui a eu part, dans la longue carrière de sa vie, à plus de soixante-dix siéges ou batailles, fût capable de former une excellente Artillerie; on ne citera point son autorité aux partisans du nouveau systême. Il osoit dire, après des expériences faites à l'aise, sur un terrein choisi, dans la tranquillité d'une école, en temps de paix, dont il savoit occuper le loisir à des recherches utiles pour perfectionner l'Artillerie, qu'on n'en pouvoit encore bien juger que dans une guerre véritable & vigoureuse. Ils ne manqueroient pas de dire que toutes ces expériences anciennes ont été mal faites, & que les effets de guerre ont été mal vus.

Passons donc aux plus savans d'entre les modernes qui ont traité cette matière, tant par l'expérience que par le calcul. M. Robins établit pour sa seconde maxime pratique résultante de sa théorie expérimentale, que si deux pièces du même

calibre, mais de différente longueur, sont chargées de la même quantité de poudre, la plus longue imprime plus de vîtesse à son boulet que la plus courte. Il cite à ce sujet l'expérience faite avec une coulevrine de 60 calibres de longueur, laquelle réduite à 20 calibres, ne put faire pénétrer son boulet qu'à la moitié de la profondeur où il s'enfonçoit avec la pièce de 60 calibres, quoiqu'avec la même charge.

M. le Chevalier d'Arcy, de l'Académie Royale des Sciences, qui a répété en France, avec la plus grande exactitude, les expériences de Robins, & qui a employé encore de nouveaux moyens pour les vérifier, a trouvé constamment que les coups les plus foibles d'un canon de 6 pieds, surpassoient les plus forts d'un canon de 4 pieds de même calibre, quelque petites que fussent les charges, pourvu qu'elles fussent les mêmes pour l'un & l'autre canon, & qu'on eût tiré sous le même angle.

Le célèbre M. Euler, qui a porté le flambeau des Mathématiques le plus avant dans l'Artillerie, a démontré que la charge étant la même, la vîtesse imprimée au boulet est d'autant plus grande, que la pièce contient plus de fois son calibre dans toutes les longueurs admissibles dans la pratique.

M. d'Antoni, Directeur de l'école d'Artillerie de Turin, qui a donné un si bel Ouvrage sur les principes de l'Artillerie, sous le titre d'*Examen de la Poudre*, regarde d'abord, comme incontestable, la supériorité de portée des pièces plus longues; il la prouve par le raisonnement qui se trouve confirmé dans la suite de son Ouvrage, par des expériences, quoique faites dans d'autres vues.

Ainsi la théorie d'accord avec l'expérience, a démontré que les pièces plus longues impriment plus de vîtesse à leurs boulets à charge égale : on convient que la portée n'est point proportionnelle à cette vîtesse initiale, à cause de la résistance de l'air; mais 1.° on ne peut au moins disconvenir que la portée ne soit plus grande, dans quelque rapport que ce soit, pour ceux d'entre les boulets de même calibre qui reçoivent la plus grande vîtesse primitive; 2.° sous l'horizontale & les

degrés voiſins, cette force non épuiſée à la première chute, produira des ricochets très-étendus, auſſi utiles au moins que les coups de plein fouet. Mais, diront les défenſeurs du nouveau ſyſtème, dans les expériences & les démonſtrations citées, on n'a point eu égard aux ingénieux moyens que l'on a découverts pour retrouver dans les pièces courtes, l'égalité de portée avec les pièces longues de même calibre; nous y parvenons, 1.° en donnant un demi-degré ou $\frac{2}{3}$ de degré d'élévation de plus à nos pièces; 2.° en diminuant le vent de leurs boulets; 3.° en vous obligeant d'augmenter celui des vôtres beaucoup au-delà de ce que preſcrit l'Ordonnance de 1732. Pour excuſer ce qu'il y a de révoltant (dans cette troiſième prétention ſur-tout), ils diſent avoir trouvé, quelque part dans nos Arſenaux, des boulets qui avoient beaucoup plus de vent que ne preſcrit l'Ordonnance de 1732; mais en ſuppoſant que ces boulets ne fuſſent, ni d'un calibre étranger, ni antérieur à l'Ordonnance de 1732, peut-on ſe ſervir d'une infraction pour attaquer une Ordonnance? Quelle loi dans l'Univers pourroit ſubſiſter, ſi l'infraction étoit un titre pour ne la plus reconnoître?

Aucune Nation faiſant uſage des armes à feu, n'a ignoré qu'on augmentoit leurs portées, en augmentant le degré d'élévation de la pièce, & en diminuant le vent des boulets. De quel droit prétendent-ils s'arroger le privilége excluſif d'employer au ſervice de leurs pièces, des moyens connus de tout le monde, avec leſquels, toute pièce ancienne, de tout calibre indiſtinctement, ſera aſſurée d'augmenter, & ſa force & l'étendue de ſa portée? Si la ſimple expoſition de ces miſérables ſubterfuges, ne ſuffit pas pour en faire voir le ridicule, j'ajouterai 1.° que lorſque l'augmentation du degré ne ſera point déſavantageuſe pour l'effet qu'on ſe propoſe, la pièce longue pourra la prendre, comme la courte, & n'en conſervera pas moins ſa ſupériorité ſur celle-ci; mais lorſque cette augmentation de degré ſera déſavantageuſe, aucune des deux n'en doit faire uſage; 2.° j'en dirai autant de la diminution du vent: l'avantage qui en réſulte n'appartient

pas plus aux pièces courtes qu'aux longues; & quand celles-ci emploient ces boulets concurremment avec les pièces courtes, elles conservent toujours, ainsi que dans le cas précédent, leur supériorité primitive, & acquièrent en proportion une nouvelle augmentation de portée.

On n'imagine pas que ce soit à titre d'inventeurs de cet expédient, que les zélateurs de la nouvelle Artillerie, prétendent s'en servir seuls, & en interdire l'usage à tous autres.

Dès le temps de Louis XIII, on avoit réduit en France le vent à une ligne pour le calibre, même de 7 livres 4 onces, & pour tous ceux au-dessous; & M. de Vallière, dès 1747, avoit envoyé des ordres aux forges, pour faire, à une ligne de vent, les boulets des pièces dites de 4 livres, & ceux des autres calibres à proportion. Ce seroit donc à tort qu'on les donneroit pour les inventeurs de cette réduction de vent; & quand ils le seroient, comment peuvent-ils se dissimuler, que cet avantage devenu commun aux pièces longues, aussi-bien qu'aux pièces courtes, non-seulement conserve constamment aux premières la supériorité décidée sur les dernières, mais encore que la pièce longue peut bien mieux profiter de cette diminution de vent que la courte, parce que le fluide élastique de la poudre enflammée, retenu par ce moyen plus long-temps dans l'ame de la pièce plus longue, continuera encore dans ce surplus de longueur, ses pressions redoublées contre la surface postérieure du boulet, & le chassera par conséquent bien plus loin ? La diminution de vent n'appartient donc pas plus de droit que de fait à l'Artillerie raccourcie.

Supériorité de Justesse.

La supériorité pour la justesse du tir des pièces longues sur les pièces courtes du même calibre, tirées à charge égale & sous le même angle, ne sera pas plus difficile à démontrer. La comparaison du fusil au pistolet du même calibre, tirés à même charge l'un & l'autre, & avec les mêmes attentions, a déjà prouvé que la longueur du canon donnoit au fusil,

toutes choſes étant égales d'ailleurs, une ſupériorité de portée très-conſidérable ſur celle du piſtolet. La même expérience démontre auſſi complètement la ſupériorité de la juſteſſe du tir des pièces longues; & ſi ſenſiblement, que l'on regarde comme un prodige d'adreſſe peu commun, d'atteindre avec un piſtolet un objet médiocrement éloigné, que la perſonne la moins expérimentée au maniement des armes, atteindra ſans peine du premier coup, avec un fuſil. Cette expérience journalière & connue de tout le monde, paroîtroit ſeule devoir convaincre toute perſonne dépouillée de prévention; mais les épreuves faites en grand, je veux dire avec des pièces d'Artillerie, ne peuvent laiſſer aucun doute aux perſonnes de bonne foi les plus prévenues.

Feu M. le Maréchal de Saxe qui avoit vu faire uſage des pièces Suédoiſes dans les guerres d'Allemagne, voulut, lorſque le feu Roi lui confia le commandement de ſes Armées, les employer une campagne. La légèreté de ces pièces, qui ſembloit offrir plus de facilités pour le tranſport & pour les manœuvres, étoit un appât ſéduiſant qui leur avoit concilié une grande faveur dans le Nord, & donné une réputation dans l'Europe. Mais ce Général trop éclairé pour que la prévention tînt chez lui long-temps contre l'évidence, ne tarda pas à reconnoître les défauts eſſentiels de cette légèreté illuſoire, lorſqu'il eût vu par lui-même, les effets bien ſupérieurs de nos pièces longues de même calibre, tant pour la portée & la force, que pour la juſteſſe des coups & leurs effets deſtructeurs: auſſi déclara-t-il qu'il ne vouloit pas qu'on mît plus de dix de ces pièces courtes dans ſon équipage d'Artillerie à la campagne ſuivante, & revendiqua les pièces de l'Ordonnance de 1732.

En effet, nos pièces longues, d'après cette Ordonnance, ont plus de juſteſſe, tant du côté du pointement, que du côté du tir. 1.° Elles ont plus de juſteſſe du côté du pointement, car il eſt démontré qu'entre des inſtrumens ſemblables, celui qui a le plus long rayon, ſans ſortir des bornes de la viſion diſtincte, eſt le plus juſte; le canon a d'autant plus

beſoin de longueur pour obtenir la juſteſſe, qu'il n'a pas, ni ne peut avoir, comme les inſtrumens de Mathématiques, le ſecours des pinnules. Il eſt donc ſenſible que la même déviation du rayon viſuel vers la bouche de la pièce courte, donneroit à quatre ou cinq cents toiſes, une erreur qui ſeroit très-conſidérable; il faut donc convenir que les pièces plus longues, ont plus de juſteſſe du côté du pointement. 2.° Elles ne l'ont pas moins du côté du tir; car les pièces ont d'autant plus de juſteſſe du côté du tir, que leurs coups ſont plus raſans & que leurs boulets s'écartent moins de la direction du but. Or, les pièces longues ayant plus de portée, toujours à égalité de charge, ont encore, à raiſon de l'impreſſion du mouvement qui a perſévéré plus long-temps dans l'excédant de la longueur, plus de vîteſſe; leurs boulets arrivent plus promptement au but, & les effets de la peſanteur étant comme les carrés des temps, il s'enſuit que moins de temps mettra un boulet à parcourir un eſpace donné, moins ſa peſanteur l'aura fait décliner de ſa ligne de mire: les coups ſeront plus raſans & on n'aura plus beſoin que d'un angle moindre, pour compenſer l'effet de la peſanteur. On ne ſera plus dans le cas de chercher au haſard, & par l'eſtimation ſeulement, l'angle néceſſaire pour faire arriver le boulet, qui, avec les pièces courtes, ne peut atteindre le même but, qu'à la faveur d'un plus grand angle, à la fin de ſa chute, en plongeant, après avoir perdu preſque toute ſa force, & n'ayant guère plus que celle de la peſanteur, qui lui ôte même celle de faire ricochet.

Ainſi la longueur de la pièce diminue deux cauſes principales de l'incertitude des coups, qui ſont, l'élévation de la pièce & l'effet de la peſanteur: & par conſéquent la pièce plus longue a plus de juſteſſe du côté du tir; & comme on a fait voir qu'elle avoit le même avantage du côté du pointement, il s'enſuit que le raiſonnement eſt d'accord avec l'expérience, pour lui adjuger la ſupériorité de juſteſſe. Je penſe que ce que je viens de dire, doit ſuffire à quiconque ne cherche qu'à s'aſſurer du vrai.

On s'attend bien que les défenſeurs des pièces courtes repliqueront, qu'au moyen d'une hauſſe mobile qu'ils ont adaptée à leurs pièces, ils ont paré ſi bien à cet inconvénient, qu'ils ſe ſont procuré même, s'il faut les en croire, la ſupériorité de juſteſſe. Pour vouloir trop prouver, on ne prouve rien; ſi la hauſſe mobile étoit capable de procurer un ſi grand avantage par elle-même, en l'adaptant à la pièce longue, qui n'en ſeroit pas moins ſuſceptible que la pièce courte, celle-là en acquérant un nouveau degré de perfection & de ſupériorité ſur elle-même, l'acquerroit dans la même proportion ſur celle-ci. Mais il faut conſidérer, 1.° que la hauſſe mobile, tant pour la pièce longue que pour la courte, eſt un mauvais inſtrument; 2.° qu'elle ne peut ſervir preſque jamais qu'à faire tirer, lorſqu'on ne devroit pas tirer; 3.° que ſon opération eſt toujours tâtonneuſe & ſouvent impoſſible. J'ai dit, 1.° que la hauſſe étoit un mauvais inſtrument, parce qu'à la guerre ſes mouvemens ſeront ſouvent embarraſſés par la rouille, la pouſſière & la boue qui s'y introduiront; & parce que ſa fragilité la rendra ſujette à ſe fauſſer & à ſe briſer, étant maniée par des mains groſſières, avec la précipitation qu'excitent l'ardeur du combat & la vue du danger.

J'ai dit, 2.° qu'elle ne peut ſervir preſque jamais qu'à faire tirer, lorſqu'on ne devroit pas tirer, parce que l'effet de la hauſſe eſt de donner de l'élévation à des pièces qui en ont peut-être déjà beaucoup par leur conſtruction: or les boulets tirés de cette manière, n'agiſſant que ſur le point où ils tombent en plongeant, & faiſant peu ou point de ricochets, ne pourront rencontrer l'ennemi que par le plus grand haſard; & quand ils le rencontreront, ne bleſſeront guère qu'un homme. Il vaudroit donc mieux, généralement parlant, conſerver les munitions pour le moment où elles ſeront plus utiles. J'ai dit, 3.° que ſon opération eſt toujours tâtonneuſe & ſouvent impoſſible; en effet, pour en uſer utilement, il faudroit pouvoir obſerver la chute du premier boulet, afin de donner en conſéquence plus ou moins de degrés de hauſſe, ſelon que le boulet ſeroit tombé trop près ou trop loin. Mais vis-à-vis de

de l'ennemi, ſait-on de combien le boulet eſt tombé trop près ou trop loin? D'ailleurs les portées ne ſont-elles pas ſujettes à varier? & pour atteindre une ligne de trois hommes de profondeur, par la ſimple chute du boulet, il faut la plus grande préciſion. Que de tâtonnemens pour vaincre ces difficultés! & peut-on ſe flatter de les vaincre? Mais ſi on ne peut pas obſerver la chute des boulets, comme il arrivera très-fréquemment, ſi l'ennemi eſt en mouvement; ſi on y eſt ſoi-même; n'eſt-il pas évident que les moyens de régler ces tâtonnemens deviennent impraticables, & que par conſéquent l'uſage de la hauſſe devient impoſſible?

Je crois avoir ſolidement établi la ſupériorité des pièces longues, ſur les pièces courtes, tant pour la portée que pour la juſteſſe; je penſe avoir mis dans la plus grande évidence la frivolité & l'inſuffiſance des moyens par leſquels on a prétendu retrouver dans les pièces courtes une égalité de portée & de juſteſſe avec les pièces longues: moyens qui n'en imposeront à aucun Militaire éclairé, encore moins à aucun Officier d'Artillerie expérimenté, & qui, bien appréciés, ſeront ſi l'on veut, des expédiens ingénieux & adroits pour défendre une mauvaiſe cauſe, mais qui, dans le vrai, ne ſont qu'un aveu forcé de l'infériorité des pièces courtes. Il n'eſt qu'un point ſeul ſur lequel on ne peut malheureuſement leur refuſer une fâcheuſe ſupériorité, c'eſt celle du recul.

La théorie ſeule nous apprendroit que les pièces courtes & légères ont plus de recul que les pièces longues de même calibre, & à même charge, pour trois raiſons; la première, parce que la poudre enflammée leur imprime plus de vîteſſe en arrière, à proportion de leur plus de légèreté; on ſait que l'exploſion de la poudre enflammée agit dans tous les ſens, tandis qu'elle chaſſe le boulet en avant du côté de la bouche, elle repouſſe la culaſſe en arrière avec la même impétuoſité. La pièce courte étant plus légère que la pièce longue de même calibre, il eſt tout naturel qu'à même charge de poudre, elle recule plus loin que la pièce longue dont le poids oppoſe plus de réſiſtance; la deuxième, parce que la pièce courte

essuie moins de frottement sur le terrein, dans le rapport de cette même légèreté; la troisième, parce que l'essieu de fer souffre moins de frottement dans le moyeu dont le dedans est garni de boîtes de cuivre, suivant le nouveau système. L'expérience confirme pleinement la théorie, puisque dans des épreuves faites à Grenoble, on a trouvé que le recul des pièces du nouveau modèle étoit plus que triple de celui des pièces de l'ancien.

C'est un inconvénient, il est vrai, que la pesanteur énorme de l'Artillerie; on conviendra que ce seroit un très-grand bien, si on pouvoit l'alléger encore, sans en altérer la valeur & sans lui faire rien perdre de ses avantages; mais quelque pesante qu'elle soit, avons-nous à nous plaindre, lorsque nous la comparerons à la balistique des Anciens? On ne pouvoit fabriquer une partie de leurs machines que sur les lieux, sous les yeux des ennemis: une sortie d'une ville assiégée, détruisoit par le feu, sans ressource & en moins d'une heure, le travail de plusieurs mois. Nos pièces d'Artillerie, quelque pesantes qu'elles soient, plus mobiles que les machines des Anciens, sont toujours transportables; & à combien d'usages de plus ne sont-elles pas employées! Les avantages infinis que nous en retirons, nous dédommagent amplement des difficultés qu'il nous reste à surmonter, à raison de cette pesanteur.

Nous avouons cependant avec franchise que, quelqu'inférieures que soient ces difficultés à celles des machines des Anciens, elles ne sont encore que trop considérables, pour ne pas porter la plus grande attention à éviter tout ce qui peut, ou les augmenter, ou les multiplier.

C'est-là sans doute que les défenseurs de la nouvelle Artillerie, exalteront la prétendue légèreté de leurs pièces. Qui croiroit que c'est précisément cette nouvelle Artillerie qui éprouve elle-même, & fait éprouver à toute une armée, l'embarras de sa pesanteur ? En voici la preuve ; leur Artillerie est plus légère, disent-ils, elle vole; des hommes la portent sans le secours de chevaux, par-tout où l'on veut. Soit, mais tout au plus pour la pièce de quatre, car il est prouvé, par les

essais faits dans les exercices même, où l'on a tous les secours à souhait, que la manœuvre à bras est impraticable pour les calibres supérieurs, pour peu que le terrein offre de difficulté. D'ailleurs, quand même cette Artillerie seroit transportée avec plus de facilité, quels seront ses effets comparés avec ceux des pièces longues ? On peut déja le conclure de ce qui précède, & on le verra plus amplement détaillé dans la seconde partie de ce Mémoire. Or la mobilité d'une mauvaise pièce qui ne sert à rien, ou à peu de chose, & qui occupe la place d'une autre qui seroit beaucoup d'effet, loin d'être un avantage dans une armée, n'est qu'un embarras de plus & une ressource de moins; en effet, personne n'ignore qu'un des plus grands embarras d'une armée, est de faire marcher l'Artillerie avec ses munitions, chaque pièce, petite ou grande, exigeant que ses munitions soient portées dans une voiture séparée, attelée ordinairement de quatre chevaux. Or, les partisans de la nouvelle Artillerie ne font point de mystère de dire ouvertement, dans leurs Écrits, qu'en vertu de cette grande légèreté, ils augmenteront au moins d'un quart, ou d'un tiers, le nombre de leurs pièces dans un équipage de campagne. Si au lieu de cent vingt, cent trente, supposons cent cinquante pièces de l'ancienne Artillerie, ils en mettent deux cents de celle soi-disant légère, dont la majeure partie sera de gros calibre, au rebours de l'usage ancien, où le gros calibre étoit la plus petite proportion dans un équipage, croit-on que cette Artillerie qui, avec sa légèreté, somme toute, ne peut aller plus vîte que ses munitions, sans lesquelles elle devient nulle; croit-on, dis-je, qu'elle sera moins embarrassante & plus facile à conduire dans une longue marche, sur une grande route, qu'un équipage de l'ancienne Artillerie qui sera meilleure, sans contredit, quoique moins nombreuse, sur-tout en gros calibre, & dont la file sera d'un quart, & même d'un tiers plus courte. Qu'importe qu'on puisse porter cette Artillerie à bras, si ses munitions doivent marcher de concert, qu'apparemment on ne proposera pas de faire porter aussi à bras par des Soldats? Que de

peine un jour de bataille pour porter, placer cette multitude immense de pièces de Régimens! Eh combien d'elles totalement inutiles, ou qui ne servent qu'à consommer, en pure perte, des munitions précieuses, & qu'à faire du bruit sans effet, ne pouvant tirer que vis-à-vis trois hommes de hauteur, dont c'est un grand hasard, si un seul en est atteint, tandis que trois ou quatre batteries de pièces longues, placées avantageusement pour tirer d'écharpe ou de flanc sur des corps entiers, ou sur une ligne, décideroient souvent du sort d'une bataille? Dira-t-on que cette multitude de pièces oisives, qui ne marchent qu'avec leur approvisionnement ou munitions, quelque légères qu'elles soient, ne soit pas une surcharge inutile, & par conséquent embarrassante pour une armée? Leur légèreté n'est donc qu'un véritable leurre. Mais si les pièces courtes du nouveau système, ne peuvent être au pair avec les pièces longues du même calibre de l'Ordonnance de 1732, & ne peuvent, dans l'occasion, remplir ces mêmes services, encore incomplètement, sans substituer un calibre supérieur; n'est-il pas vrai, à la lettre, que l'Artillerie prétendue légère est intrinséquement & de fait plus pesante que l'Artillerie de l'Ordonnance de 1732?

Qu'il faille substituer la pièce de 8 courte à celle de 4 longue pour en égaler les effets, il ne faut pas croire que ce soit une simple supposition, il y a peu d'Officiers d'Artillerie qui ne soient convaincus de ce fait; mais ce qui tranche décisivement toute espèce de doute, est une pièce dont personne ne peut suspecter la fidélité, l'exactitude & l'authenticité. C'est un Mémoire raisonné sur les épreuves de la nouvelle Artillerie, faites à Strasbourg, de M. Leduc, Officier de mérite & éclairé, nommé par le Roi pour y assister en qualité de Commissaire de Sa Majesté, & qui, d'après ces expériences, dont le procès-verbal est connu, conclut qu'il falloit abandonner la pièce de 8 courte, & la remplacer par notre ancienne pièce de 4.

Or, s'il est vrai, comme on n'en peut douter, que l'Artillerie nouvelle, pour être au pair avec l'ancienne, & rendre

le même ſervice que les pièces longues, doive fournir le calibre de 8 court, où ſuffiſoit celui de 4 long, & ſoit forcée d'employer celui de 12 court, où celui de 8 long ſeroit ſuffiſant, non-ſeulement ce calibre ſupérieur ſera, à la lettre, intrinſéquement plus peſant * que la pièce longue du calibre inférieur, mais il faudra que la pièce courte s'approviſionne du double de munitions, au moins d'une moitié en ſus, ſi on veut qu'elle tire autant de coups que la longue, ou elle aura moitié, ou au moins un tiers moins de coups à tirer que la pièce longue; & on appelle cela une Artillerie légère! Dieu veuille que nos ennemis la conſervent à jamais, & le Ciel nous préſerve de les imiter!

Une fois avouée par les panégyriſtes de la nouvelle Artillerie, ou du moins une fois démontrée la ſupériorité de nos anciennes pièces longues, ſur les courtes nouvelles, pour la portée, pour la juſteſſe du tir, & même pour la légèreté & la facilité des tranſports, on auroit lieu de croire la diſcuſſion terminée, & la queſtion décidée ſans retour; mais il n'en eſt pas ainſi, ils prétendent que toutes ces ſupériorités, fuſſent-elles, diſent-ils, réelles, ſont inutiles à la guerre, & que la nouvelle Artillerie a plus qu'il n'en faut, à tous égards, pour ſatisfaire à tous les cas qui peuvent ſe rencontrer; c'eſt ce que nous allons examiner dans l'article ſuivant!

ARTICLE SECOND.

Importance de la Supériorité des pièces longues.

1.° Si le théâtre de la guerre s'éloigne des frontières, il faudra, dans le nouveau ſyſtème, tranſporter deux équipages complets d'Artillerie, l'un pour les ſiéges, & l'autre pour la guerre de campagne. Dans l'ancien ſyſtème, il ſuffiſoit d'ajouter quelques pièces de 16 & de 24, à des pièces de campagne, qui ſont propres à toutes eſpèces de guerre. Qu'on

* Voyez à la fin de l'addition à ce Mémoire, le poids des pièces des trois calibres, tant anciennes longues, que nouvelles courtes, tant montées ſur (& avec) leurs affûts, que ſeules ſans leurs affûts.

compare l'embarras, la dépenſe, la différence eſt énorme !

2.° Si la guerre ſe fait ſur les frontières, l'embarras & la dépenſe ne ſeront que diminués. A chaque ſiége qui ſe préſentera, il faudra faire venir toute l'Artillerie de ſiége, parce que l'Artillerie de campagne de l'armée aſſiégeante, ne peut entrer en batterie : dans l'ancien ſyſtème, celle de l'armée feroit une partie conſidérable de celle de ſiége.

3.° Si quelqu'avantage remporté, ou un mouvement volontaire de l'ennemi met dans le cas d'attaquer une Bicoque, qui exige cependant des batteries, faudra-t-il s'y morfondre pour attendre l'arrivée des pièces qui puiſſent ſervir dans des embraſures, & que l'ennemi pourra peut-être intercepter ? Non, dit-on, ce ſera un cas prévu, & on aura eu ſoin de ſe pourvoir d'Artillerie propre à cet uſage : on répond qu'on pourra ſouvent être ſurchargé de cette Artillerie, pendant toute une campagne, ſans trouver la circonſtance favorable de l'employer ; & tout ce qu'on peut conclure de ceci, c'eſt qu'il ſeroit bien plus avantageux d'avoir une Artillerie de campagne avec laquelle on pût, ſur le champ, ſaiſir les circonſtances heureuſes.

4.° On conſtruit quelque ouvrage, ſoit pour défendre une tête de pont, ſoit pour s'aſſurer d'un paſſage important, ſoit pour fortifier un camp, ou même un champ de bataille; mais le canon de campagne de la nouvelle Artillerie eſt trop court, il ne peut ſervir dans des embraſures; on fera, ſans doute, encore venir de l'Artillerie de ſiége de ces places de dépôt !

5.° Quand les circonſtances qui ont exigé ces pièces longues, ſeront paſſées, qu'en fera-t-on ? Les renverra-t-on aux places de dépôt ? Ce ſeroit un mouvement perpétuel, diſpendieux, embarraſſant & ſouvent dangereux, & ces inconvéniens augmenteroient à meſure qu'on s'éloigneroit de ces places de dépôt, car on n'eſt pas maître d'en avoir à ſa portée qui ſoient ſûres. Si on vouloit garder ces pièces, on ſurchargeroit une Artillerie déjà trop nombreuſe, & on tomberoit dans des embarras beaucoup plus grands que ceux qu'on prétendoit éviter par l'Artillerie nouvelle.

6.° Combien de fois la ſupériorité de force que donnent les pièces longues, ne ſera-t-elle pas avantageuſe pour rompre, percer, renverſer les obſtacles qu'oppoſe l'ennemi, comme colonnes de troupes, retranchemens, abatis, &c. effets qu'elles produiront d'autant plus promptement, qu'elles y joindront la juſteſſe du tir; & combien de fois le ſuccès à la guerre dépend-il de la promptitude de l'exécution!

7.° Toutes les fois qu'on combattra, Artillerie contre Artillerie, quel avantage n'aura pas ſur l'autre, celle qui aura en ſa faveur la ſupériorité de force, de portée & de juſteſſe, dirigée avec intelligence? C'eſt ce que l'Artillerie françoiſe a conſtamment éprouvé dans les guerres précédentes, & notamment à Berg-op-zoom où M. le Maréchal de Lowhendal commandoit. Il y avoit pluſieurs ſemaines que la tranchée étoit ouverte, la Place approviſionnée d'une Artillerie formidable, répondoit à nos feux ſur le front de l'attaque avec une vivacité ſans égale. Une de leurs pièces démontée par haſard par des coups trop directs, étoit bientôt remplacée par une autre qui ne donnoit pas le temps d'apercevoir le vide de la première. Un feu réciproque, continuel & des plus vifs devenoit meurtrier. Le ſiége menaçoit de tirer en longueur. On aperçut le défaut. Des coups directs, tirant de face contre une ligne où ſont rangés pluſieurs objets, n'en peuvent heurter qu'un ſeul; & s'il y a plus de vide que de plein, il doit y avoir des coups ſans nombre de perdus. On prolongea la première parallèle de droite & de gauche, & en embraſſant un plus vaſte terrein, des deux extrémités où l'on plaça deux batteries, l'une de huit pièces à la droite de l'attaque & ſix mortiers, l'autre de trois pièces & quatre mortiers à la gauche, on ſe trouva poſté avantageuſement pour tirer, non-ſeulement obliquement, ce qui eſt toujours favorable pour rencontrer plus d'objets, mais encore pour tirer preſque de flanc; moyen le plus deſtructeur de tous les obſtacles qu'on veut ruiner. On ne fut pas long-temps à en voir l'effet. Deux jours paſſés, il ne fut plus queſtion des feux de la place au front de l'attaque. L'ennemi avoit une bonne Artillerie,

la nôtre ne lui cédoit en rien. Tant que nous ne tirions que directement, nous combattions à armes égales; la position n'étoit pas plus avantageuse pour l'un que pour l'autre, le combat eût duré long-temps. Nous n'eumes pas plutôt occupé deux postes qui procurèrent une direction favorable pour l'Artillerie, que la chance tourna; deux batteries éteignirent seules des feux que n'avoient pu éteindre, pendant plusieurs semaines, les nombreuses batteries qu'on leur avoit opposées. Nouvelle preuve, comme l'a bien reconnu le Roi de Prusse, que ce n'est pas la quantité d'Artillerie, ni même la bonne seulement, qui fait prendre des villes & gagner des batailles, mais que c'est de la bonne disposition & de la direction bien entendue d'une bonne Artillerie, que l'on doit attendre le succès, & non pas du nombre qui, trop grand, nuit toujours plus qu'il ne sert.

Si la réussite dans les siéges dépend moins du nombre des pièces d'Artillerie, que d'une juste direction de leur feu, il n'est pas moins vrai que dans les batailles, nonobstant le changement successif des positions, qui sont au contraire stables & permanentes dans les siéges, ce n'est qu'autant que l'on saisira des directions heureuses pour tirer de flanc, s'il est possible, ou au moins d'écharpe sur les troupes ennemies, qu'on doit espérer de tirer parti, même de la meilleure Artillerie; on en a eu une preuve non équivoque à l'affaire de Dettingen, où une seule batterie qui suivoit l'ennemi, en se conformant à sa marche, tua plus de monde que n'eussent fait toutes les autres batteries ensemble.

Que résulte-t-il de ces faits notoires? Que quiconque mettra sa confiance dans une nombreuse Artillerie, fût-elle aussi bonne que la courte est mauvaise, sera déçu dans ses espérances, s'il ne connoît pas les avantages d'une bonne position, & s'il ne sait pas, ou ne peut pas se la procurer; & que quiconque connoîtra ces avantages, se gardera bien de s'embarrasser inutilement d'une Artillerie trop nombreuse, mais adoptera toujours celle qui sera du meilleur service. C'est ce qui a bientôt fait reconnoître le peu d'utilité des

pièces

pièces à la Suédoise, qui sont des pièces courtes, & de fait, incapables de produire les effets des pièces longues.

Il fut fait, en 1740, à Strasbourg, en présence de M.rs les Maréchaux de Broglio & d'Asfeldt, des épreuves pour comparer la vivacité du feu, entre la pièce à la Suédoise, que la nouvelle de 4 représente aujourd'hui, & la pièce de 4 ordinaire; on reconnut que par minute, la pièce courte tiroit onze coups, contre neuf de la longue; mais que la première s'échauffant plus vîte, il falloit interrompre son feu, pendant que l'autre continuoit encore son service sans avoir besoin d'être rafraîchie.

Si indépendamment de cet inconvénient, (dont on sent mieux l'importance dans le moment d'une action) on considère qu'il ne faut pas se flatter que l'on puisse tirer aussi promptement en présence de l'ennemi, qui ne manqueroit pas, par son feu, d'y mettre obstacle; & que de plus, quand on le voudroit, la seule fumée permettroit à peine de tirer cinq à six coups par minute: il sera toujours plus utile de tirer avec des pièces du calibre de 4, de bonne construction, qui ont de la portée, de la justesse & de la résistance, & qui servant encore à beaucoup d'autres usages, ne remplissent que plus supérieurement les seuls cas particuliers où les pièces courtes pourroient être de quelque service, rendent superflu l'usage des pièces courtes, dont la plus grande vivacité est absolument inutile dans la pratique, & diminuent les embarras de la multiplicité des différentes constructions.

8.° Toutes les fois qu'il sera question de défendre ou de tenter le passage d'une rivière; dans la défense, il s'agit 1.° de maîtriser par son canon l'embouchure des autres rivières qui tombent dans celle que l'on défend, parce que c'est ordinairement sur celles-là que l'ennemi fait ses préparatifs en secret & en sûreté, & c'est par elles qu'il débouche; le canon le plus propre à s'y opposer, n'est-ce pas celui qui a plus de portée & plus de justesse dans le tir? La comparaison qu'on fit à ce sujet en 1744, en présence de l'armée commandée par M. le Maréchal de Coigny, des pièces de 4

longues, avec celles à la Suédoise, ne laisse aucun doute. Ce Général ordonna qu'il seroit placé sur la rive gauche du Rhin dix pièces de 4, pour battre le confluent du Necker & couler à fond les bateaux qui s'y présenteroient : M. le Comte de Balincourt, depuis Maréchal de France, demanda des pièces à la Suédoise; M. de la Gaucherie, officier de mérite, l'un des Commandans de l'Artillerie, représenta qu'elles ne rempliroient pas l'objet qu'on s'étoit proposé : on employa des pièces à la Suédoise & des pièces de 4 longues; les boulets des premières n'arrivoient au terme marqué, que sous un angle trop ouvert, plongeoient & ne ricochoient point; ceux des pièces de 4 ordinaires, portoient sous un degré beaucoup plus bas, beaucoup au-delà de ce terme, & faisoient plusieurs ricochets après la première chute sur la surface de l'eau; toute l'armée en fut témoin. Il s'agit 2.° quand l'ennemi fait son embarquement sur le fleuve même, de le battre pendant qu'il s'approche de l'autre bord, pendant l'embarquement & pendant le trajet. La supériorité de portée servira pour le premier cas; la supériorité de justesse pour tous les trois. Veut-on passer à l'autre bord en présence de l'ennemi? l'objet de l'artillerie de l'armée qui tente le passage, doit être de balayer tous les obstacles qui se présentent à l'autre rive, tant artillerie que troupes; n'est-il pas évident que les pièces longues ayant plus de portée & de justesse, peuvent opérer plus efficacement cet effet? & soixante ou quatre-vingts toises de portée de plus ou de moins sont-elles, en ce cas, un objet indifférent?

9.° Si une armée ou un corps de troupes vouloit en obliger un autre, par la canonnade, d'abandonner un poste inabordable, quel avantage ne donneroient pas les pièces supérieures en portée, à l'armée qui auroit le bonheur de les avoir? Le succès n'en dépendroit-il pas totalement? On pourroit parcourir toutes les actions de guerre, on trouveroit par-tout quelques-uns des avantages des pièces longues. J'en viens à l'action principale qui est la bataille.

10.° Quand les colonnes de l'armée ennemie arrivent

ſur le champ de bataille, ſi le Général projette de les attaquer avant qu'elles aient fait leurs diſpoſitions, il ordonnera de les canonner pour les troubler & les retarder. Comme elles ne ſe ſont point encore étendues en une ligne mince, à trois hommes de profondeur, elles offrent un but ſuffiſant pour les canonner avec ſuccès, ſi elles ſont à moins de mille toiſes de diſtance; car les pièces de 4 longues à 4 degrés, & les calibres ſupérieurs à 3 degrés portent à cette diſtance, y compris les ricochets qui ſont plus propres que les coups de plein fouet pour troubler les manœuvres; les pièces courtes, à même diſtance, ne pourroient porter que ſous un trop grand degré d'élévation qui les priveroit du ricochet, & ne feroit tomber le boulet que ſur un point, & par conſéquent ſur un ſeul homme, ſi par haſard il s'y rencontroit. Si l'ennemi ſe forme & s'avance, les pièces courtes pourront tirer avec quelque ſuccès, mais alors les pièces longues commenceront à prendre des directions obliques qui feront un bien plus grand effet, de ſorte que l'ennemi étant à 400 toiſes, la pièce longue pointée ſous une obliquité qui forme ſur la ligne du front de l'armée ennemie un angle environ de 30 degrés, pourra mettre, à charge égale, à chaque coup, ſept à huit hommes, & peut-être plus hors de combat, s'ils ſont ſerrés à l'ordinaire, pendant que la pièce courte tirant directement, comme on le propoſe, n'en peut mettre au plus que trois. Si elle veut prendre, dans ce cas, la manière de tirer de la pièce longue, ſon boulet n'arrivera point; s'il arrive, ce ne ſera qu'à la faveur d'un degré d'élévation plus conſidérable; par conſéquent il ne tombera que ſur un ſeul point, en plongeant, & ſans ricocher. Il eſt même tel degré d'obliquité, celui de 10, auquel la pièce longue peut d'un ſeul coup mettre quinze à dix-huit hommes hors de combat: que fera de mieux à cette diſtance, la cartouche à balle tant vantée? De plus, la pièce courte pointée directement, doit opter entre tirer ſur le canon, ou ſur les troupes; la pièce longue moyennant le tir oblique, pourra ſe propoſer ce double but toutes les fois que le canon ennemi débordera ſa ligne; il pourra atteindre

l'un & l'autre du même coup, ou l'un au défaut de l'autre, rarement les manquera-t-on tous deux. Mais ce n'eſt pas le tout. Une batterie de pièces longues, capable de porter à mille toiſes, peut, au gré du Général, réunir tous ſes feux ſur telle partie de la première ligne de l'Armée ennemie, par où il lui plaira de faire commencer l'attaque, rompre cette ligne, y mettre le déſordre & porter la confuſion juſque dans les ſeconde & troiſième lignes, aſſurer la marche des attaquans, qui dans ce trouble auront peu à redouter les coups directs des pièces courtes de l'ennemi. Pendant que ceux-ci achèvent avec l'activité ſi caractériſtique de la Nation d'enfoncer un corps déjà ébranlé juſqu'à la troiſième ligne, cette même Artillerie change un peu ſa direction, répète ſur une autre partie de la même ligne, la plus voiſine, la même manœuvre; & promenant ainſi ſucceſſivement ſes feux ſur le reſtant de la ligne, non-ſeulement empêche les Bataillons ennemis de ſe ſecourir réciproquement, mais donne jour à de nouveaux aſſauts & prépare à de nouvelles attaques: voilà le véritable office de l'Artillerie dans les batailles; & c'eſt ainſi qu'il lui convient de protéger l'Infanterie françoiſe, & abandonner le reſte à ſa valeur. Si on ajoute à tout cela le déſavantage qu'ont ſouvent les pièces courtes de ne pouvoir ſaiſir des poſitions favorables que préſente le local, les unes parce qu'elles ſont trop éloignées pour leur portée, les autres parce qu'elles ſont trop étroites pour leur recul; il faudra convenir de bonne foi, que les pièces légères & raccourcies, ſont bien moins propres pour un jour de bataille que pour un exercice de parade.

Les batailles de Raucoux, de Dettinghen & d'Haſtembeck fourniſſent des preuves mémorables de ces vérités; dans la première, M. le Maréchal de Saxe, qui voyoit une colonne ſe former & venir à lui, employa des pièces longues du calibre de 16, qui décidèrent bientôt du gain de la bataille. De quelles reſſources eût été l'Artillerie nouvelle, quoique contre des troupes ſeulement, dans une circonſtance où ce Général, qui ne manquoit pas d'Artillerie de Campagne

jugea s'aſſurer mieux la victoire, en préférant un calibre de ſiège?

A la bataille de Dettinghen, commandée par M. le Maréchal de Noailles, lorſqu'on commença à apercevoir à plus de ſix ou ſept cents toiſes, le projet que l'Armée Angloiſe avoit de s'aſſembler dans la plaine de Dettinghen pour livrer la bataille; qu'euſſent fait, à cette diſtance, les pièces minces & courtes de la nouvelle Artillerie, que conſommer en pure perte beaucoup de munitions ſans atteindre l'ennemi? Incapables par leur peu d'épaiſſeur, d'augmenter ſans riſque, la charge modique de poudre à laquelle leurs partiſans les ont reſtreintes pour ménager leur foibleſſe, plutôt que pour faire une frivole économie de poudre, elles n'euſſent fait que du bruit & point d'effet; obligées de s'élever de pluſieurs degrés pour obtenir leur plus grande portée, chacun de leurs boulets, lancé dans ſa courſe en l'air, à une grande élévation, n'eût pu dans ſa chute, tomber, encore par haſard, que ſur un ſeul homme au plus, ſans pouvoir ricocher. Quelle différence des pièces longues, même d'un calibre inférieur! Une ſeule batterie, placée dans une direction avantageuſe, dont la manœuvre auſſi ſimple qu'ingénieuſe, eſt rapportée dans nos Mémoires de l'*année 1765*, par un feu raſant, dirigé ſous un angle modique, rompit toutes les meſures des Anglois & leur fit perdre beaucoup de monde.

On voit bien ſenſiblement par cet exemple, que comme l'a obſervé le Roi de Pruſſe, revenu depuis long-temps du préjugé de la nombreuſe Artillerie, il s'agit moins pour gagner des batailles d'en avoir une très-nombreuſe qui ne fait que multiplier les embarras, que d'en avoir une bonne & des Officiers intelligens.

Combien de temps n'eût-on pas perdu à la bataille d'Haſtembeck, gagnée par M. le Maréchal d'Eſtrées, s'il eût fallu attendre, pour tirer, que l'ennemi eût approché à cinq cents toiſes; il avoit conçu le projet d'attaquer notre ligne par colonnes & de ſe former ainſi à une diſtance conſidérable de plus de ſix à ſept cents toiſes. Qu'eût fait à un pareil

éloignement une Artillerie courte, oisive par économie, ou par impuissance? Une Artillerie qui ne doit pas, suivant ses partisans, tirer de plus de cinq cents toises, eût laissé croître cette colonne formidable, & lui eût donné le loisir de se former à l'aise, & sans la moindre inquiétude. Que firent les pièces longues? on s'aperçut par les mouvemens de l'ennemi, de son dessein, avant qu'il eût commencé à l'exécuter: on prit sur lui des feux de front, d'écharpe & de revers, qui le désolèrent; & plus il s'opiniâtroit à fortifier sa colonne, plus il éprouvoit les feux meurtriers de notre Artillerie, qui, en les multipliant & en les avançant sans interruption, mit l'armée ennemie dans une déroute totale, & nous procura une victoire complète sans perte de notre part.

Je me flatte que les personnes qui ne cherchent que le vrai, qui auront lû ce Mémoire, même avec quelque prévention, ne laisseront pas d'en conclure que l'Artillerie de l'Ordonnance de 1732, réunissoit toutes les qualités que nous avons détaillées, dont le concours est nécessaire pour former une bonne Artillerie; qu'elle étoit réduite à la plus grande simplicité, si desirable dans tout objet compliqué, dispendieux & embarrassant, & que l'adoption que l'on avoit faite des obusiers ne laissoit rien à desirer pour toutes les occasions où il convient d'employer de l'Artillerie.

Je crois avoir démontré la supériorité des pièces longues sur les pièces courtes, non-seulement du même calibre, qui sont bien loin de soutenir la comparaison, mais aussi sur celles du calibre supérieur.

J'ai prouvé cette prééminence de la pièce longue, tant à raison de sa solidité, qu'eu égard à l'étendue de sa portée, à sa justesse dans le tir, à la médiocrité de son recul, à la simplicité de sa construction, à celle de ses affûts, & à la facilité de faire réparer en tous lieux, & par toutes sortes d'ouvriers, les accidens qui peuvent survenir, quoique plus rarement qu'aux pièces courtes: enfin relativement à l'économie, puisque les pièces de l'ancien calibre de 4, faisant

l'office (& ſupérieurement) du calibre de 8 nouveau, le 8 ancien pareillement fourniſſant complètement le ſervice du nouveau de 12 ; il s'enſuit qu'il faut dans un équipage d'Artillerie, compoſé de pièces longues anciennes, un tiers (on pourroit dire moitié) moins de poudre, un tiers moins peſant de boulets; en un mot, beaucoup moins de chariots, de voitures, de charretiers, de chevaux que dans un équipage de la nouvelle Artillerie, prétendue légère, ſi celle-ci veut paroître égaler le ſervice de l'ancienne.

Quant à l'importance de cette ſupériorité à l'armée; qui auroit jamais imaginé qu'on eût oſé la mettre en problème, encore moins la combattre ſérieuſement? Cependant les partiſans du nouveau ſyſtème, dans l'impuiſſance où ils ſe trouvent réduits de prouver une égalité de valeur & d'effets entre leur Artillerie courte & notre ancienne longue, veulent paroître aujourd'hui n'avoir diſcuté la parité de ces avantages que par ſurabondance de preuves, & par un effet de leur perſuaſion intérieure, & nullement comme néceſſaire au ſoutien de leur ſyſtème-pratique; ils la croyent d'une aſſez légère importance pour les autoriſer à propoſer de ſubſtituer leur nouvelle Artillerie à la nôtre, & pour conſentir, mais par grâce, à abandonner cette ſupériorité. « Elle eſt, diſent-ils, inutile; vos pièces tirent à plus de 1000 toiſes? nous ne voulons tirer « qu'à 500 toiſes; vos pièces tirent, à une grande diſtance, « auſſi juſte que les nôtres à 500 toiſes; la juſteſſe de cette « diſtance nous ſuffit; on ne doit pas tirer au-delà. A 500 toiſes « nous ſommes égaux, c'en eſt aſſez. L'excédant eſt une ſuperfluité qui ne feroit que nous embarraſſer. Et ſi tant eſt que « ce ſoit un avantage, n'eſt-il pas plus que compenſé par celui « que procure la grande célérité, avec laquelle marche & « manœuvre notre Artillerie? » Mais de quelle autorité, & ſur quelle garantie, les défenſeurs du nouveau ſyſtème établiſſent-ils cette règle? Peut-on ordonner à l'ennemi d'approcher à 500 toiſes, lorſqu'il ſera poſté à 600? Reſtera-t-on ſpectateur oiſif de ſes travaux & de ſes manœuvres, juſqu'à ce qu'il lui plaiſe de s'approcher de 100 toiſes encore? « Au-delà de

» 500^t, dira-t-on, on ne porte avec l'Artillerie d'aujourd'hui, » en uſage dans toute l'Europe, que des coups incertains; » mais de près, ce feu ſera bien plus vif. Il faut avec ſes ennemis ſe battre à armes égales ſous peine d'être battu ». D'accord, ſi on n'en a pas de meilleures. Mais ſi l'on en poſsède qui lancent des coups meurtriers de plus loin, & qui atteignent vigoureuſement l'ennemi; qui à 7 ou 800 toiſes mettent le déſordre dans ſon monde, comme il pourroit faire dans le nôtre à 500 toiſes; doit-on attendre qu'il ſoit approché à cette diſtance où ſon feu ſera auſſi meurtrier contre nos troupes, que le nôtre contre les ſiennes, tandis qu'on a le loiſir avec une Artillerie meilleure que la ſienne de le prévenir avec une entière ſécurité, & de lui rendre impraticables les approches du point où il ſe trouveroit en paſſe de pouvoir meſurer ſon Artillerie contre la nôtre; pendant que l'on aura encore l'avantage avec des batteries de pièces longues qui le prendront de flanc ou d'écharpe, non-ſeulement de l'empêcher d'arriver à 500 toiſes, d'où il pourroit nous nuire, mais encore avant qu'il puiſſe nous atteindre, de fatiguer & même de rompre les troupes qu'il oſeroit faire avancer?

Combien d'exemples pourroit-on citer où l'on a été redevable de la victoire à la ſolidité de nos pièces longues pour ſoutenir long-temps, ſans interruption, un feu continuel dans une action animée : à leur longue portée, qui met autant d'hommes hors de combat par les ricochets, que par les coups de volée: à leur juſteſſe pour le tir, qui eſt indiſpenſable pour démonter des batteries & éteindre des feux meurtriers, d'où dépend ſouvent le ſort d'une action? Quelle reſſource offrent dans tous ces cas des pièces qui, de l'aveu de leurs panégyriſtes, ne commencent à tirer juſte qu'à 500 toiſes?

Voilà ce que nous a, juſqu'à ce jour, appris l'expérience de près de cinquante années, pendant leſquelles nous avons été ſucceſſivement, mon père ou moi, chargés de la direction générale de l'Artillerie, ſous l'autorité du Miniſtre; & ce que

que nous avons conſtamment obſervé, tant par nous-mêmes, que par les comptes qui nous étoient rendus.

C'eſt à ces vérités importantes, ainſi qu'à la bonne diſcipline qui avoit été établie dans le Corps Royal d'Artillerie, que nous avons dû, mon père & moi, les ſuccès dans l'Artillerie, dont le feu Roi a eu la bonté pluſieurs fois de nous témoigner ſa ſatisfaction. Ces vérités nous ſurvivront; elles peuvent dans des temps s'obſcurcir: le penchant aſſez naturel de tous les hommes pour des nouveautés ſéduiſantes, peut faire illuſion à notre Nation, comme il l'a fait dans une partie du Nord de l'Europe; c'eſt pour prévenir ce malheur que j'ai cru que le devoir de la place de confiance que j'ai eu l'honneur d'occuper depuis mon père, dans le Corps Royal d'Artillerie, & que j'ai encore celui de remplir actuellement, exigeoit aujourd'hui de moi de raſſembler ces vérités ſous un point de vue, pour les dépoſer dans les archives de l'Académie, deſtinées à conſerver & à tranſmettre à la poſtérité la mémoire de ce que les travaux & les recherches dans les Arts & les Sciences, ont pu faire découvrir d'utile & d'intéreſſant pour le bien public.

Ma carrière s'avance, mais quoique ma ſanté ſoit affoiblie par les peines & les fatigues que j'ai eſſuyées, mon dernier ſoupir n'en ſera pas moins conſacré au ſervice du Roi. Après avoir eu l'honneur de ſervir ſon Aïeul pendant plus de quarante-cinq ans; quand la reconnoiſſance des bienfaits que nous en avons reçus, mon père & moi, ne m'obligeroit pas à ſervir ſon auguſte Petit-fils avec le même zèle, une nouvelle ardeur ranimeroit bientôt un corps altéré par de longs travaux, ſi j'étois aſſez heureux pour employer ce qui me reſte de jours à vivre, à quelque choſe qui pût être utile à un Monarque, qui, dans l'âge où communément l'on ne s'occupe que de ſes plaiſirs, n'en a d'autre que celui de protéger ſes ſujets & d'aſſurer leur tranquillité, & ne connoît de peines que les obſtacles qui s'oppoſent au bonheur de ſon peuple ou qui le retardent.

J'ai cru dans ce moment ne pouvoir lui donner de témoignage

plus expreſſif de mon entier dévouement pour ſa Perſonne ſacrée, & du vif intérêt que je prends à ſon bonheur préſent & à venir, que de réunir dans un Écrit les points capitaux, reconnus tels par une longue ſuite d'expériences à la guerre, qui ont acquis à l'Artillerie françoiſe cette ſupériorité avouée même des Étrangers, faute deſquels elle décherroit bientôt de ſa prééminence. Ces obſervations ſont trop intéreſſantes pour la gloire de ce Prince, trop importantes pour le ſalut de l'État, pour l'honneur du Corps Royal d'Artillerie, pour celui de ma Patrie & pour le bien du ſervice, pour ne pas aſſurer leur ſort, en les conſignant dans des archives reſpectables. Dans quel dépôt, en effet plus ſacré, pouvois-je remettre une collection de vérités précieuſes & avouées par tout ce que nous avons connu d'Officiers plus ſavans & de perſonnes plus intelligentes dans le Corps Royal d'Artillerie, que nous avons recueillies dans le cours de plus de quatre-vingts années d'études, d'expériences, de méditations & de pratique à la guerre? Je ſais, eh qui l'ignore? que chaque particulier eſt idolâtre de ſon opinion, & la prend preſque toujours pour l'évidence. Mais traitera-t-on d'opinions d'un particulier des vérités cherchées pendant des ſiècles, trouvées de concert par tant de perſonnes éclairées dans le Corps Royal, reconnues & confirmées par les ſuccès conſtans de la pratique, & ſans avoir jamais été démenties pendant une ſi longue ſuite d'années? Qui pourra dire, après de pareilles recherches, que l'on a pris l'ombre de la vérité pour la vérité même?

Tel a été le motif qui m'a inſpiré ce Mémoire.

ADDITION au Mémoire précédent, par laquelle on verra, en comparant les deux Artilleries, même à nombre égal, de combien l'Artillerie légère augmente les embarras, le nombre des voitures, des chevaux, &c. & la dépense, dont on a desiré avoir un détail.

J'AI exposé dans mon Mémoire, le point de vue qui avoit dirigé la réforme de l'Artillerie Françoise en 1732, qui étoit d'avoir une Artillerie qui fût en même-temps propre pour la guerre de siéges & la guerre de campagne. De-là résultoient plusieurs avantages très-importans, outre celui de l'économie.

1.° De n'être jamais obligé de se surcharger d'un double équipage, un pour les siéges & l'autre pour la guerre de campagne; 2.° de se trouver toujours en mesure vis-à-vis de toutes les circonstances qui se présentent dans la guerre de campagne, comme attaque ou défense de redoutes, châteaux, ou autres postes fortifiés; 3.° de pouvoir dans le besoin tirer des places une Artillerie propre pour l'armée, & jeter promptement dans des places menacées, un supplément d'Artillerie, en même temps qu'on y jette un supplément de troupes.

Pour donner un tableau de comparaison de l'ancienne Artillerie avec la nouvelle, qui puisse présenter une idée juste de la différence considérable qu'il y a entr'elles, & de la grande supériorité à tous égards de la première sur la seconde, il est bon de se rappeler, que les partisans du nouveau système, en vertu de la légèreté de leurs pièces, dont on peut connoître la valeur par l'exposé que j'en ai fait, prétendent en augmenter considérablement le nombre, dans les équipages de campagne.

Il n'est pas inutile d'ajouter que les pièces courtes de la nouvelle fabrique, à raison même de ce qu'elles contiennent moins de métal, sont plus légères, ont un recul double &

triple, & par conſéquent ſe tourmentent beaucoup dans leurs affûts, ce qui oblige à y faire des réparations continuelles, & ſouvent à des rechanges; nonobſtant la prudente précaution qu'ont les peuples qui les emploient, de diminuer la charge de poudre uſitée pour le même calibre; précaution ſage, qui découvre, il eſt vrai, la foibleſſe de ces pièces, nuit (il n'eſt pas beſoin de le dire) à l'effet, mais néceſſaire pour les faire figurer un peu plus long-temps, & leur faire durer la campagne, s'il eſt poſſible. Il eſt vrai qu'ils auroient peine à perſuader que s'ils en uſent ainſi, ce n'eſt que par une louable économie, & pour ménager une quantité de poudre dont leurs pièces ont le merveilleux avantage, dit-on, de n'avoir pas beſoin, pour produire les mêmes effets que les longues, avec une charge plus forte.

Enfin, il eſt eſſentiel d'expoſer le principe ſur lequel on a, juſqu'à préſent, formé un équipage de campagne, avec l'ancienne Artillerie de pièces longues, des trois calibres de 12, de 8 & de 4. L'uſage confirmé par l'expérience & par d'heureux ſuccès, a appris à employer environ un ſeptième du calibre de 12; le double du calibre de 8, & à peu-près les trois cinquièmes en pièces de 4.

Les partiſans de la nouvelle Artillerie, au rebours, compoſent leurs équipages de quatre cinquièmes des deux plus gros calibres, ſavoir; deux cinquièmes du 12, deux cinquièmes du 8, & ſeulement un cinquième du calibre de 4. Ce mépris qu'ils font de leur calibre de 4 employé dans une ſi foible proportion, ne ſemble-t-il pas annoncer un aveu de ſon inutilité, ou du moins de ſon peu de reſſource, & combien ſouvent ils prévoient devoir ſe trouver forcés d'employer du 8, où l'Artillerie ancienne n'employoit que du 4, & de ſe ſervir de leur 12, où le 8 ancien ſuffiſoit?

Qu'on joigne à ce procédé le projet qu'ils forment (apparemment qu'ils en reconnoiſſent la néceſſité) d'augmenter, de beaucoup, le nombre des pièces d'Artillerie du parc; nous ſommes bien en droit de ne vouloir pas entrer en comparaiſon

à nombre égal. Mais pour prouver que nous n'avons rien avancé au hasard, en disant que leur Artillerie légère, est de fait, à la lettre, & intrinséquement plus pesante, plus embarrassante, & (nous ne l'avons pas dit encore) infiniment plus dispendieuse que l'ancienne; nous allons faire la comparaison à nombre égal, sans cependant renoncer au droit que l'équité nous donne de réclamer un autre calcul qui suivra le premier.

Les partisans de la nouvelle Artillerie demandent pour une armée de cent bataillons, deux cents pièces de canon. Jamais armée Françoise ne mena une pareille Artillerie en campagne; mais pour soutenir la comparaison, nous allons former un équipage pareil en nombre, & d'après les principes reçus & usités dans le Corps Royal d'Artillerie, & le mettre en parallèle avec cette Artillerie étrangère.

Comparaison de deux Artilleries du Parc, pour une armée de cent bataillons, avec leurs chevaux & leurs voitures.

Combinaison dans les principes de la nouvelle Artillerie, dans le système des Puissances du Nord, d'un équipage de deux cents pièces d'Artillerie, dites légères.

	Voitures.	*Chevaux.*
80 pièces de 12, à sept chevaux & à trois voitures de munition chacune....................	240.	1520.
80 pièces de 8 à cinq chevaux & deux voitures..	160.	1040.
40 pièces de 4 à trois chevaux & une voiture...	40.	280.
200 pièces.	440.	2840.

Combinaison en pièces longues de l'ancienne Artillerie, en nombre égal à la combinaison précédente.

	Voitures.	Chevaux.
30 pièces de 12, à neuf chevaux & trois voitures.	90.	630.
60 pièces de 8, à sept chevaux & deux voitures.	120.	1000.
70 pièces de 4 longues ordinaires, à quatre chevaux & une voiture.	70.	560.
40 pièces de 4 légères à trois chevaux & une voiture*.	40.	280.
200 pièces.	320.	2470.

RÉSULTAT.

	Voitures.	Chevaux.
Artillerie légère, 200 pièces	440.	2840.
Artillerie ancienne, 200 pièces	320.	2470.
Différence	120.	370.

L'Artillerie des Étrangers, soi-disant légère, exige donc pour un équipage de deux cents pièces de canon, cent vingt voitures, & trois cents soixante-dix chevaux de plus que notre ancienne, pour un pareil équipage composé aussi de deux cents pièces des trois calibres.

Or on n'a jamais mené dans une armée Françoise de cent bataillons, deux cents canons, non compris ceux que depuis quelques années, on a donnés aux Régimens; rarement un équipage de campagne excède-t-il cent trente ou cent quarante au plus. Mais pour accorder aux partisans de l'Artillerie étrangère, tout l'avantage possible dans la comparaison, voici un calcul pour un équipage de notre ancienne Artillerie sur le pied de cent cinquante pièces.

* Si nous mettons ici quarante pièces de 4 légères, ce n'est pas que nous y reconnoissions d'utilité particulière; mais les regardant comme superflues, nous ne les avons employées que pour compléter le nombre de 200 que nous étions engagés de mettre en parallèle, & prouver nos assertions; l'équipage étant déjà bien suffisant, en état de faire face à tout évènement, & de satisfaire à tous les cas possibles de la compétence d'une Artillerie de campagne.

Combinaiſon d'un Équipage de cent cinquante pièces de l'ancienne Artillerie, comparé à celui de deux cents de pièces légères.

	Voitures.	*Chevaux.*
20 pièces de 12, à neuf chevaux & trois voitures.	60.	420.
40 pièces de 8, à ſept chevaux & deux voitures.	80.	600.
70 pièces de 4, à quatre chevaux & une voiture.	70.	560.
20 pièces à la Suédoiſe à trois chevaux & une voiture.	20.	140.
	230.	1720.

RÉSULTAT.

	Voitures.	*Chevaux.*
Artillerie légère, 200 pièces	440.	2840.
Artillerie ancienne, 150 pièces	230.	1720.
Différence	210.	1120.

L'Artillerie des Étrangers ou légère, ſurpaſſe donc dans cette combinaiſon, notre ancienne, de deux cents dix voitures ſuperflues, de onze cents vingt chevaux, & de quantité d'attirails & de munitions qui ne le ſont pas moins. Quelle légèreté !

Il reſte à donner une idée de l'économie de la poudre : voici l'état des charges de tous les calibres de campagne, tant de l'ancienne que de la nouvelle Artillerie.

	Anciennes Pièces.	*Nouvelles.*
Pièces de 12	5^£.	4.
de 8	3.	$2\frac{1}{2}$.
de 4 ordinaire	2.	1.
de 4 à la Suédoiſe	$1\frac{1}{4}$.	//

Or, nous avons fait obſerver que la nouvelle Artillerie des Étrangers, pour égaler les effets de notre ancienne, étoit obligée d'oppoſer le calibre de 8, pour égaler nos anciennes pièces de 4, & d'employer le 12, pour remplacer nos pièces de 8 ; ainſi, où nous dépenſons 2 livres de poudre, les Étrangers

en dépenſeront $2\frac{1}{2}$; & ils feront les frais de 4 livres, où nous ne faiſons que ceux de 3, non compris l'augmentation d'une moitié en ſus du poids des boulets de la pièce de 12 ſubſtituée à la 8 longue, & du double de la pièce de 8 courte, à la place de celle de 4 longue. Quelle économie !

Pièces de 4.	*Poids du métal.*	*Poids de l'affût ſeul avec ſon avant-train.*	*Poids de la Pièce ſur ſon affût complet.*
Anciennes.....	1150........	1288........	2438.
Nouvelles......	600........	1219........	1819.
Différence....	550 moins.*	69 moins..	619 moins.
Pièces de 8.			
Anciennes.....	2100........	1479........	3579.
Nouvelles.....	1200........	1727........	2927.
Différence....	900 moins..	248 plus...	652 moins.
Pièces de 12.			
Anciennes.....	3200........	1766........	4966.
Nouvelles......	1800........	1954......	3754.
Différence....	1400 moins..	188 plus...	1212 moins.

On voit par ce tableau, qu'avec tout ce qu'on a pu imaginer pour alléger ou plutôt énerver les pièces anciennes, on n'a pas pu parvenir à porter l'allègement d'aucuns des calibres à un quart ſeulement, & que la diminution ne roule, entre calibres égaux de l'ancienne & de la nouvelle Artillerie, que d'un peu moins d'un quart à environ un cinquième du poids de chaque pièce montée ſur ſon affût complet. Mais comme nous avons obſervé & démontré que cette comparaiſon de calibre à calibre ne peut avoir lieu dans la pratique, où,

* C'eſt à la pièce nouvelle qu'il faut appliquer la diminution ou l'augmentation des poids, déſignées par ces mots *moins*, *plus*, ſauf quelques différences inévitables de poids dans la conſtruction des affûts & la fonte des pièces, tant de l'ancienne que de la nouvelle Artillerie.

pour

pour faire quelque comparaison de service, il faut opposer le calibre supérieur des pièces légères au calibre inférieur des pièces longues, on compare dans le tableau ci-dessous les pièces de 4 longues à celles de 8 courtes, & celles de 8 longues à celles de 12 légères; & il sera évident que l'Artillerie annoncée comme légère est à la lettre intrinséquement plus pesante, & par surcroît, prodigieusement multipliée en nombre de pièces.

Comparaison des Pièces de 4 anciennes avec les nouvelles de 8, & de 8 anciennes avec celles de 12 nouvelles.

	Poids du métal.	*Poids de l'affût complet.*	*Poids de la Pièce sur son affût complet.*
Pièce de 4 ancien.	1150......	1288......	2438.
Pièce de 8 nouv..	1200......	1727......	2927.
Différence....	50 plus...	439 plus....	489 plus. *(a)*
Pièce de 8 ancien.	2100......	1479......	3579.
Pièce de 12 nouv.	1800......	1954......	3754.
Différence....	300 moins.	475 plus...	175 plus. *(b)*

(a) Non compris le poids du double de boulets pour pouvoir tirer autant de coups que la pièce de 4, & non compris l'augmentation de la charge de poudre *(Voyez le tableau des charges de poudre)*, sans compter d'autres attirails pour les rechanges qui sont plus fréquens à l'Artillerie légère.

(b) Item. Non compris moitié en sus du poids des boulets, l'augmentation de poudre, &c.

Longueurs d'Ames des pièces, tant anciennes que nouvelles, dans les trois calibres qui influent si considérablement sur la portée.

		pieds.	*pouces.*	*lignes.*
Pièce de 4....	Anciennes......	6.	6.	"
	Nouvelles......	4.	3.	4
	Différence....	2.	2.	8
Pièce de 8....	Anciennes......	7.	10.	"
	Nouvelles......	5.	4.	6
	Différence....	2.	5.	6

			pieds.	pouces.	lignes.
Pièce de 12....	Anciennes......		8.	8.	//
	Nouvelles......		6.	2.	//
		Différence....	2.	6.	//

Laquelle de ces deux Artilleries réunit en ſoi les avantages & les qualités eſſentielles, incomparablement ſur l'autre? ſavoir, la juſteſſe dans le tir, & ſous un moindre degré; l'étendue dans les portées, la ſimplicité dans les conſtructions & dans les ſervices, ſoit qu'on tire à barbettes ou à embraſures; le moins d'embarras dans les marches & dans les actions, la ſolidité relative à la ſûreté autant qu'à la durée, la force néceſſaire aux effets, la légèreté réelle, l'économie de la poudre, celle du terrein pour les reculs, celle de dépenſe ſuperflue, & les ſuccès confirmés par l'expérience à la guerre?



SUITE DU *VOYAGE FAIT PAR ORDRE DU ROI,* *EN 1753,* *à la côte de* Portugal *&* *à l'île de* Madère.

SECONDE PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

RELATION historique d'un Voyage fait par terre à Aveiro, *bourg de la province de Beira dans le royaume de Portugal, pour y observer l'Éclipse de Soleil du 26 Octobre 1753; & d'un autre Voyage à l'île de* Madère, *pour en déterminer la position Astronomique.*

Par M. DE BORY.

ARTICLE PREMIER.

Sujet du Voyage.

LA position du cap Finistère influe beaucoup sur celle de cette partie de l'Europe que baigne la mer Océane jusqu'au détroit de Gibraltar. Si ce cap a été, sur les Cartes, trop avancé dans la mer, le reste de la Carte a dû se ressentir de ce défaut.

Tandis que je cherchois à faire naître les occasions de m'en assurer par de nouvelles observations, qui pussent confirmer celles que j'avois faites précédemment, M. *le Monnier,* de cette Académie, me fit part du projet qu'il avoit formé d'aller observer l'Éclipse du Soleil du 26 Octobre 1753, dans l'endroit des côtes de Portugal où elle devoit être

centrale. Il me propoſoit d'être de la partie; mais les ordres de Sa Majeſté ayant fait préférer par cet Aſtronome le voyage de Fontainebleau à celui de Portugal, je formai un plan d'obſervation. Il me parut naturel de profiter de la circonſtance de l'Éclipſe pour lier enſemble différens points de cette Carte occidentale du continent d'Eſpagne, & pour y joindre l'île de Madère, dont la poſition exactement connue, peut rectifier beaucoup d'erreurs dans la Navigation.

Les îles Açores ne ſont, juſqu'à préſent aſſujetties à aucune obſervation aſtronomique: il étoit donc important de les comprendre dans le travail que je propoſois.

Plein de cette idée & de la part que devoit avoir dans cette entrepriſe, l'Académie de Marine, qui ne peut point perdre de vue la perfection de la Géographie & de la Navigation, je préſentai un Mémoire au Miniſtère; je demandai l'armement d'une frégate, pour tranſporter dans les endroits indiqués des Académiciens marins, qui fuſſent chargés d'y faire les obſervations néceſſaires.

Le but de M. le Monnier étoit purement aſtronomique: quoique ce Savant fût perſuadé que la Lune n'a point d'atmoſphère bien ſenſible, cette queſtion cependant lui paroiſſoit problématique par le calcul de l'Éclipſe totale de 1724, dont il eſt fait mention dans les Tranſactions philoſophiques de l'*année 1739*. Son zèle pour les progrès de l'Aſtronomie, l'engageoit à entreprendre un nouveau voyage pour lever les doutes que l'on pourroit avoir à ce ſujet.

Voyant que cet Académicien étoit obligé d'abandonner l'exécution de ſon deſſein, je crus que l'on pourroit y ſuppléer, & je repréſentai qu'outre l'utilité première & ſenſible que l'on retireroit de ce voyage par la détermination de quelques points importans, on pourroit raiſonnablement ſe promettre un autre avantage; que peut-être on s'aſſureroit poſitivement ſi la Lune a une atmoſphère.

J'avançois que cet éclairciſſement ne ſeroit pas ſimplement curieux, qu'il feroit connoître le degré de préciſion dont ſont ſuſceptibles les occultations des Étoiles fixes par la Lune,

puiſqu'il eſt évident que la réfraction que les Fixes ſouffriroient à l'approche de cette Planète, ſi elle a une atmoſphère, peut produire quelque changement dans ces obſervations, qui ſont ſi fort recommandées pour la détermination des Longitudes terreſtres.

Le Miniſtère approuva mon Mémoire, & il fut décidé que l'on armeroit à Breſt la frégate du Roi *la Comète*, de trente canons; qu'elle ſeroit commandée par M. de Cheſac, Capitaine de Vaiſſeau, Commandant des Gardes de la Marine, & Membre de l'Académie de Marine; que je ſerois partie de l'État-major, auſſi-bien que M.rs les Chevaliers de Goimpy & de Diziers-Guyon, Enſeignes de Vaiſſeau; & que nous ſerions chargés de la partie aſtronomique.

Dans le même temps, M. de l'Iſle publia des *Calculs exacts de la trace de l'ombre de la Lune ſur l'Eſpagne & le Portugal, dans l'Éclipſe de Soleil du 26 Octobre 1753, faits ſur les Tables de M. Halley, par M. Libour.*

Parmi les endroits qu'indiquoit cet Académicien pour être ceux auxquels on verroit cette Éclipſe centrale, Aveiro, bourg du royaume de Portugal, & Cartagène, ville de celui d'Eſpagne, étoient à chaque extrémité de la route de l'ombre ſur ces Royaumes.

En conſéquence, le Miniſtère donna à M. de Cheſac des inſtructions qui portoient que M.rs de Goimpy, de Diziers & moi, nous irions à Aveiro, & M. de Chabert reçut ordre de ſe rendre à Cartagène. Il étoit néceſſaire de profiter des deux points extrêmes, & le moindre avantage qui pouvoit en réſulter étoit de conclure la largeur de ce continent; c'étoit auſſi un moyen de plus pour faire évanouir les ſoupçons que l'on peut former ſur l'atmoſphère lunaire.

Les inſtrumens que j'avois portés deux ans auparavant ſur la côte d'Eſpagne, étoient bien ſuffiſans pour les opérations dont j'étois chargé alors, mais celles que j'allois faire en exigeoient d'autres. Il falloit meſurer exactement les diamètres du Soleil & de la Lune: pour cet effet, je fis faire un héliomètre pour une lunette de 12 pieds, d'après le Mémoire

de M. Bouguer, imprimé parmi ceux de l'Académie, *année 1748,* & un micromètre pour une lunette de 6 pieds.

Ces instrumens faits par le sieur Canivet, & les verres par le sieur George l'aîné, étoient fort bons les uns & les autres.

ARTICLE DEUXIÈME.

Départ de Brest, arrivée à Lisbonne.

MUNIS de tout ce qui nous étoit nécessaire, nous partimes de Brest le 20 de Septembre, & nous mouillames devant Lisbonne le 3 d'Octobre.

L'ancre n'étoit pas encore jetée, que M. de Chesac m'envoya chez M. le Comte de Baschi, Ambassadeur de France en cette Cour. Il étoit informé du sujet de notre voyage, & il en avoit déjà prévenu les Ministres de Sa Majesté Très-Fidèle, qui lui avoient paru disposés à favoriser notre projet: vraisemblablement notre passeport eût été expédié sur le champ, si le Roi n'eût pas été alors à Mafra, château bâti par le roi Jean V.

Sa Majesté en revint peu de jours après. Dans une audience particulière accordée aux Officiers de *la Comète*, il nous honora d'une gracieuse réception; il parut s'intéresser au succès de notre voyage: il ajouta même qu'il vouloit qu'on lui rendît compte du résultat de l'observation de l'Éclipse du Soleil: enfin il accorda avec beaucoup de bonté à M. le Comte de Baschi la permission que lui demanda cet Ambassadeur pour que nous fissions des observations Astronomiques aux îles Açores & de Madère.

Le 13 Octobre, jour de cette audience, M. Sébastien-Joseph de Carvalho d'Iveira, depuis Comte d'Oeyras, & à présent Marquis de Pombal, alors Secrétaire d'État de la guerre & des affaires étrangères, nous expédia fort poliment la permission nécessaire pour aller à Aveiro.

Il ne s'agissoit plus que de faire les préparatifs nécessaires pour le départ. Ils furent bientôt prêts: nous avions besoin

d'un compagnon de voyage qui entendît bien la langue du pays; M. le Comte de Baſchi nous aſſocia M. l'abbé Garnier: cet Abbé qui a été enſuite Aumônier de la chapelle de France, joignoit à l'intelligence du Portugais pluſieurs autres connoiſſances qui pouvoient nous être utiles.

ARTICLE TROISIÈME.

Départ de Liſbonne pour Aveiro.

LES voitures les plus en uſage en Portugal, ſont des chaiſes à deux places, attelées de deux mulets, & aſſez douces, quoique ſans reſſorts. Le 13 Octobre nous fimes partir deux de ces chaiſes, qui avoient ordre de nous attendre à *Vallada,* village à 12 lieues de Liſbonne, & nous nous embarquames le 14 au ſoir dans une chaloupe ſur laquelle nous remontames le Tage à l'aide d'une marée.

Nous ſumes alors par nous-mêmes qu'à quelques lieues au-deſſus de Liſbonne, ce fleuve qui recevoit les plus grands vaiſſeaux ceſſe d'être navigable pour d'autres bâtimens que pour des canots, & même pour des bâtimens plats. Les eaux qui le groſſiſſent ſont celles de la mer, & c'eſt-là ſans doute la raiſon pour laquelle le courant de ce fleuve, pendant le reflux, eſt très-foible; bien différent en cela de pluſieurs rivières moins conſidérables, mais que l'on ne peut remonter contre leur courant.

Nos mulets portoient nos inſtrumens & les proviſions indiſpenſables lorſqu'on voyage dans un pays où l'on ne trouve que le pain & le couvert. Il ne faut pas oublier de ſe munir de lits, d'uſtenſiles de cuiſine & même de ſel.

Le jour de l'Éclipſe approchoit; il étoit néceſſaire que nous nous rendiſſions à Aveiro le plus tôt poſſible. Nous ne pouvions faire d'autre remarque que celle qu'offre aux yeux des voyageurs la vue d'un pays plus ou moins cultivé.

A la ſeconde journée nous ſortimes de l'Eſtramadure pour entrer dans les montagnes de la province de Beira: ce changement eſt ſenſible. L'Eſtramadure, province de la Cour

& de la Capitale, eſt peuplée & cultivée, les chemins y ſont très-beaux. Dans les montagnes de la province de Beira, les chemins ſont difficiles, le terrein eſt de peu de rapport, & la pauvreté des villages indique celle des habitans.

On eſt deux jours à traverſer ces montagnes que l'on quitte à quatre lieues de Coimbre; la campagne des environs de cette ville eſt riante & dédommage l'œil de l'aridité fatigante de la province d'où l'on ſort.

M. Patern Gordon, dans ſa Géographie, place à huit lieues de Coimbre une fontaine célèbre, & qui engloutit tout ce qui touche la ſurface de ſes eaux, comme on l'a ſouvent expérimenté. On remarque effectivement une belle fontaine dans le territoire d'Alcadebeque, village à deux lieues de Coimbre: elle déborde dans certains temps; alors elle couvre une aſſez grande plaine qui eſt auprès. On prétend qu'elle communique avec une petite rivière voiſine, & que l'on a trouvé dans celle-ci des bois jetés dans la fontaine peu de temps auparavant. Le temps ne nous a pas permis de vérifier cette communication.

ARTICLE QUATRIÈME.

Arrivée & ſéjour à Aveiro.

Le 19 Octobre, nous arrivames à Aveiro. M. Sébaſtien de Caſtro, de l'illuſtre Maiſon de ce nom, & fils du Gouverneur de la province de Beira, nous fit l'accueil que font à des Étrangers ceux qui, ſans aucune jalouſie de Nation, s'intéreſſent ſincèrement aux travaux utiles. Le peuple ne pouvoit concevoir que des François n'euſſent dans ce voyage d'autre projet que celui d'obſerver une Éclipſe de Soleil; mais les gens d'un certain ordre, quoiqu'en petit nombre à la vérité, admiroient la protection conſtante que le Roi accorde aux Sciences.

Grâces aux ſoins de M. de Caſtro, nous obtînmes des Dominicains la permiſſion de faire notre établiſſement dans une *Quinte*, ou Maiſon de campagne, appelée *Miraflores*, qui

qui leur appartient à une portée de fusil de la ville, & qu'ils nous prêtèrent fort gracieusement.

Une salle quarrée, & qui n'étoit bornée par aucune de ses faces, fut celle que je choisis. Au-dessous est une longue galerie ouverte au Nord, qui conduit à un péristile couvert & à un assez grand appartement. M. le Chevalier de Goimpy & M. le Chevalier de Diziers se déterminèrent à établir leur observatoire dans ce dernier endroit. Par un hasard qu'on ne pouvoit prévoir, nous étions, conformément au texte du Mémoire de M. de l'Isle, *tout près & dans le Sud d'Aveiro.*

Mais malheureusement notre position n'étoit pas la plus exacte, & au lieu d'une Éclipse totale, nous n'eumes qu'une Éclipse partiale de Soleil; ainsi nous fumes privés de la vue de ces phénomènes curieux qu'on ne peut observer que dans une Éclipse totale.

Nous ne pouvons donc en retirer d'autres fruits que de déterminer la différence des Méridiens entre Paris & Aveiro, par l'observation de la même Éclipse faite à Thury, qu'on a eu la bonté de nous communiquer; cette différence est de $0^h\ 43'\ 17''$.

Nous dirons aussi que cette Éclipse a dû commencer à Aveiro à $7^h\ 27'\ 3''$, qu'elle y a fini à $10^h\ 1'\ 4''$, & que sa grandeur a été de 11 doigts $33'\ 45''$.

Aveiro, petite ville de la province de *Beira*, est fort agréablement située sur un petit ruisseau appelé *Vouga*, près du bord de la mer à l'extrémité d'une plaine étendue & bien cultivée; elle a un port peu profond, mais très-sûr; il se partage en une quantité considérable de canaux: ceux-ci forment des salines assez abondantes, & c'est ce qui constitue la principale richesse des habitans : ces salines sont séparées de la haute mer par une langue de sable élevée ; la coupure de cette langue de sable est l'entrée du port; il y a une barre sur laquelle la mer brise, presque toujours avec violence: c'est-là qu'est l'embouchure du ruisseau d'Aveiro; on peut le remonter en bateau, jusqu'à cinq ou six lieues dans les terres.

Cette partie de la côte du Royaume de Portugal, forme un golfe dangereux, depuis le cap *Mondego*, jusqu'à celui de la Roque. On l'évite avec d'autant plus de raison, qu'il ne présente d'autre port que celui de *Porto*, port de marée, & par conséquent d'une ressource peu assurée; les marins nomment ce golfe, le *Cimetière des Anglois.*

La ville d'Aveiro est peu commerçante & peu habitée, le luxe n'a point encore corrompu les mœurs de ses habitans, qui sont pauvres, simples & fort honnêtes pour les Étrangers. Il est assez commun d'y entendre parler françois; on y trouve quelques personnes, qui, sans en être jamais sorties, ont appris notre langue & la savent assez bien. Elles se sont procuré nos bons livres, & même les Mémoires de cette Académie. Il y en avoit un, *M. Juan d'Egués*, qui en avoit plusieurs volumes, qui les avoit étudiés; ce qui doit être regardé comme une chose merveilleuse, si l'on fait attention que la Philosophie d'Aristote n'étoit pas encore bannie du Portugal.

C'est dans une église de cette ville que sont enterrés François de Tavora & Jeanne sa femme, qui en 1592, en ont réédifié une chapelle; ce nom est encore plus connu depuis l'exécrable attentat commis, il y a quelques années, sur la personne du Roi de Portugal.

ARTICLE CINQUIÈME.

Départ d'Aveiro pour Lisbonne.

LE 30 Octobre, nous quittames Aveiro, & nous choisimes, pour retourner à Lisbonne, la route qui devoit nous offrir le plus de choses intéressantes à voir.

Les villes ne renferment point d'édifices plus magnifiques que les couvens, & ceux-ci, comme l'on sait, doivent presque tous leur fondation à des Princes, qui, pour obtenir quelque grâce du Ciel, faisoient vœu d'établir une maison où l'on glorifiât le Seigneur.

Coimbre, grande ville située sur le fleuve Munda, autrefois

le séjour des Rois de Portugal, & maintenant celui d'une Université, a un Monastère célèbre, c'est celui des Religieux de Sainte-Croix; il a été fondé par Alphonse Henriquez, premier Roi de Portugal, pour des Chanoines réguliers de Saint-Augustin, de la Congrégation de Sainte-Geneviève, & maintenant unis par le Pape Benoît XIV, aux Chanoines de Saint-Jean de Latran.

Avant cette union, ils avoient été réformés par le Père Gaspard de Govéa : ce Religieux, Ministre de Jean V, quoique sans en avoir le titre, & qui de sa retraite gouvernoit le royaume avec autant d'autorité que son couvent, forma & exécuta le hardi projet d'ôter à ses frères la liberté de sortir, & par-là il leur a rendu, aussi-bien qu'à sa Patrie, un service signalé.

Convaincus de la nécessité de bien employer leur temps, ils cultivent les Sciences avec succès; ils lisent les ouvrages de Newton. De la clôture perpétuelle des Chanoines de Sainte-Croix, il a résulté un changement très-avantageux pour les études, & qui s'est fait sentir dans le Portugal, où les Sciences ont essuyé la même révolution que dans le reste de l'Europe.

Leur solitude ne les prive pas de la société des Étrangers; ils exercent l'hospitalité avec beaucoup de noblesse, & ils nous parurent avoir pour les François un amour franc & sincère. Leur Général est par sa place, Chancelier de l'Université, & cette année il en étoit Recteur, par la nomination du Roi.

Denys, surnommé *le Libéral, & le père de la Patrie*, est le fondateur de cette Université, la première du Portugal, & une des plus célèbres de l'Europe.

Les nouveaux édifices ajoutés aux anciens sont magnifiques, M. Magalhaens, alors Chanoine de Sainte-Croix, & maintenant Correspondant de cette Académie, fut chargé de nous montrer les curiosités du Monastère & la Bibliothèque de l'Université; il s'en acquitta avec beaucoup de complaisance & de politesse. En 1744, il a obtenu du Pape Benoît XIV,

un Bref pour ſortir de ſa Congrégation, & après avoir voyagé en différens endroits de l'Europe, il réſide & cultive à Londres les Arts & les Sciences.

De Coimbre nous fumes à Baralha, où les Dominicains ont un ſuperbe couvent, fondé par Jean I.er; ce Monarque prêt à donner, contre le Roi de Caſtille, auſſi nommé Jean I.er, la bataille d'Aljubarotta, fit vœu de fonder, pour l'Ordre de Saint-Dominique, le plus beau monaſtère qui fût alors dans le monde: il gagna la bataille le 14 Août 1385; & il choiſit dans le voiſinage un lieu dont il fit une ville, ſous le nom de Batalha; ce monaſtère eſt de la plus grande ſolidité, tout eſt voûté; la ſalle Capitulaire en eſt le morceau le plus curieux; c'eſt un carré de 56 pieds 8 pouces ſur chaque côté, ſurmonté d'une voûte à plein ceintre (en arc de cloître) qui ſe ſoutient ſans le ſecours d'aucune colonne.

L'Architecte, appelé Mathieu Fernandés, eut de la peine à réuſſir; pluſieurs fois les pierres tombèrent, à la fin il en vint à bout, & pour faire voir qu'il ne craignoit plus un pareil accident, il coucha ſous la clef de la voûte pendant quatre mois de ſuite.

Il s'eſt ſculpté lui-même dans un coin de cette ſalle. Sa femme, ſes filles & lui ſont enterrés au bas de l'égliſe, qui eſt, ainſi que ſon portail, d'Architecture gothique.

Elle paſſe pour être la plus haute du Portugal; on ſe promène facilement ſur ſon comble, qui eſt de pierre de taille, & bordé d'un parapet ſur lequel on a élevé de petits dômes, qui font de loin un effet agréable.

Baralha devoit ſervir de ſépulture aux Rois de Portugal, mais ces Rois en transférant leur ſiége de Coimbre à Liſbonne, ont ſubſtitué au Couvent de Baralha, celui de Belem, bâti pour des Jéronymites, par le Roi Emmanuel, le plus grand des Rois qui ont occupé le trône du Portugal.

Cette deſtination de Baralha n'ayant point changé tout d'un coup, on y voit les tombeaux de beaucoup de Princes, entr'autres celui du Roi Jean II, mort en 1495, ſon corps eſt embaumé: on n'ouvre ſon mauſolée que très-rarement,

& toujours la nuit, pour éviter le mauvais effet de l'air chaud.

On l'ouvrit pour nous, & nous fumes les maîtres de toucher ce corps; nous trouvames à la peau de la molleſſe, de la flexibilité, & même une certaine fraîcheur.

Ce Prince étoit fort grand; pour le placer dans ſon cercueil, on fut obligé de lui rompre les os des jambes.

De Baralha nous fumes dans un autre couvent, celui-ci appellé *Alcobaca*, fut fondé en 1135, par le Roi Alphonſe Henriquez, après la célèbre journée d'Ourraque, dans laquelle il défit cinq Rois Maures. C'eſt à cet évènement mémorable qu'il faut rapporter l'érection du Portugal en royaume. Juſques alors ſes Souverains n'avoient porté que le titre de Comtes.

Des Bernardins, au nombre de cent cinquante, occupent le couvent d'Alcobaca; leur égliſe eſt gothique, longue & étroite; elle a été deſtinée pendant quelque temps à être la ſépulture des Rois : on y en voit pluſieurs tombeaux, tels que celui de Pierre le Juſticier, & un ſimple cercueil de pierre ſans ſculpture, ſans ornement & ſans inſcription; on nous aſſura que c'étoit celui de la malheureuſe Inès de Caſtro, qui avoit été femme & maîtreſſe de Pierre le Juſticier. Cependant tous les Hiſtoriens François & Portugais, diſent que Don Pedro fit faire à Inès un tombeau magnifique.

La route que nous faiſions nous mena à *Caldas*, lieu qui tire ſon nom d'une ſource d'eau chaude, ſur laquelle on a bâti un hôpital; ces eaux ſont très-renommées par la ſingulière propriété qu'elles ont de guérir les maladies vénériennes les plus invétérées, les paralyſies, & généralement toutes les maladies qui attaquent les nerfs; elles ſont aſſez abondantes pour faire tourner perpétuellement un moulin ſitué à deux cents pas de la ſource; elles ſont fort claires, cependant ſi on les fait ſéjourner dans un réſervoir, elles y dépoſent une boue noire & épaiſſe; ſorties de-là, elles laiſſent encore un autre ſédiment, celui-ci eſt blanc & reſſemble à de la chaux.

L'hôpital de Caldas fondé en 1488, par la Reine Dona Léonore de Portugal, femme de Jean II, & Sœur du Roi Emmanuel, a été rebâti en 1747, & achevé en 1750, par

les ordres & aux dépens du Roi Jean V; outre les salles séparées pour chaque sexe, il y a des chambres honnêtes destinées aux malades qui, allant prendre les eaux, ne trouvent pas de logement dans les auberges.

Ces eaux agissent de deux façons différentes, ou intérieurement lorsqu'on en boit, ou extérieurement lorsqu'on s'y baigne.

Il y a deux sortes de bains, l'un de l'eau claire & courante, l'autre de la boue noire dont j'ai parlé. On prend cette dernière dans le réservoir & on la porte dans une salle où on la délaie avec l'eau même de la source: on y fait entrer ceux qui sont attaqués depuis long-temps du mal dont ils veulent guérir; au sortir de la boue ils vont se laver dans l'autre bain. Il s'exhale de cette eau une vapeur chaude & sulfureuse qui porte d'abord violemment au nez; mais cela se passe promptement en se frottant le visage avec cette eau.

La vapeur noircit en peu d'instans les métaux & les galons.

De Caldas nous arrivames, après une journée de marche fort rude, au monastère royal de Mafra.

Les Religieux de Saint-François, de la province d'Arrabida, desiroient avoir un hospice à Mafra; le Conseil de Conscience leur en refusoit la permission depuis quelques années. Le Frère Antoine de Saint-Joseph sachant le desir que Jean V avoit de se voir des enfans, en promit à ce Prince s'il fondoit à Mafra le couvent que ses frères desiroient. Jean V en fit le vœu: d'abord ce ne fut qu'un hospice, mais insensiblement le Roi voulut élever un monument qui surpassât l'Escurial en grandeur & en magnificence. Trois cents Capucins sans barbe y sont logés aussi magnifiquement que le Monarque, qui partage ce Palais avec eux, & qui peut y loger la Reine, les Infans, les Princes & toute sa Cour.

La chapelle partage en deux ce vaste édifice, dont la première pierre fut posée le 18 Novembre 1717; la chapelle fut consacrée le 22 Octobre 1730: sa longueur entière est de deux cents quatre-vingt-douze pieds: elle est extrêmement

riche : le marbre y eſt prodigué ; cette pierre que le pays produit en abondance eſt parfaitement travaillée, les ouvriers du Portugal manient le ciſeau avec une grande adreſſe.

Le quartz n'y eſt pas moins commun que le marbre ; il contient une quantité d'argent aſſez conſidérable.

La coupole a un air de légèreté, de délicateſſe & de ſolidité qui ſurprend. La hauteur du dôme eſt de cent quatre-vingt-ſeize pieds, celle des clochers de deux cents ſeize ; un d'eux renferme un des plus beaux carillons de l'Europe. C'eſt dans cette chapelle que ſont ces belles grilles de fer faites à Paris en 1733, par le feu ſieur Deſtriches : les vaſes ſacrés, tout ce qui ſert au Service Divin, & les ornemens ne répondent point à la magnificence de la chapelle ; les uns ſont de cuivre ſimplement tournés, & les derniers ſont de ſoie, ſans or ni argent. Si on monte au haut de l'édifice on ſe promène ſur de vaſtes terraſſes faites en briques, d'où l'on a une vue extrêmement étendue.

Le parc de Maſra eſt très-grand, il renferme une longue chaîne de montagnes ; il a beaucoup de gibier, mais alors il étoit dénué d'arbres.

Pour arriver à Liſbonne il nous falloit paſſer par Ceintra, où les Rois de Portugal ont un palais bâti par le Roi Emmanuel, qui ſervit de priſon à Don Alphonſe V après ſa dépoſition. Ceintra eſt au pied du cap de la Roque, appelé autrefois le *Promontoire de la Lune.*

Près de Ceintra eſt un couvent de Capucins, *doublé de liége ;* on le nomme ainſi, parce qu'il eſt tout taillé dans le roc, & que pour prévenir les mauvais effets de l'humidité, inſéparable du rocher, tout l'intérieur eſt couvert de liége.

La ſimplicité de cette Maiſon, fait un contraſte parfait avec la magnificence du palais de Maſra ; des Religieux du même ordre habitent l'un & l'autre.

Une rampe auſſi douce que le terrein a pu le permettre, conduit à un couvent de Jéronymites, placé ſur la pointe la plus élevée du cap la Roque ; la vue en eſt très-étendue, mais elle ſeroit fort triſte, ſans les bois qui ornent les coteaux

voiſins de Ceintra & de Colares; cette verdure, la ſeule du pays, en eſt d'autant plus délicieuſe.

C'eſt au milieu de ces bois & à *Pinhra Verde*, que le fameux Don Juan de Caſtro avoit établi ſa retraite au retour des Indes, où il avoit fait des exploits ſi merveilleux; ce Héros dégoûté du monde, ſe plaiſoit à défricher ſa demeure, & à pratiquer dans le rocher des terraſſes, qui en font encore aujourd'hui l'ornement.

C'eſt cette montagne du cap la Roque, que l'auteur des *Mémoires pour les Voyageurs*, dit être composée de pierres ſans liaiſon & toujours prêtes à ſe ſéparer; elles ſont effectivement placées les unes ſur les autres ſans ordre ni ſymétrie, & telles qu'elles pourroient être, ſi un volcan les eût vomies de ſon ſein.

De Ceintra à Liſbonne, on compte quatre à cinq lieues d'un beau chemin, le long duquel on rencontre beaucoup de *Quintes;* la plus belle, ſans contredit, étoit celle de M. l'Abbé de Mendoça; ce Secrétaire d'État avoit ſu raſſembler dans la ſienne tout ce que l'art & le goût peuvent fournir. Un des morceaux des plus curieux étoit une grotte toute de criſtal de roche & de porcelaine du Japon.

Si on veut ſe procurer une ample connoiſſance du royaume de Portugal, on n'a qu'à conſulter le Dictionnaire Géographique & Topographique du P. Cardoſo, dont il n'avoit encore paru que deux volumes *in-folio.*

L'auteur entre dans le plus grand détail & nous l'avons trouvé d'une exactitude ſingulière pour les endroits que nous avons examinés.

ARTICLE SIXIÈME.

Départ de Liſbonne pour les îles Açores & de Madère.

NOUS arrivames à Liſbonne le 7 de Novembre; le 13 nous eumes de Sa Majeſté Très-Fidèle une audience ſemblable à la première; nous lui rendimes compte du voyage que nous venions de faire.

M. le

M. le Comte de Baſchi renouvela ſes ſollicitations pour l'expédition du paſſeport dont nous avions beſoin pour être reçus dans les îles Açores & de Madère. M. l'abbé de Mendoça, Secrétaire d'État de la Marine & des pays d'Outremer, s'y prêta avec ſes grâces ordinaires. Il fit choiſir le meilleur Pratique de ces îles, lui ordonna de s'embarquer ſur notre frégate: le paſſeport fut ſigné le 18 Novembre, mais le vent ne nous permit de mettre à la voile que le 26 du même mois.

La traverſée fut aſſez belle, & le 4 Décembre nous vîmes les îles de Sainte-Marie & de Saint-Michel. Notre Pilote Portugais, plus habitué que nous à ces ſortes de voyages, s'eſtimoit beaucoup plus près de terre que nous; cependant on la vit encore plus tôt qu'il ne comptoit.

Cette erreur de navigation, qui vraiſemblablement doit être rapportée à la mauvaiſe ſituation de ces îles ſur les Cartes, prouve la néceſſité de faire à l'une d'elles, une bonne obſervation de Longitude.

Entre Sainte-Marie & Saint-Michel, eſt un banc de roches appelé les *fourmies;* les Cartes ſont en erreur par rapport à ce danger; elles le placent trop près de Saint-Michel: il eſt véritablement à quatre lieues dans le Nord-eſt de la pointe du même nom de Sainte-Marie. Il rétrécit conſidérablement le canal entre ces deux îles, qui ſans cela auroient dix-huit lieues de louvoyage ou de largeur.

Le vent ceſſa bientôt de nous favoriſer, il ſe rangea dans la partie du Sud & du Sud-oueſt, il rendit la mer groſſe: quelqu'envie que M. de Cheſac eut de me mettre à terre, pour y faire les opérations dont j'étois chargé, il fallut attendre au 6 Décembre; ce jour-là, quoique le vent fût conſtant, la mer étoit moins groſſe qu'à l'ordinaire, & on put y mettre un canot: je m'y embarquai. Je faiſois route pour la ville, lorſque je rencontrai une chaloupe de l'île qui étoit ſortie aux ſignaux * que l'on fait ordinairement

* Ces ſignaux conſiſtent à tirer des coups de canon, à mettre la flamme

pour faire venir un bâtiment de la côte ſur laquelle on eſt. Je me mis dans ce bateau, & mes guides, ſûrs de leurs marques, gagnèrent avec précaution un canal étroit & court que la Nature a pratiqué entre pluſieurs rochers : ce canal conduit à un petit baſſin fait avec art, où l'on trouve un débarquement très-ſûr & très-commode. Quelque agitée que ſoit la mer au large, on ne ſent jamais ſa violence dans ce petit baſſin; il peut contenir une centaine de bateaux pêcheurs.

La ville où je débarquai, s'appelle *Punta Delgada;* dès que j'y eus mis pied à terre, je fus conduit chez le Commandant, c'étoit un vieillard vénérable; je lui montrai mon paſſeport; pénétré du plus profond reſpect, à la vue des ordres de Sa Majeſté Très-Fidèle, il m'aſſura que je ſerois le maître de m'établir, où, & quand je le jugerois à propos.

Après quoi, je retournai promptement à bord de la Frégate, qui étoit reſtée ſous voile. Le mouillage eſt fort près de la ville; on n'y laiſſe donc jamais tomber l'ancre, que lorſque le vent vient de terre, & ceux qui y ſont mouillés doivent toujours être prêts à appareiller ſi le vent ſouffle du large, parce qu'alors la mer eſt extrêmement groſſe.

Cette raiſon rend la navigation de ces îles fort dangereuſe l'hiver, & comme dans cette ſaiſon les vents abandonnent rarement la partie du Sud & celle de l'Oueſt, le commerce y eſt interrompu pendant les mois de Décembre, Janvier & Février, & alors on tire preſque toujours les bateaux de pêche à terre.

Nonobſtant cela, je me flattois de pouvoir le lendemain retourner à la ville avec les inſtrumens dont j'avois beſoin, mais cette attente fut vaine; dans la nuit même le vent força conſidérablement, la mer devint agitée, & huit jours conſécutifs d'un auſſi mauvais temps, firent perdre l'eſpérance

---

& le pavillon de la Nation dont on eſt; mais ce dernier eſt pliſſé dans le ſens de ſa largeur & guindé dans cet état au haut du bâton de pavillon : cela s'appelle mettre ſon pavillon *en berne.*

du débarquement. La lame déjà forte, le jour que j'avois été à terre, devoit l'être bien autrement, & il falloit une semaine de tranquillité pour rendre la côte accessible; il n'étoit pas naturel de se flatter que le temps deviendroit bientôt favorable à l'exécution de notre projet. M. de Chesac se trouva donc forcé d'y renoncer & de faire route pour l'île de Madère, où ses ordres l'appeloient.

Pour ne pas perdre son temps dans sa croisière involontaire autour de l'île de Saint-Michel, il chercha à tirer de son Pratique Portugais des connoissances sur sa position; l'éclaircissement le plus important qu'il en ait eu, concerne la vigie la *Baleine.* Ce pilote allant un jour de l'île de la *Tercère* à celle de Saint-Michel, la vit après avoir pris hauteur, ce qui l'a déterminé à la placer par $39^{d}\ 15'$ de latitude, & dans le Nord-quart-nord-est de la ville de *Ribeyra grande.*

Cette position est différente de celle que lui donne la Carte du Dépôt de l'*année 1742;* on y voit cette roche par $38^{d}\ 40'$ de latitude, & dans le Nord-nord-est de la pointe du Nord-est de l'île de Saint-Michel.

Je passe sous silence d'autres remarques moins essentielles, dont la plupart même ne regardent que les autres îles des Açores. Un voyage fait exprès dans cet Archipel nous donneroit des instructions beaucoup plus exactes, & l'on parviendroit peut-être à s'assurer de l'existence & de la direction des courans; s'il y en a autour de ces îles, nous n'en avons aperçu aucunes traces, ainsi nous n'en parlerons point.

A mesure que nous nous éloignions des Açores pour courir dans le Sud, nous éprouvions un changement sensible; le vent d'aval jusqu'alors obstiné & violent, devenoit moins fort & plus variable; la mer étoit plus douce, le ciel plus serein, le froid diminuoit; nous n'étions pas dans les vents alisés, mais nous goûtions l'agréable température inséparable de leur voisinage.

Des circonstances aussi favorables, contribuent sans doute à la beauté du climat; tel est celui de Madère. Nous découvrimes cette île fortunée le 21 Décembre, après avoir

vu celle de *Porto-Santo*, qui en eſt peu éloignée. Cette dernière Iſle nous reſtoit au Nord-oueſt-quart-oueſt de la bouſſole, à dix ou douze lieues, & alors elle offroit à la vue quatre *mornes* ou pointes détachées, qui paroiſſoient être autant d'îles.

Lorſqu'on vient à Madère par la partie de l'Eſt, on voit outre Porto-Santo, trois îles appelées *Déſertes*, elles ſont preſque Nord & Sud; celle du Nord eſt fort baſſe, & ſouvent on la confond avec l'île de Madère; celle du milieu & celle du Sud, ſont fort élevées; celle-ci eſt coupée en forme de dents de ſcie, elle paroît faire deux Iſles, à moins qu'on n'en ſoit fort proche, & cette fauſſe apparence peut cauſer l'erreur de prendre pour la Déſerte la plus ſeptentrionale, celle qui effectivement eſt au milieu des trois.

L'inconſtance du vent ne nous permit pas de gagner la rade de Funchal, plus tôt que le Dimanche 23; notre Pratique de Liſbonne n'avoit jamais mouillé ſous Madère, un Pilote de l'île nous indiqua le meilleur mouillage, & le même jour nous jetames l'ancre dans le lieu le plus ſûr. On y eſt fort près de terre; le milieu de la plus Nord des Déſertes, reſtoit à l'Eſt-ſud-eſt 2 degrés Eſt, & la plus Sud au Sud-eſt 4 degrés Eſt de la bouſſole.

ARTICLE SEPTIÈME.

Séjour à Madère.

Le 24, je fus à Funchal joindre M.rs les Chevaliers de Goimpy & de Diziers, qui, après avoir montré les ordres dont ils étoient porteurs, avoient eu dès la veille, de M. le Comte de Saint-Michel, Gouverneur de l'île, la permiſſion de s'établir à terre, & avoient choiſi une maiſon propre à nos opérations.

L'île de Madère a de longueur dix-ſept à dix-huit lieues, & de largeur ſept à huit; elle a été découverte en 1420, par Martin Vas & Jean Conſalve; elle appartient aux Portugais; elle a tant de montagnes, & celles-ci ſont ſi hautes, que l'on

peut dire que l'île elle-même n'eſt qu'une montagne coupée par beaucoup de précipices: elle court de l'Eſt à l'Oueſt; du côté du midi, elle s'abaiſſe en une pente d'abord aſſez roide, qui s'adoucit inſenſiblement & mène à une plage au bord de la mer. C'eſt au bas de cette pente, qu'eſt bâtie la ville de Funchal, capitale de l'île; elle eſt dans une eſpèce de plaine, longue & étroite, ce qui la rend un boyau, uni dans le ſens de ſa longueur, mais qui va en montant dans celui de ſa largeur.

Deux ruiſſeaux la traverſent, & y fourniſſent toute l'année une eau excellente; dans les grandes pluies, ces ruiſſeaux deviennent des torrens; alors ils ne ſuffiſent pas pour l'écoulement des eaux qui tombent des montagnes. On y a remédié en pratiquant dans les rues, des canaux qui reçoivent & portent à la mer les fontes de neiges, qui ſouvent y ſont abondantes.

La ville de Funchal eſt ceinte d'une ſimple muraille; à chaque extrémité de la plage, eſt un fort garni de canons; dans ſa partie occidentale, eſt une citadelle élevée: c'eſt aux Eſpagnols que l'on doit ces fortifications *.

La rade eſt toute ouverte, mais la tenue y eſt bonne; c'eſt un fond de ſable vaſart; notre groſſe ancre étoit par quarante braſſes & celle d'affourche par vingt-ſept; cette différence conſidérable de fond annonce un banc, il eſt fait en dos d'âne, & va en augmentant du côté de la terre, comme du côté du large.

Pour être bien mouillé il faut que la citadelle de la ville & l'ilot du Lion reſtent l'un & l'autre au même aire de vent, & il faut auſſi que la pointe occidentale de la baie reſte au même aire de vent qu'un rocher qui paroît, dans cette partie, être détaché de la terre ferme.

Dans ce mouillage on peut eſſuyer ſans riſque les plus violentes raffales qui viendront de terre depuis l'Eſt juſqu'au

* Le plan que j'ai vu au dépôt de la Marine de Funchal, m'a paru excellent.

Nord-oueſt, en paſſant par le Nord. Si le vent ſouffle du large, ſa violence eſt rompue par les hautes terres de l'île; mais comme il change en côte, la mer qui y roule perpétuellement devient horrible, il faut appareiller promptement plutôt que de riſquer une mort affreuſe. On a pourtant vu quelquefois que des navires prévenus par le vent, ou arrêtés par quelqu'autre cauſe, n'ont pas mis ſous voile, & qu'ils n'ont eſſuyé aucun accident. On prétend même que s'il s'en eſt jamais perdu quelqu'un, ce malheur n'eſt arrivé qu'à ceux qui avoient de mauvais cables ou de mauvaiſes ancres.

A la pointe orientale de l'île ſont les trois Déſertes, qui ont chacune un nom particulier: la première, ou la plus ſeptentrionale, s'appelle la *Raſe ;* elle eſt fort baſſe & couverte de bois: la ſeconde ſe nomme *la Déſerte,* & la troiſième *Bougie.*

Il y a un bon paſſage entre la Raſe & Madère, mais il faut le connoître; car ſa largeur apparente eſt rétrécie de près de moitié par une chaîne de rochers qui part de l'île de Madère. On ne peut point paſſer entre Bougie & la Déſerte.

Ces îles rendent le mouillage de Madère moins ſûr; car d'un coup de vent de Sud-oueſt ſubit & forcé, on ne pourroit guère s'élever, & dans ce cas il faudroit donner dans le canal, entre la Raſe & Madère.

L'îlot du Lion, dont j'ai parlé, eſt ſéparé de la ville de Funchal par un baſſin profond de dix braſſes; dans ſa partie occidentale eſt une chaîne de rochers qui va de l'îlot à la grande île. On pourroit aſſeoir une muraille ſur cette chaîne: ce baſſin ſe trouveroit fermé, & on y ſeroit à l'abri de tout vent. Tel qu'il eſt, les navires qui y mouillent s'y trouvent très-bien, & un gros vaiſſeau de guerre Portugais y a, dit-on, paſſé un hiver.

Cette île eſt fort peuplée: elle a au moins ſept mille habitans: elle ne pourroit pas leur fournir du blé pour plus de trois mois; ſon vin y ſupplée; on y en fait une ſi grande quantité que cette denrée ſeule leur procure tous leurs beſoins. Les Anglois obligés d'aller prendre ailleurs le vin qu'ils ne

trouvent pas chez eux, ſont preſque ſeuls le commerce de Madère; ils y apportent du blé & les ouvrages de leurs manufactures, ils y achettent auſſi des citrons. La rade eſt toujours garnie de leurs vaiſſeaux, & tous les ans un navire au moins de leur Compagnie des Indes Orientales y vient charger du vin pour ſes comptoirs, en échange du blé qu'il y laiſſe.

L'île de Madère reçoit auſſi des proviſions de celle de Saint-Michel; cette dernière île eſt très-fertile en blé: ſa partie du Nord-oueſt porte le nom de *Bretagne* à cauſe de ſa grande fertilité; elle n'abonde pas moins en beſtiaux, qui ſe portent auſſi à Madère.

Notre Obſervatoire étoit à peu-près au milieu du croiſſant que forme le rivage de la mer; nos opérations commencèrent le jour de notre établiſſement. Nous avons pu déterminer la hauteur du pôle à $32^d\ 37'\ 40''$, par beaucoup de hauteurs méridiennes du Soleil & d'Étoiles, priſes exactement.

La variation de l'aiguille aimantée, que notre poſition & le défaut de méridienne nous a empêché de connoître à terre, a été ſouvent obſervée à bord de la *Comète :* elle s'eſt trouvée toujours entre $10^d\ 35'$ & $11^d\ 55'$, ce qui donne pour réſultat moyen $11^d \frac{3}{4}$.

Les obſervations de longitude paroiſſent faites avec préciſion : celles dont nous déduiſons la longitude de notre Obſervatoire, ſont deux immerſions du premier ſatellite de Jupiter, une du troiſième, & une occultation d'une étoile voiſine de δ du Taureau, derrière le diſque de la Lune.

Leur réſultat moyen place Funchal à $1^h\ 16'\ 40''$ à l'occident du Méridien de Paris.

Ces obſervations déciſives, ſont bien ſuffiſantes pour conſtater la poſition de l'île de Madère: cependant nous voulions employer pour cette détermination d'autres obſervations de la Lune.

Il eſt certain qu'elles ſont d'un merveilleux ſecours pour la détermination des longitudes; on ne ſauroit trop recommander cette nouvelle méthode; mais comme quelques-unes de ces Obſervations, & particulièrement les diſtances de la

Lune aux Étoiles, engagent dans des calculs fort longs, il nous paroît néceſſaire de diſtinguer les cas auxquels on peut les employer avantageuſement, de ceux auxquels elles deviennent preſque inutiles.

Cette raiſon nous oblige de recourir au principe ſur lequel elles ſont fondées, & d'en tirer des conſéquences qui puiſſent guider ceux qui voudront tenter ces ſortes d'obſervations.

Les Aſtronomes voulant multiplier les moyens de parvenir à la connoiſſance des longitudes, ont cru trouver ce qu'ils cherchoient dans la rapidité du mouvement de la Lune; effectivement cet aſtre parcourt environ 13 degrés ſur ſon orbite par jour, d'où il ſuit que 2 minutes de degrés dans ſon lieu apparent, doivent produire un degré en longitude ou 4 minutes de temps.

Ils ont donc propoſé de déterminer, par obſervation pour un inſtant donné, le lieu de la Lune dans le ciel, ſous un méridien inconnu, & de comparer ce moment avec celui auquel, ſous un méridien connu, la Lune aura occupé le même lieu dans le ciel; la différence des inſtans donnera celle des méridiens: ce principe fort ſimple fournit trois moyens de connoître le lieu de la Lune par obſervation.

Le premier eſt celui de l'heure obſervée du paſſage de cet aſtre au méridien; le ſecond la hauteur de cette planète, lorſqu'elle eſt à une diſtance aſſez conſidérable du méridien; le troiſième eſt ſa diſtance au Soleil ou à quelques Étoiles fixes dont la poſition ſoit parfaitement connue.

L'heure du paſſage de la Lune au méridien ſe détermine ou directement, quand un inſtrument eſt bien placé dans le méridien, ou indirectement par des hauteurs correſpondantes de cet aſtre, priſes avant & après ſa médiation, ou par ſon paſſage à un vertical quelconque: ſa diſtance au Soleil ou aux Étoiles fixes ſe meſure avec des inſtrumens propres à prendre des angles. Il en de même de ſa hauteur.

Le choix de ces trois moyens n'eſt pas indifférent, & chacun exige dans la pratique des précautions qui lui ſont particulières.

Le

Le paſſage direct de la Lune au méridien n'entraîne après lui aucun calcul, mais il eſt impoſſible à la mer, & fort difficile à terre, à moins qu'on ne ſoit muni d'un quart-de-cercle mural, exactement ſitué dans le méridien.

Son paſſage à un vertical quelconque, a d'autant plus d'exactitude, qu'au moment de l'obſervation, la Lune eſt plus proche du méridien; & ceci, très-facile à terre, ſera d'une exécution preſque impoſſible à la mer.

Tout le monde ſait quels ſont les momens les plus favorables pour les hauteurs correſpondantes. Dans un obſervatoire fixe, ce ſera pour la Lune la même règle que pour le Soleil, c'eſt-à-dire, qu'il faut que l'aſtre ſoit aſſez éloigné du méridien, pour que ſon mouvement en hauteur ſoit fort ſenſible. Mais dans un vaiſſeau, il y a encore une autre attention à faire; on commettra moins d'erreurs dans les obſervations, ſi la Lune eſt entre 5 degrés & 15 degrés de hauteur; la raiſon eſt que l'intervalle, compris entre l'horizon & la partie de la mer éclairée par les rayons directs de la Lune, eſt communément fort obſcur, que par conſéquent l'horizon lui-même eſt fort difficile à diſtinguer; d'où il ſuit que plus la Lune eſt haute, plus cet intervalle eſt grand, moins l'horizon eſt terminé, & plus on a de peine à prendre la hauteur de la Lune.

Lorſque cet aſtre eſt élevé de moins de 5 degrés au-deſſus de l'horizon, ſa hauteur vraie eſt trop altérée par la réfraction; Les termes de 5 degrés & 15 degrés ſont donc les plus favorables pour cette obſervation. Cette dernière remarque a également lieu, ſi on veut déterminer la longitude par une ſeule hauteur quelconque, à moins qu'on ne choiſiſſe le jour ou le crépuſcule.

Quant aux diſtances de la Lune au Soleil ou aux Étoiles fixes, comme dans cette opération, l'on cherche à meſurer directement une portion de l'orbite de la Lune, en partant d'un point déterminé, il eſt évident qu'après le Soleil les Étoiles zodiacales ſont celles auxquelles il faut principalement s'attacher. Nous diſons, après le Soleil; cet Aſtre mérite la

préférence : 1.° la clarté qu'il répand rend le ſuccès plus certain : 2.° il eſt toujours dans l'Écliptique. Mais le choix même des Étoiles zodiacales demande quelques réflexions ; celles qui ſont dans la perpendiculaire à la ligne des Cornes, ou, ce qui eſt à peu-près la même choſe, dans l'orbite de la Lune, ſont ſans contredit les plus propres de toutes à cette voie de trouver la différence des Méridiens.

De tout ceci, nous concluons, 1.° que pour les hauteurs de la Lune, les temps les plus opportuns ſont ceux auxquels le mouvement apparent de la Lune eſt le plus rapide ; 2.° que pour ſes diſtances aux Étoiles, il convient d'en meſurer à celles qui ſont ſituées dans la perpendiculaire à la ligne des Cornes, ſoit à l'Eſt, ſoit à l'Oueſt ; que plus l'étoile ſera éloignée de cette perpendiculaire, moins l'obſervation ſera favorable, & que l'on ne pourroit en rien conclure pour la longitude, ſi la planète & l'étoile ſe trouvoient dans cet inſtant dans le même cercle de latitude, parce qu'alors la diſtance des deux aſtres ne change pas ſenſiblement dans un certain eſpace de temps. Quoique les diſtances de la Lune aux autres Étoiles que les zodiacales, priſes dans des circonſtances différentes de celles que nous venons d'indiquer, ne ſoient pas auſſi favorables pour la déduction des longitudes, ce n'eſt pas une raiſon pour exclure ces ſortes d'obſervations ; elles ont leur utilité, & l'on y peut avoir recours lorſque les autres ne ſont pas praticables.

Il eſt vrai que dans ce cas il faudra meſurer de ſuite au moins deux de ſes diſtances, puiſque par une ſeule on ne pourroit pas déterminer le lieu de la Lune dans le ciel ; mais ſi l'on choiſit une étoile qui ſoit dans la perpendiculaire à la ligne des cornes, une ſeule diſtance de la Lune à cette étoile, meſurée avec préciſion, ſera ſuffiſante ; & par ce moyen on évitera la répétition des erreurs qui peuvent ſe commettre à chaque opération, & que le haſard accumule quelquefois dans le même ſens. Si cependant on avoit pris pluſieurs de ces diſtances, voici une règle générale pour juger de leur exactitude.

Le temps, exprimé en minutes d'heures, que la Lune met à s'approcher ou à s'éloigner d'une Étoile, doit être à peu-près égal au double de la distance parcourue, exprimée en minutes de degré; c'est-à-dire, que s'il s'est écoulé 10 minutes de temps entre la mesure de deux distances, la Lune doit s'être approchée ou éloignée de l'étoile de 5 minutes de degrés.

Nous nous dispenserons de donner le procédé des calculs que l'on emploie pour réduire ces sortes d'observations: ils sont expliqués dans presque tous les livres d'Astronomie, & ce seroit grossir inutilement cet Ouvrage que de répéter ce qui se trouve ailleurs.

M. Pingré, dans son *État du Ciel* de 1755, a donné la résolution de plusieurs problèmes de cette espèce. Nous ne parlerons point non plus de la pratique de ces observations à la mer. M. l'Abbé de la Caille a discuté cet article d'une façon élégante & nouvelle dans le Discours qui est à la tête du cinquième volume des Éphémérides; nous y renvoyons.

M. de Goimpy nous proposa de placer notre instrument dans un vertical quelconque, de n'y plus toucher, & d'observer l'heure du passage de la Lune & de quelques Étoiles voisines, par le même fil. Nous choisîmes le 4 de Janvier: ce jour, la Lune étoit à la même hauteur que les Hyades, qui la suivoient de près au Méridien, & notre instrument n'étoit pas fort éloigné du plan du Méridien. Nous pumes, à nous trois, marquer l'attouchement de la Lune au vertical, & ceux de presque toutes les Étoiles de la constellation que j'ai nommée. Nous ne ferons pourtant point usage de cette observation, ni de quelques autres: nous attendrons pour cela qu'il ait paru une Carte exacte des Hyades, où chaque Étoile sera placée convenablement.

Pendant notre séjour à terre, depuis le 24 Décembre 1753, jusqu'au 10 Janvier de l'année suivante, le temps fut fort incertain, & la beauté du climat souvent altérée.

Le 1.er Janvier, un vent de Nord-est très-violent, accompagné de beaucoup de grêle & de neige, nous fit juger que

dans les pays ſeptentrionaux de l'Europe, le froid devoit être fort conſidérable. Ce mauvais temps ne dura que deux jours; le 3 Janvier, le froid s'adoucit, & quelques jours après il faiſoit fort chaud; la neige des montagnes ne fondoit pourtant point, & il y en avoit encore quand nous avons quitté l'île.

Au reſte, ce changement ſoudain eſt extrêmement rare dans ce climat; il eſt ordinairement fort tempéré, & s'il y a eu une variation conſidérable cette année, il faut l'attribuer au froid exceſſif qui s'eſt fait ſentir dans preſque toute l'Europe, & à ce vent de Nord-eſt, qui, devenu général, s'eſt étendu juſqu'en Amérique, & en a rafraîchi les climats les plus chauds.

Voici des remarques générales que nous avons eu occaſion de faire ſur les vents à Madère, & qui nous ont été confirmées par les habitans de cette île.

Quand le vent eſt décidé à ſouffler du Nord-eſt, telle eſt à peu-près la route qu'il ſuit dans la rade que l'on ſait être placée dans le Sud de l'île.

Le Soleil en ſe levant y fait ſentir la briſe de l'Eſt; à midi on a celle de l'Oueſt, & le ſoir calme ou un vent de terre; il n'eſt pas rare d'y voir en même temps les deux briſes oppoſées; mais à terre le vent eſt conſtamment au Nord-eſt; il en amène des nuages; ceux-ci ne pouvant paſſer au-deſſus des montagnes de l'île, s'y arrêtent : ces montagnes ſont donc toujours couvertes. Les Déſertes, qui ne ſont guère moins élevées que Madère, préſentent la même apparence; & ces terres *embrumées*, ſont ſigne de beau temps.

Si ces nuages ſe diſſipent, & ſi les terres ſont nettes, on peut s'attendre au vent de Sud; celui-ci, cependant, ne peut ſe faire ſentir plus de trois ou quatre jours; le vent aliſé eſt, au plus, à quatre degrés de cette île; il ſouffle dans la direction oppoſée; l'aliment du vent de Sud lui manque donc bientôt; le calme lui ſuccède, & le vent de Nord-eſt reprend ſes forces, juſqu'à ce que quelqu'orage ou une autre cauſe dans la liſière du vent aliſé, faſſe reparoître le vent du Sud.

Nous avions choisi, pour vérifier notre sextant par le renversement, un point éloigné de quatre lieues sur ces Désertes, si souvent couvertes de vapeurs; cette circonstance rendoit plus rares les momens de notre opération; nous y avons pourtant réussi, & l'erreur de la lunette perpendiculaire, qui, en 1751, étoit en plus, a diminué successivement, & elle étoit alors en moins de 0′ 50″.

Le même endroit étoit trop remarquable pour ne pas savoir, par son moyen, si le cheveu tomboit sur $0^d\,0'\,0''$, quand la lunette centrale & l'alidade étoient pointées sur le même objet, & nous vimes que quand les lunettes étoient parallèles, & leur centre dirigé au même point, le cheveu tomboit sur $0^d\,19'\,0''$.

Par des expériences réitérées, nous nous étions assurés qu'il y avoit cinq secondes & demie d'intervalle entre l'instant auquel on voyoit le feu d'un coup de canon tiré à bord de la *Comète*, & celui auquel on entendoit le bruit; c'est-à-dire, que cette frégate étoit à 951 ½ toises de distance de notre observatoire, ou un tiers de lieue.

ARTICLE HUITIÈME.

Départ de Madère; arrivée à Lisbonne; départ de cette ville; retour à Brest.

Nous n'avions plus d'observations à faire dans cette île; nous retournames tous à bord le 11 Janvier, & M. de Chesac mit à la voile le lendemain. Le vent variable du Sud au Sud-sud-est le détermina à faire le tour de l'île par sa partie occidentale; cette manœuvre, & celle de ranger la côte de fort près, nous en fit relever les différentes pointes l'une par l'autre; nous eumes aussi occasion de remarquer que cette île est par-tout extrêmement élevée, mais qu'elle paroît l'être encore davantage dans sa partie septentrionale : on n'y aperçoit aucune habitation, elle n'a point de mouillage; bien différente, en cela, de la bande du Sud, qui offre

beaucoup de maiſons de campagne, pluſieurs villes, & quantité d'endroits propres à jeter l'ancre.

Les pointes les plus remarquables que nous voyions ſont celles de l'Oueſt de la baie de Funchal, & celle de Sol; elles ſont Oueſt, Nord-oueſt & Eſt-ſud-eſt du monde: celle-ci & celle du Jardin Nord-oueſt-quart-d'oueſt & Sud-eſt-quart-d'eſt: celle du Jardin & celle de Marazillo ſont Nord-oueſt-quart-nord & Sud-eſt-quart-ſud: cette dernière & celle de Pargo, Nord-nord-oueſt & Sud-ſud-eſt.

La pointe de Pargo eſt la plus occidentale de l'île; entre elle & celle de Marazillo eſt un ancrage qui porte ce dernier nom.

Au-delà, l'île s'arrondit & tourne vers le Nord-eſt, la première pointe que l'on aperçoit eſt celle de *Triſtan :* dans l'Eſt-nord-eſt, & à un quart de lieue d'elle eſt un petit îlot, puis enfin nous relevames une pointe, qui par celle de Triſtan reſtoit à l'Eſt-quart-ſud-eſt 3 degrés Sud.

Les ordres de M. de Cheſac lui enjoignoient de ſe rendre de nouveau à Liſbonne: notre route fut donc dirigée pour le Portugal: le 13 Janvier au ſoir, nous perdimes de vue l'île de Madère, & le 16 au coucher du Soleil nous aperçumes le cap la Roque dans l'Eſt-quart-ſud-eſt du monde, à dix lieues environ.

Le Tage coule ſous un climat dans lequel le vent eſt variable: cependant celui d'Eſt ou de Nord y ſouffle plus fréquemment qu'aucun autre: le Soleil n'y eſt preſque jamais obſcurci par les nuages, & les nuits y ſont fort belles. Le ſeul cap la Roque, qui eſt très-élevé, raſſemble ſur ſa tête les brouillards & les vapeurs que le vent du Nord-eſt chaſſe devant lui, & il s'y forme une enveloppe épaiſſe que les marins nomment *le chapeau du cap la Roque.* Quoique ce chapeau empêche ſouvent de bien diſtinguer ce cap, il n'indique pas moins ſûrement le lieu où il eſt: ſi ce chapeau diſparoît, c'eſt un indice de vent d'Oueſt; celui d'Eſt tempère la grande chaleur que produiroit le Soleil ſur une terre découverte, & toujours échauffée des rayons de cet aſtre.

Il ſouffle quelquefois avec une ſi grande force qu'il rend l'entrée du Tage fort difficile. Le courant de cette rivière repouſſé par le flot, a produit à ſon embouchure deux bancs appelés *cachopes;* ces deux bancs & la rive du Nord font deux paſſes; la petite eſt la ſeptentrionale, la grande eſt celle du ſud: il y a louvoyage dans celle-ci ſeulement: obligés d'y donner, nous vimes qu'il pouvoit y avoir entre les cachopes qui la forment, deux tiers de lieue de diſtance, & que pour les doubler contre le vent il falloit un fort long temps; nous y parvinmes cependant, & le 20 nous étions mouillés à Liſbonne ſous le Palais des Rois.

M. le Comte de Baſchi me permit de placer ſur la terraſſe de ſon hôtel, un obſervatoire portatif* que j'avois embarqué; mais cette terraſſe, faite de planches très-minces & placée ſur quatre traverſes, étoit ſi mobile qu'elle communiquoit à mon obſervatoire un ébranlement conſidérable. Le vent, toujours conſtant du Nord-eſt, arrêtoit ma pendule, preſque à chaque moment; ainſi je n'ai pu profiter du ſéjour que nos ordres m'obligeoient de faire dans cette Capitale.

Le froid extrême du reſte de l'Europe s'y faiſoit ſentir; il geloit preſque toutes les nuits dans cette ville, où l'on ne ſe ſouvenoit pas d'avoir vu de gelée.

Liſbonne, ſituée ſur ſept montagnes, comme la ville de Rome, préſente un ſpectacle fort agréable à ceux qui la voient des vaiſſeaux mouillés dans le Tage.

Les curioſités qu'elle renferme, & que j'ai preſque toutes vues, mériteroient qu'on en fît une deſcription exacte, & qui pût remplacer un Ouvrage aſſez infidèle, qui a pour titre, *Deſcription de Liſbonne.* Beaucoup d'édifices ont été renverſés l'année d'après par le tremblement de terre; beaucoup auſſi y ont réſiſté. Un des plus beaux monumens eſt ſans contredit ſon aqueduc; il eſt remarquable par ſa longueur, puiſqu'il amène les eaux de plus de deux lieues, mais plus encore par ſa largeur, & par la hauteur prodigieuſe de quelques

* Voyez ſa deſcription dans le volume de l'Académie de 1770, *p. 612.*

arches que la ſituation du terrein a obligé de faire; aſſez près de la ville, eſt un foſſé profond creuſé par les eaux, qui quelquefois y paſſent comme un torrent: on a voulu faire paſſer l'aqueduc par cet endroit; on y a conſtruit pluſieurs arches, dont la principale a, depuis la corniche juſqu'en bas, cent quatre ou cent ſix pieds; cette arche ainſi que les ſix plus voiſines, a une voûte à tiers-point.

Liſbonne a beaucoup d'Égliſes, de Palais & quelques Places; la plus belle s'appelle la *Place du Palais;* c'eſt dans cette place que ſe fait le Couronnement du Monarque à ſon avènement au Trône.

L'objet de notre voyage rempli, nous appareillames de Liſbonne le 12 Février, & le 21 du même mois, nous étions dans la rade de Breſt.

M. de Cheſac, perſuadé de l'importance qu'il y auroit à connoître l'extrémité du banc qui donne la ſonde près des côtes de Bretagne, faiſoit jeter le plomb de fort bonne heure. La première ſonde fut de quatre-vingt-quinze braſſes, fond de ſable gris, très-fin & vaſeux. Par les routes réduites depuis ce fond, juſqu'à la vue de l'île d'Oueſſant, on a été certain qu'elle ſe trouvoit à cinquante lieues & demie, dans l'Oueſt-quart-ſud-oueſt 5 degrés Oueſt de cette Iſle.



SUITE DU VOYAGE FAIT PAR ORDRE DU ROI, EN 1753, *à la côte de* Portugal *& à l'île de* Madère.

SECONDE PARTIE.

SECTION SECONDE,

Qui comprend l'Obſervation de l'Éclipſe de Soleil, faite à Aveiro, & les Obſervations de Latitude & de Longitude à l'île de Madère.

Par M. DE BORY.

ARTICLE PREMIER.

*Observations pour la Latitude d'*Aveiro.

IL étoit indiſpenſable de connoître la hauteur du Pôle du lieu où nous avions été envoyés, & cette opération devoit être accompagnée de celle de la vérification de notre inſtrument.

Pour n'avoir aucun reproche à nous faire ſur la connoiſſance de l'erreur de la lunette perpendiculaire, la ſeule que nous ayons employée, nous avons eu recours à la méthode du renverſement & à celle des hauteurs méridiennes d'Étoiles, priſes dans une même nuit, les unes dans le Nord, & les autres dans le Sud.

1.° *Vérification par le renverſement.*

Le 28 Octobre, le temps ſe trouvant favorable, dans l'après-midi nous pointames notre lunette ſur une élévation

très-remarquable, ſituée au milieu des montagnes de l'Eſt, & éloignée de quatre lieues au moins.

Nous trouvames que l'inſtrument étant droit:

Le fil-à-plomb battoit ſur	88d	47′	40″
L'inſtrument renverſé, le cheveu battant ſur le centre	91.	10.	55
Somme	179.	58.	35
Moitié	89.	59.	17½
Diſtance à 90d	0.	0.	42½

Telle eſt l'erreur dont l'inſtrument hauſſoit.

2.° *Recherche de l'erreur de la même lunette par des hauteurs méridiennes d'Étoiles, priſes dans le Nord & dans le Sud, dans la nuit du 28 au 29.*

Les hauteurs méridiennes de la Polaire, dont il eſt queſtion ici & dans la ſuite, ſont les hauteurs de cette Étoile, lorſqu'elle étoit au méridien ſupérieur.

Hauteur méridienne de la Polaire	42d	41′	5″
Réfraction	—	1.	4
Hauteur apparente de la Polaire	42.	40.	1
Complément	47.	19.	59
Hauteur méridienne de Rigel	40.	53.	10
Réfraction	—	1.	8
Hauteur apparente de Rigel	40.	52.	2
Complément	49.	7.	58
Somme des complémens	96.	27.	57
Déclinaiſon de la Polaire	87.	59.	15
Déclinaiſon de Rigel	8.	30.	12
Diſtance vraie des deux Étoiles	96.	29.	27
Diſtance obſervée	96.	27.	57
Différence	0.	1.	30
Moitié ou erreur dont la lunette baiſſe	0.	0.	45

C'eſt cette erreur que nous appliquerons aux hauteurs

méridiennes que nous allons rapporter. Nous avertissons que le résultat des observations étant commun aux trois observateurs, nous ne spécifierons point à qui chacune en particulier peut appartenir.

Le 23 Octobre 1753.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil.....	38^d	5′	0″
Déclinaison méridionale du centre du Soleil.........	11.	34.	52
Donc, hauteur du pôle..........................	40.	38.	10

Le 24 Octobre.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil......	37.	44.	5
Déclinaison du centre..........................	11.	55.	49
Donc, hauteur du pôle..........................	40.	38.	9
Hauteur méridienne de la queue de la Baleine......	30.	3.	35
Déclinaison méridionale	19.	20.	0
Donc, hauteur du pôle..........................	40.	38.	6

Le 25 Octobre.

Hauteur méridienne de la queue de la Baleine......	30.	3.	45
Donc, hauteur du pôle	40.	37.	56

Le 26 Octobre.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil......	37.	2.	30
Déclinaison du centre..........................	12.	37.	11
Donc, hauteur du pôle..........................	40.	38.	25
Hauteur méridienne de la queue de la Baleine.......	30.	3.	45
Donc, hauteur du pôle	40.	37.	56

Le 27 Octobre.

Hauteur méridienne de Fomalhaut...............	18.	30.	20
Déclinaison méridionale.........................	30.	55.	22
Donc, hauteur du pôle	40.	47.	53
Hauteur méridienne de la Polaire.................	42.	41.	10
Déclinaison.................................	87.	59.	19
Donc, hauteur du pôle.........................	40.	38.	39

Le 28 Octobre 1753.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil	36d 21′ 50″
Déclinaison	13. 17. 39
Donc, hauteur du pôle	40. 38. 39.
Hauteur méridienne de la Polaire	42. 41. 5
Hauteur du pôle	40. 38. 31
Hauteur méridienne de Rigel	40. 53. 10
Déclinaison méridionale	8. 30. 12
Hauteur du pôle	40. 38. 31
Hauteur moyenne du pôle	40. 38. 20

ARTICLE DEUXIÈME.

Recherche de la marche de la pendule par des hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil.

Le Mercredi 24.

Hauteurs.	*Le matin.*	*Le soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
24d 20′	9h 15′ 54″	3h 0′ 59″	24h 16′ 53″	0h 8′ 26″ ½
24. 30	17. 5	2. 59. 42	47	23½
24. 40	18. 18	58. 31	49	24½
24. 50	19. 31	57. 16	47	23½
25. 0	20. 44	56. 6	50	25
	Midi moyen			0. 8. 25
	Équation			+ 0. 14
	Midi vrai			0. 8. 39

Le Jeudi 25.

Hauteur.	*Le matin.*	*Le soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
24d 30′	9h 18′ 23″	2h 56′ 48″	24h 15′ 11″	0h 7′ 35″½
	Équation			+ 0. 14½
	Midi vrai			0. 7. 50
	Midi vrai le 24			0. 8. 39
	Différence			0. 49

Le Samedi 27.

Hauteurs.	*Le matin.*	*Le soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
26^d 10′	9^h 33′ 48″	2^h 38′ 14″	24^h 12′ 2″	0^h 6′ 1″
26. 20	35. 9	36. 54	3	$1\frac{1}{2}$
26. 30	36. 29	35. 33	2	1
26. 40	37. 46	34. 14	0	0
26. 50	39. 6	32. 54	0	0
27. 0	40. 28	31. 32	0	0

Midi moyen	0^h 6′ $0''\frac{1}{2}$
Équation	+ $14\frac{1}{2}$
Midi vrai	0. 6. 15
Midi vrai le 24	0. 8. 39
Différence pour 3 jours	0. 2. 24
pour 1 jour	0. 0. 48
Midi vrai le 25	0. 7. 50
Midi vrai le 27	0. 6. 15
Différence pour 2 jours	0. 1. 35
pour 1 jour	0. $47\frac{1}{2}$

Nous ſommes donc fondés à fixer le retardement de notre pendule à 48 ſecondes par jour.

ARTICLE TROISIÈME.

Obſervation de l'Éclipſe de Soleil, du 26 Octobre 1753.

La nuit avoit été fort belle, & vraiſemblablement nous en euſſions paſſé une grande partie à obſerver des hauteurs méridiennes d'étoiles, ſi nous n'avions craint de nous fatiguer la vue, & de nous mettre par-là hors d'état d'examiner, avec la dernière attention, le phénomène important que nous attendions. Le 26, le Soleil parut vers 6^h 40′ du matin; ſon lever fut pur, ſerein & précédé d'un petit vent de ſud-eſt, préſage du temps le plus favorable.

Perſuadés que cette Éclipſe ſeroit totale, nous commençames de bonne heure à meſurer, avec l'héliomètre, les

diamètres du Soleil, & nous remarquions, avec ſoin, que la différence conſidérable qui s'y étoit trouvée d'abord entre le vertical & l'horizontal, s'évanouiſſoit à meſure que cet aſtre en montant ſe dégageoit des vapeurs de l'horizon.

Nous ne rapporterons point ici la grandeur de ces diamètres; nous nous flattions qu'ils pourroient nous être de quelque utilité, nous avons été trompés dans notre attente, & l'exactitude que nous apportions à cette opération nous a de plus fait manquer le commencement de l'Éclipſe.

A 7^h 30′ la Lune avoit déjà échancré le Soleil; cet inſtant arrivoit plus tôt que nous n'avions compté.

Le voyant paſſé, nous meſurames différentes phaſes avec le micromètre ajuſté à la lunette de 6 pieds.

En voici le détail: les temps ſont des temps vrais.

A 7^h 41′ 11″ la partie lumineuſe étoit égale à 2226 $\frac{1}{2}$ part. du micr.
8. 12. 7 $\frac{1}{2}$ . . . . à 1299 $\frac{1}{2}$.
8. 15. 47 . . . . à 1210 $\frac{1}{2}$.
8. 18. 38 . . . . à 1074 $\frac{1}{2}$.
8. 24. 35 . . . . à 986 $\frac{1}{2}$.
8. 27. 35 . . . . à 791 $\frac{1}{2}$.
8. 29. 36 la Lune empêchoit de diſtinguer les bords du diamètre horizontal.

Le froid alors augmenta ſenſiblement: un thermomètre deſtiné à en connoître le degré avoit été rompu dès la veille, & quelques jours auparavant des tuyaux de baromètre avoient eu le même ſort.

A 8^h 32′ 14″ la partie lumineuſe étoit égale à 511 $\frac{1}{2}$ parties.
8. 37. 47 . . . . à 268 $\frac{1}{2}$.
8. 40. 44 . . . . à 149 $\frac{1}{2}$.

Le milieu de l'Éclipſe, temps fort difficile à bien diſtinguer, nous échappa, & vers 8^h 46′ $\frac{1}{2}$ nous vimes les cornes faire un mouvement ſubit, & ſe trouver tout d'un coup dans une direction différente de la précédente; ce moment fut celui de la diminution de l'Éclipſe.

La remarque que nous venons de ſaire eſt pourtant une preuve bien authentique que nous étions près du terme où l'on devoit voir l'Éclipſe annulaire.

Pendant la plus grande obſervation, Jupiter & Mars parurent fort clairement: les oiſeaux alloient ſe coucher; cependant on put toujours écrire facilement avec un crayon, & l'obſcurité reſſembloit ſeulement à un beau crépuſcule qui eſt vers ſon milieu.

C'étoit alors que l'atmoſphère ſolaire eût pu ſe faire apercevoir; mais il n'en parut aucune trace: on ſait qu'elle ne peut être vue que pendant la totalité d'une Éclipſe.

Celle-ci, depuis le mouvement des cornes, diminuoit ſenſiblement: la clarté du jour revenoit fort vîte. Nous meſurames les phaſes qui ſuivent.

A 8h 54′ 33″ la partie lumineuſe étoit égale à 453 $\frac{1}{2}$ parties.
9. 5. 53 .... à 923 $\frac{1}{3}$.

On ne pouvoit encore meſurer aucun diamètre du Soleil.

9. 17. 7 $\frac{1}{2}$ la partie lumineuſe égale à 1268 $\frac{1}{2}$ parties.
9. 26. 41 .... à 1688 $\frac{1}{2}$.
9. 46. 46 .... à 2335 $\frac{1}{2}$.

Enfin la Lune étoit prête à diſparoître: nous nous attachames uniquement à en bien marquer le moment, & nous l'avons fait avec la plus grande exactitude.

M.rs de Goimpy & de Diziers, munis chacun d'une lunette de 12 pieds, étoient dans l'appartement qu'ils avoient choiſi: leur pendule étoit réglée ſur la mienne. M. de Goimpy détermina la fin de l'Eclipſe à 10h 8′ 10″, & M. de Diziers à 10h 8′ 2″.

Pour moi, placé aſſez loin de ces Meſſieurs, je l'ai obſervée, comme M. de Goimpy, à 10h 8′ 10″. Nous examinames pendant quelque temps l'endroit par où la Lune étoit ſortie, pour découvrir ſon apparence; nous n'aperçumes rien pendant l'obſervation, qui s'eſt faite avec des verres colorés; les

bords des deux luminaires ont toujours été bien terminés, & ſans aucun mouvement d'ondulation.

La fin de l'Éclipſe ſe réduit en temps vrai ſur le retardement journalier des 48 ſecondes qu'avoit ma pendule, & ſur le midi vrai conclu le 26 Octobre à $0^h\ 7'\ 2''$.

Le 28 Octobre 1753.

Fin de l'Éclipſe à la pendule	10^h	$8'$	$10''$
A midi, la pendule avançoit de		7.	2.
Première correction	10.	1.	8.
A 10^h la pendule avançoit plus qu'à midi de	0^h	$0'$	$4''$
Donc, fin de l'Éclipſe, en temps vrai, ſelon M. de Goimpy & moi	10^h	$1'$	$4''$
Selon M. de Diziers	10.	0.	56.

Si l'on compare la phaſe obſervée à $8^h\ 54'\ 33''$, aux trois phaſes obſervées à $8^h\ 32'\ 14''$, à $8^h\ 37'\ 47''$, & à $8^h\ 40'\ 44''$, on concluera le milieu de l'Éclipſe à $8^h\ 44'\ 3''\frac{1}{2}$, temps vrai.

A midi, nous meſurames très-exactement avec le micromètre, le diamètre vertical du Soleil, & nous le trouvames égal à 2906 parties, ce qui, pour chaque doigt, donnera $242\frac{1}{6}$ parties.

On nous a communiqué l'obſervation de la même Éclipſe, faite à Thury par M. de Thury: nous nous en ſervirons pour connoître l'erreur des Tables, & la différence des Méridiens entre Paris & Aveiro.

Nous avons ſuivi la méthode donnée par M. l'abbé de la Caille, dans ſon Mémoire *ſur le Calcul des projections en général,* qui ſe trouve dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1744, pages 191 & ſuivantes.*

Comme nous n'avons pas obſervé le commencement de l'Éclipſe, nous ſuppoſons la latitude de la Lune, & nous ne cherchons que l'erreur des Tables en longitude; elle eſt de $2'\ 9'',4$.

Le lieu

Le lieu du Soleil à la fin de l'Éclipse étoit $7^s\ 3^d\ 9'\ 45''$, & celui de la Lune $7^s\ 3^d\ 3'\ 4''$.

La conjonction vraie sera arrivée, selon l'observation de Thury, à $10^h\ 41'\ 17''$, temps moyen; la Lune étant dans $7^s\ 3^d\ 11'\ 36''$ de son orbite, & $7^s\ 3^d\ 10'\ 26''$ sur l'Écliptique.

Sa latitude de $34'\ 58''$ boréale, & l'argument de latitude de $6^d\ 20'\ 25''\frac{1}{2}$.

La hauteur du point culminant à Aveiro, sera de $48^d\ 51'$: sa déclinaison $0^d\ 31'$ australe: le nonagésime de l'Écliptique $162^d\ 6'$: sa hauteur $52^d\ 52'$.

La somme des demi-diamètres du Soleil & de la Lune, $32'\ 25''$.

Avec ces élémens, nous trouvons pour différence des Méridiens entre Paris & Aveiro, $43'\ 17''$ de temps, dont Aveiro est plus occidental, ou $10^d\ 49'\ 15''$.

ARTICLE QUATRIÈME.

Observations de Latitude & de Longitude faites à Funchal, capitale de l'île de Madère.

Vérification de la Lunette perpendiculaire.

Nous faisons encore ici précéder les observations de latitude, par les opérations que nous avons faites pour connoître l'erreur de la lunette perpendiculaire, & nous avons également employé les deux méthodes connues.

1.° *Recherche de l'erreur de la Lunette perpendiculaire par le renversement.*

Le 5 Janvier, nous choisimes sur l'extrémité septentrionale de la Déserte la plus méridionale, un point fort remarquable; il étoit situé à l'horizon, & éloigné de plus de trois lieues; le temps concouroit à la certitude de notre opération.

L'inftrument droit, le fil partant du centre battoit fur	89^d 55' 0"
L'inftrument renverfé, le fil battant fur le centre...	90. 3. 24.
Somme............................	179. 58. 24.
Moitié.............................	89. 59. 12.
Diftance à 90^d 0' 0" ou erreur de l'inftrument...	0. 48.

L'erreur eft fouftractive, parce que l'inftrument hauffe l'objet.

2.° *Recherche de l'erreur de la même Lunette, par des hauteurs méridiennes d'Étoiles, prifes fort exactement, les unes dans le Nord, les autres dans le Sud, le même jour & pendant le crépufcule, le 8 Janvier.*

Hauteur méridienne de la queue de la Baleine.....	38^d 3' 20"
Réfraction............................	— 1. 15
Hauteur corrigée........................	38. 2. 5
Complément...........................	51. 57. 55
Hauteur méridienne de la Polaire (au mérid. fupér.)...	34. 41. 0
Réfraction............................	— 1. 24
Hauteur corrigée........................	34. 39. 36
Complément...........................	55. 20. 24
Somme des complémens..................	107. 18. 19
Déclinaifon méridionale de la queue de la Baleine....	19. 21. 0
Déclinaifon feptentrionale de la Polaire...........	87. 59. 0
Diftance vraie des deux Étoiles..................	107. 20. 0
Diftance obfervée........................	107. 18. 19
Différence...........................	1. 41
Moitié ou erreur d'inftrument, fouftractive........	0. 50½

Nous appliquons cette erreur de 0' 50" à toutes les hauteurs méridiennes du Soleil & d'Étoiles qui fuivent.

ARTICLE CINQUIÈME.

OBSERVATION de Latitude.

Le 25 Décembre 1753.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil.....	34^h 16′ 20″
Déclinaison méridionale........................	23. 24. 39
Hauteur du pôle............................	32. 37. 26

Le 26 Décembre.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil.....	34. 18. 10
Déclinaison méridionale........................	23. 22. 33
Hauteur du pôle............................	32. 37. 42
Hauteur méridienne de la Polaire................	34. 41. 0
Déclinaison septentrionale......................	87. 59. 0
Hauteur du pôle............................	32. 37. 46

Le 27 Décembre.

Hauteur méridienne de l'australe au pied du Lièvre....	34. 52. 0
Déclinaison méridionale........................	22. 32. 15
Hauteur du pôle............................	32. 37. 58

Le 28 Décembre.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil....	34. 23. 55
Déclinaison méridionale........................	23. 16. 57
Hauteur du pôle............................	32. 37. 35

Le 29 Décembre.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil.....	34. 27. 15
Déclinaison méridionale........................	23. 17. 27
Hauteur du pôle............................	32. 37. 45

Le 3 Janvier 1754.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil....	34. 51. 20
Déclinaison méridionale........................	22. 49. 40
Hauteur du pôle............................	32. 37. 24

Hauteur méridienne de la queue de la Baleine	38ᵈ	3′	30″
Déclinaison méridionale	19.	21.	0
Hauteur du pôle	32.	37.	35
Hauteur méridienne de Rigel	48.	53.	40
Déclinaison méridionale	8.	30.	12
Hauteur du pôle	32.	37.	50
Hauteur méridienne de Sirius	41.	0.	40
Déclinaison australe	16.	23.	44
Hauteur du pôle	32.	37.	33

Le 4 Janvier 1754.

Hauteur méridienne de la Polaire	34.	41.	0
Hauteur du pôle	32.	37.	40
Hauteur méridienne de Sirius	41.	0.	30
Hauteur du pôle	32.	37.	43

Le 5 Janvier.

Hauteur mérid. de la queue de la Bal. (pend. le crépusc.)	38.	3.	20
Hauteur du pôle	32.	37.	45
Hauteur mérid. de la Polaire (pendant le crépuscule)	34.	41.	0
Hauteur du pôle	32.	37.	45

Le 6 Janvier.

Hauteur mérid. du bord supérieur du Soleil	35.	11.	40
Déclinaison méridionale	22.	28.	49
Hauteur du pôle	32.	37.	55
Hauteur méridienne de la queue de la Baleine	38.	3.	20
Hauteur du pôle	32.	37.	45
Hauteur méridienne de la Polaire	34.	41.	0
Hauteur du pôle	32.	37.	45

Le 7 Janvier.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil	35.	19.	40
Déclinaison méridionale	22.	21.	21
Hauteur du pôle	32.	37.	22

Le 8 Janvier 1754.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil....	35d	27'	40"
Déclinaison méridionale....................	22.	13.	10
Hauteur du pôle..........................	32.	37.	33
Hauteur méridienne de la Baleine...............	38.	3.	20
Hauteur méridienne de la Polaire...............	34.	41.	0
Hauteur du pôle..........................	32.	37.	45
Plus grande hauteur du pôle.................	32.	37.	58
Plus petite..............................	32.	37.	22
Moyenne ou hauteur vraie....................	32.	37.	40

Nous avons cru devoir rapporter ces vingt-deux observations, telles que nous les avons faites, malgré les différences que l'on a pu remarquer entr'elles. Nous en agissons ainsi pour faire voir notre diligence, notre exactitude & notre candeur, & nous pouvons assurer que cette dernière qualité nous est extrêmement précieuse.

ARTICLE SIXIÈME.

Observation de Longitude.

QUOIQUE nous ayons tenté plusieurs observations d'espèce différente pour connoître la longitude de Funchal, nous ne rendrons compte ici que de celles par lesquelles nous déterminons la différence des méridiens entre cette ville & Paris. Elles se réduisent à quatre, savoir; trois immersions des satellites de Jupiter, & une occultation de l'étoile *g* des Hyades derrière le disque de la Lune. Nous les plaçons dans cet article selon leur ordre chronologique, & nous les réduisons en temps vrais; les deux articles suivans seront destinés au résultat qui provient de ces quatre observations.

1.° *Immersion du I.er Satellite, le 28 Décembre 1753.*

Hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil pour régler l'horloge.

Le 27 Décembre 1753.

Hauteurs.	*Le Matin.*	*Le Soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
27d 20′	10h 22′ 42″	2h 24′ 44″	24h 47′ 26″	0h 23′ 43″
27. 40	25. 46	21. 40	26	43
28. 0	29. 0	18. 31	31	45½
28. 20	31. 9	15. 18	27	43½

Midis moyen & vrai . . . . 0. 23. 44.

Le 28 Décembre.

Hauteurs.	*Le Matin.*	*Le Soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
23d 40′	9h 51′ 17″	2h 55′ 19″	24h 46′ 36″	0h 23′ 18″
24. 0	53. 55	52. 44	39	19½
24. 20	56. 22	50. 13	35	17½

Midi moyen	0. 23. 18½
Équation	— 0. 1½
Midi vrai	0. 23. 17
Midi vrai le 27	0. 23. 44
Différence	0. 0. 27

Le 28 Décembre, le temps étoit assez beau, j'observai une immersion du premier satellite dans l'ombre de Jupiter, à 18h 37′ 50″ à la pendule.

M. de Diziers l'a observée 4 secondes plus tard, & M. de Goimpy, comme moi; ils avoient chacun une lunette de 12 pieds, & moi une de 15 pieds.

Nous avons employé les mêmes lunettes pour les observations suivantes.

Vers la fin de l'observation il a passé un petit nuage rare, qui peut répandre sur l'observation un doute de 8 à 10″; il s'est dissipé à 37′ 58″, & certainement alors on ne voyoit plus le satellite.

Hauteurs correſpondantes du bord ſupérieur du Soleil, pour règler l'horloge.

Le 29 Décembre 1753.

Hauteurs.	*Le Matin.*	*Le Soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
23d 40′	9h 50′ 29″	2h 55′ 17″	24h 45′ 46″	0h 22′ 53″
24. 0	53. 5	52. 41	46	53
24. 20	55. 39	50. 0	39	49½
25. 0	10. 0. 59	45. 41	40	50

Midi moyen	0. 22. 51½
Équation	— 1½
Midi vrai	0. 22. 50
Midi vrai le 28	0. 23. 17
Différence	0. 27

Sur ce retardement de 27″, nous chercherons l'heure vraie de l'immerſion du 28 Décembre.

Le 28 Décembre.

Heure de l'immerſion à la pendule	18h 37′ 50″
Le 29 à midi, la pendule avançoit de	22. 50
Première correction	18. 15. 0
Le 28, à 18h elle avançoit plus qu'à midi, de	— 0. 6
Donc, heure vraie de l'immerſion, ſelon M. de Goimpy & moi	18. 14. 54
Selon M. de Diziers	18. 14. 58

Le 5 Janvier 1754.

2.° *Une occultation de l'étoile* g *des Hyades derrière le diſque de la Lune.*

Le *Zodiaque de Senex, que nous conſultions* tous les jours, nous apprit qu'une des étoiles voiſines de δ du Taureau ſe trouvoit, ce jour-là, fort proche de la Lune; nous en meſurames effectivement quelques diſtances avec le micromètre,

puis nous jugeames qu'elle seroit éclipsée; cela nous fit abandonner toute autre observation, pour nous attacher à déterminer exactement son immersion; nous y parvinmes, & à 9^h 13′ 54″, je la vis se cacher; M. de Goimpy & M. de Diziers la perdirent à 9^h 13′ 57″.

Nous attendimes en vain son émersion; des nuages nous la dérobèrent.

Elle étoit entrée sous le disque de la Lune, entre *Schikardus* & *Mare humorum.*

Nous avions chacun une lunette de 12 pieds, & l'air étoit tranquille.

Le 6 Janvier 1754.

3.° *Une Immersion du I.er satellite de Jupiter.*

Le ciel étoit pur, l'air calme, Jupiter & ses bandes paroissoient fort clairement; cette planète approchoit de son méridien.

M. de Diziers, avec une lunette de 12 pieds, a vu cette immersion à 14^h 24′ 23″; & moi avec une lunette de 15 pieds, je l'ai vue à 14^h 24′ 18″ de la pendule.

Recherche du temps vrai de ces deux Observations.

Ma pendule s'étoit arrêtée dans la nuit du 4 au 5 Janvier; cet accident lui arriva plusieurs fois dans la journée du 5. Enfin, jugeant que l'ébranlement de la maison qui nous servoit d'observatoire, pouvoit l'avoir mise hors de son échappement, je touchai à la vis de régie, & depuis ce moment elle a marché sans interruption. Ainsi pour connoître les temps vrais de ces deux observations, nous aurons recours aux hauteurs correspondantes prises les 6 & 7 Janvier, & pour plus d'exactitude, nous y ajouterons celles du 8 Janvier.

Hauteurs

Hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil.

Le 6 Janvier 1754.

Hauteurs.	*Le Matin.*	*Le Soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
23d 20′	9h 11′ 52″½	2h 30′ 47″½	23h 42′ 40″	11h 51′ 20″
24. 20	19. 24½	23. 17½	42	21
25. 40	29. 50½	12. 51½	42	21
26. 0	32. 34½	10. 7½	42	21

Midi moyen........................ 11. 51. 21
Équation........................ — 0. 5

Midi vrai........................ 11. 51. 16

Le 7 Janvier.

Hauteurs.	*Le Matin.*	*Le Soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
24d 0′	9h 13′ 38″½	2h 26′ 9″½	23h 41′ 48″	11h 50′ 54″
24. 20	18. 9½	23. 35½	45	52½
24. 40	20. 41½	21. 4½	46	53
25. 40	28. 29½	13. 14½	45	52½

Midi moyen........................ 11. 50. 53
Équation........................ — 0. 5

Midi vrai........................ 11. 50. 48
Midi vrai le 6........................ 11. 51. 16

Différence........................ 0. 28

Le 8 Janvier.

Hauteurs.	*Le Matin.*	*Le Soir.*	*Somme.*	*Moitié.*
24d 30	9h 18′ 4″½	2h 22′ 41″½	23h 40′ 46″	11h 50′ 23″
24. 40	19. 17½	21. 24½	42	21
25. 0	21. 49½	18. 52½	42	21
25. 10	23. 12½	17. 34½	47	23½

Midi moyen........................ 11. 50. 22
Équation........................ — 0. 4

Midi vrai........................	$11^h\ 50'\ 18''$
Midi vrai le 7........................	11. 50. 48
Différence........................	0. 30

Ce retardement eſt aſſez conforme à celui que l'on a remarqué précédemment, & nous nous en ſervirons pour déterminer les temps vrais de l'occultation de l'étoile & de l'immerſion du premier ſatellite de Jupiter.

Le 5 Janvier 1754.

Temps de l'occultation à la pendule..................	$9^h\ 13'\ 54''$
A midi, la pendule retardoit de..................	8. 16
A 9 heures elle retardoit plus qu'à midi de..........	0. $10\frac{3}{4}$
Donc, heure vraie de l'occultation de l'Étoile........	9. 22. $20\frac{3}{4}$

Le 6 Janvier.

Immerſion du premier ſatellite à la pendule..........	$14^h\ 24'\ 18''$
A midi la pendule retardoit de..................	8. 44
A l'heure de l'obſervation, elle avoit retardé de......	0. 17
Donc, heure vraie de l'immerſion du premier ſatellite..	14. 33. 19

Le 8 Janvier.

4.° *Une Immerſion du III.e Satellite dans l'ombre de Jupiter.*

Le ciel étoit ſerein, Jupiter & ſes bandes paroiſſoient à merveille; nous ſuivions parfaitement le troiſième ſatellite, dont la lumière fort affoiblie nous annonçoit qu'il alloit bientôt diſparoître.

Il étoit en cet état, & nous comptions $11^h\ 19'\ 52''$ à la pendule, quand il a paſſé un petit nuage, qui, ſans faire perdre la planète de vue, a ôté celle du ſatellite. À 11^h

20′ 16″, le nuage étoit diſſipé, & le ſatellite ne paroiſſoit plus. Nous avons eſtimé cette immerſion à $11^h\ 20'\ 2''$ de la pendule.

Malgré la circonſtance de ce petit nuage, qui paroît ôter de la confiance à cette obſervation, nous la produiſons, parce que nous ſommes ſûrs de ce que nous rapportons, & que par la comparaiſon que nous en faiſons, avec les obſervations que l'on nous a communiquées, nous trouvons la même différence en longitude que par nos autres obſervations.

Recherches du temps vrai de cette Obſervation.

Nous en déduiſons le temps vrai par des hauteurs correſpondantes du 8 & du 9 Janvier.

Le 9 Janvier 1754.

Hauteurs.	*Le matin.*	*Le ſoir.*	*Somme.*	*Moitié.*
$25^d\ 30'$	$9^h\ 24'\ 23''\frac{1}{2}$	$2^h\ 15'\ 19''\frac{1}{2}$	$23^h\ 39'\ 43''$	$11^h\ 49'\ 51''\frac{1}{2}$
25. 40	25. $37\frac{1}{2}$	14. $4\frac{1}{2}$	42	51
25. 50	26. $55\frac{1}{2}$	12. $45\frac{1}{2}$	42	51
26. 0	29. $35\frac{1}{2}$	10. $6\frac{1}{2}$	42	51

Midi moyen........................	$11^h\ 49'\ 51''$
Équation..........................	— 0. 5
Midi vrai.........................	11. 49. 46
Midi vrai le 8....................	11. 50. 18
Différence........................	0. 32

Le 8 Janvier.

Immerſion du III.ᵉ Satellite à la pendule........	11. 20. 2
A midi, la pendule retardoit de.................	9. 42
A l'heure de l'obſervation, elle avoit retardé de...	0. 16
Heure vraie de l'immerſion du III.ᵉ Satellite......	11. 30. 0

ARTICLE SEPTIÈME.

Détermination de la Longitude de Funchal, par les trois Immersions des satellites de Jupiter.

CES trois immersions n'ont point eu de correspondantes en Europe; mais le 1.er Janvier 1754, M. l'abbé de la Caille a observé à l'île de France une immersion du premier satellite de Jupiter à $12^h\ 7'\ 48''$, & une du troisième à $12^h\ 32'\ 46''$.

Comme ces observations ne sont éloignées que de peu de révolutions, de celles que nous avons faites à Funchal, il nous sera aisé de conclure la différence des méridiens entre cette ville & Paris, après nous être toutefois assurés de la longitude de l'île de France, par rapport à Paris.

Par un milieu entre neuf observations de M. l'abbé de la Caille, & sept faites par M. d'Après de Mannevillette, au même endroit, on trouve que l'île de France est située à $3^h\ 40'\ 35''$ à l'Orient du méridien de Paris.

Là-dessus on pourra conclure la détermination suivante: Nous tirerons des Tables de M. Wargentin, les révolutions du premier & du troisième satellite, dans l'intervalle compris entre les observations.

Le 28 Décembre 1753.

Immersion du I.er Satellite, observée à Funchal....		$18^h\ 14'\ 54''$
Ajoutant pour deux révolutions	3 jours...	12. 55. 5
L'immersion aura dû arriver à Funchal le 1.er Janvier à		7. 9. 59
Elle a été observée à l'île de France le 1.er Janvier à..		12. 7. 48
La différence entre l'île de France & Funchal sera...		4. 57. 49
La différence entre Paris & l'île de France est......		3. 40. 35
Donc, entre Funchal & Paris, elle sera..........		1. 17. 14

Le 1.er Janvier 1754.

Immerſion du I.er Satellite obſervée à l'île de France.	12h 7′ 48″
Ajoutant pour trois révolutions .... 5 jours...	7. 23. 3
L'immerſion aura dû arriver à l'île de France le 6 Janv. à	19. 30. 51
Elle a été obſervée à Funchal à..................	14. 33. 19
La différence entre Funchal & l'île de France, ſera...	4. 57. 32
La différence entre Paris & l'île de France eſt.......	3. 40. 35
Donc, entre Paris & Funchal, elle ſera...........	1. 16. 57
Immerſion du III.e Satellite obſervée à l'île de France.	12. 32. 46
Ajoutant pour une révolution......... 7 jours...	3. 54. 38
Elle aura dû arriver à l'île de France le 8 Janvier à....	16. 27. 24
Elle a été obſervée à Funchal le 8 Janvier à........	11. 30. 0
La différence entre Funchal & l'île de France, ſera...	4. 57. 24
La différence entre Paris & l'île de France eſt........	3. 40. 35
Donc, entre Paris & Funchal, elle ſera...........	1. 16. 49
La différence moyenne entre ces trois déterminations, ſera..................	1. 17. 3

ARTICLE HUITIÈME.

Détermination de la Longitude de Funchal, pour l'occultation de g du Taureau, derrière le diſque de la Lune, le 5 Janvier 1754.

Cette obſervation n'a point été faite à Paris, où cette Étoile ne devoit point être éclipſée; ſi les nuages ne nous avoient pas dérobé l'émerſion, nous euſſions pu trouver directement l'erreur des Tables en longitude & en latitude.

Mais le même jour, M. le Monnier a obſervé à Paris le paſſage du premier bord de la Lune au méridien à 8h 57′ 58″ temps vrai.

La hauteur du bord inférieur de la Lune étoit à 8h 59′ 4″, de 57d 59′ 32″ $\frac{1}{2}$, ſon diamètre étoit de 32′ 8″.

La Lune fut auſſi tout de ſuite comparée à Aldebaran, don l'aſcenſion droite apparente étoit 65d 27′ 35″.

Le lieu de l'étoile *g* avoit été exactement déterminé en 1751, par le même Astronome, sa longitude au moment de l'observation est de 64d 6′ 10″, & sa latitude de 3d 42′ 40″ australe.

Nous réduisons le temps vrai de l'observation en temps moyen, & nous avons 9h 28′ 33″. Si nous supposons une heure de différence de méridiens entre Paris & Funchal; nous aurons à Paris pour première hypothèse 10h 28′ 33″, & pour seconde hypothèse 10h 38′ 33″.

Nous faisons ensuite le calcul des parallaxes en longitude & en latitude, & nous trouvons pour chaque hypothèse, les élémens que nous allons donner.

	1.re Hypothèse.	2.e Hypothèse.
Heure moyenne de l'observation à Paris.	10h 28′ 33″	10h 38′ 33″
Temps moyen à Funchal..........	142d 8. 15	
Longitude moyenne du Soleil......	285. 23. 32	
Point de l'Équateur au Méridien.....	67. 32. 0	
Point culminant.................	69. 14. 0	
Angle de l'écliptique & du Méridien...	81. 14. 0	
Déclinaison du point culminant......	21. 52. 0	
Hauteur du point culminant.........	79. 15. 0	
Hauteur du nonagésime.............	70. 53. 0	
Longitude vraie de la Lune.........	63. 52. 8	63d 57′ 49″
Distance vraie au pôle de l'écliptique...	93. 17. 8	93. 17. 31
Distance de la Lune au nonagésime...	7. 1. 0	6. 56. 0
Parallaxe en longitude.............	0. 7. 1	0. 6. 56
Parallaxe en latitude..............	13. 49	13. 49
Longitude apparente de la Lune......	63. 45. 7	63. 50. 53
Latitude apparente de la Lune.......	3. 30. 57	3. 21. 20
Longitude de l'Étoile..............	64. 6. 10	64. 6. 10
Latitude de l'Étoile...............	3. 42. 40	3. 42. 40
Différence des longitudes apparentes...	0. 21. 3	15. 17
Différence des latitudes apparentes.....	0. 11. 41	11. 18
Donc, distance apparente..........	0. 24. 4½	19. 05

Nous dirons à présent 4′ 59″½, différence de 24′ 4″½ à

19′ 05″, sont à 10′ 0″ de temps, différence entre les deux hypothèses, comme 3′ 1″, différence entre le demi-diamètre de la Lune, & la distance apparente 19′ 05″ dans la seconde hypothèse, sont à 6′ 3″ que les deux luminaires avoient encore à parcourir pour être éloignés l'un de l'autre du demi-diamètre de la Lune.

En ajoutant ces 6′ 3″ à 10^h 38′ 33″, heure moyenne pour la seconde hypothèse à Paris, on aura 10^h 44′ 36″ pour heure moyenne dans cette ville, tandis que l'on comptoit à Funchal 9^h 28′ 33″, la différence des méridiens sera 1^h 16′ 3″; si l'on prend un milieu entre ce résultat & celui qui provient de la première observation du premier satellite, on aura 1^h 16′ 40″, dont Funchal est situé à l'occident du méridien de Paris, ce qui fait 19^d 10′ 0″.

ARTICLE NEUVIÈME.

Il ne nous resteroit plus rien à dire sur la position de l'île de Madère, si le P. Laval n'avoit publié en 1728, dans son Voyage à la Louisiane, des observations qu'il avoit faites en 1720 à Funchal, dans la maison des RR. PP. Jésuites.

Cet Astronome, *pages 21 & suiv.* fixa la latitude de son Observatoire à 32^d 37′ 53″; il étoit éloigné de cent cinquante toises du bord de la mer: nous en étions environ à trente toises, & nous avons conclu notre latitude de 32^d 37′ 40″. La différence entre nos deux résultats est trop légère pour en parler.

Il n'en est pas de même de la détermination de la longitude de Funchal; le P. Laval la conclud, *page 245*, de 1^h 7′ 45″; ce qui fait, entre lui & nous, 8′ 55″ de temps.

Il compare une émersion du premier Satellite qu'il a observée le 9 Avril à 9^h 6′ 32″, temps vrai, avec une émersion du même Satellite observée le 2 Avril à Paris à 8^h 17′ 37″, & avec une autre émersion du même Satellite observée à Marseille par le P. Feuillée, le 9 Avril 1720, à 10^h 26′ 49″.

La pendule du P. Laval, réglée le 8 Avril par une seule hauteur correspondante du bord supérieur du Soleil, pourroit

l'avoir induit en erreur. Mais ſans chercher les cauſes du défaut viſible de l'obſervation du P. Laval, nous nous contenterons de dire, que trois immerſions de ſatellites, & une occultation d'étoiles, faites par trois Obſervateurs à la fois, doivent donner à notre réſultat un degré de préciſion que ne peut avoir celui du P. Laval.

On ſait de plus que le méridien de l'île de Fer, paſſe à peu-près par celui de Madère; ſelon nos obſervations, Funchal ſera ſitué à $0^d\ 50'\ 0''$ à l'orient du méridien de l'île de Fer, ce qui doit être conforme à la poſition que lui avoient donnée nos meilleurs Géographes, ſans être encore guidés par les Obſervations aſtronomiques.



PREMIER
MÉMOIRE SUR L'INDE*,
PARTICULIÈREMENT
SUR QUELQUES POINTS DE L'ASTRONOMIE DES GENTILS TAMOULTS;
Sur Pondichery & ses environs.

Par M. LE GENTIL.

L'ASTRONOMIE des Brames & des Indiens Tamoults, qu'on peut appeler *Aſtronomie Indienne,* ne doit pas ſe confondre avec l'Aſtronomie Indienne des Siamois, dont M. Caſſini nous a donné les règles dans le *VIIIe Volume* des Mémoires de l'Académie; l'une eſt très-différente de l'autre, & les règles ne ſont pas les mêmes: je prie le Lecteur d'en voir la preuve dans la ſource elle-même; au reſte, l'Aſtronomie Indienne des Siamois, eſt un morceau très-bien fait, très-curieux & digne du grand Maître de qui nous le tenons.

Le ſéjour de vingt-trois mois que j'ai fait à Pondichéry, m'a fourni l'occaſion de prendre ſur l'Inde pluſieurs connoiſſances, que j'ai cru pouvoir piquer la curioſité des Européens; mais ſi ce que j'ai recueilli ſe réduit à peu de choſe, je puis au moins certifier la vérité des faits que je rapporte. Je dois me borner dans ce Mémoire à ceux qui ſont du reſſort de l'Académie.

Il eſt fort difficile à un Voyageur de ſe procurer dans l'Indoſtan, les éclairciſſemens qu'il deſire. Les Brames auxquels, comme mieux inſtruits que le reſte des Indiens, il eſt obligé d'avoir recours, ne ſe prêtent aux queſtions qu'on leur fait, que de la plus mauvaiſe grâce, accompagnée ſouvent de l'air du plus grand mépris, ce qui vient autant de leur ignorance

* Une partie de ce Mémoire a été lûe à la rentrée publique d'après Pâques, le 21 d'Avril 1773.

de l'état des Sciences en Europe, que de l'opinion qu'ils ont de l'antiquité de leurs connoissances, & de leur préjugé de religion. Il n'est pas jusqu'aux gens dont vous vous servez dans vos affaires, vos propres domestiques Gentils, qui n'aient pour vous, en vous tendant la main pour recevoir leur salaire, le plus souverain mépris.

Les Brames ont beaucoup de ressemblance avec ces Prêtres Égyptiens dont Strabon nous a laissé le portrait. « Un certain » Chœremon, dit-il, qui cultivoit l'Astronomie, ayant accom- » pagné le Commandant *Ælius-Gallus* dans son voyage en » Égypte, les Prêtres se moquèrent presque de lui, tant ils » étoient pétris d'ignorance & de présomption.

» On voyoit encore, continue Strabon, les maisons où » Eudoxe & Platon avoient tenu leur domicile; en effet, ces » deux Philosophes firent un voyage en Égypte, & furent en » commerce de société, pendant treize ans, avec les Prêtres » Égyptiens. Ceux-ci possédoient la science des Astres; mais » ils s'en réservoient le secret, & ne vouloient en aucune façon » communiquer leur savoir; cependant à force de patience, de » prières & de complaisances, nos Philosophes apprirent d'eux » quelques préceptes, mais ces barbares en cachèrent bien davantage. »

Les Brames ne sont guère plus communicatifs aux Étrangers que ne l'étoient les Prêtres Égyptiens; ils ont la même répugnance à faire des Élèves. Un Indien ou Gentil peut quitter son culte; il lui est libre, par exemple, de se faire Chrétien ou Mahométan; on se contente, pour toute punition, de l'exclure de sa caste ou tribu. Mais un Mahométan ou quelqu'autre habitant que ce soit, quelque religion qu'il professe, ne peut embrasser celle des Brames ou des Indiens; elle est exclusivement attachée à la naissance, c'est une espèce d'héritage; de sorte que pour être Gentil de religion, il faut être né Gentil.

On ne doit donc pas s'étonner si des gens nés, nourris & élevés dans ces principes, ne cherchent point à satisfaire

ceux que la curiofité porte à s'adreffer à eux pour s'inftruire de leurs mœurs, coutumes, cérémonies & religion.

Cette difficulté que j'entrevis dès le commencement de mon arrivée à Pondichéry, & que je trouvai en effet par la fuite, fait que je regarde encore l'Indoftan comme un pays bien neuf pour nous, & fort difficile à connoître. Il faudroit pour en avoir une connoiffance, telle que celle que le Chevalier Chardin nous a laiffée de la Perfe, y paffer un grand nombre d'années, & y dépenfer des fommes immenfes; car les Brames aiment beaucoup l'argent. Un feul homme même ne feroit pas fuffifant, & ne pourroit embraffer tout le pays; il faudroit que de favans Voyageurs fe difperfaffent dans différentes provinces, qu'ils agiffent de concert, qu'ils fuffent en correfpondance; fur-tout il feroit néceffaire qu'ils poffédaffent à fond la langue favante, pour lire les livres Indiens, autrement on ne recueillera jamais que très-peu de faits; encore reftera-t-il bien de l'incertitude.

Ces confidérations font caufe que j'ai mieux aimé ne mettre dans mes journaux que quelques faits fuffifamment avérés.

On fait que la prefqu'île en deçà du Gange qui fe termine au fud par le cap Comorin, a la côte de Coromandel, où eft fitué Pondichéry à l'orient, & la côte de Malabar à l'occident.

Les Indiens de ces deux côtes, font diftingués, comme tous les autres peuples de l'Indoftan, en différentes caftes ou tribus.

La côte de Coromandel eft habitée par les Tamoults ou Tamulaires en francifant le mot, quoique nous les confondions fouvent fous le nom de Malabars, avec les habitans de l'autre côte.

Les Tamoults fe difent tous originaires du Tanjaour & du Maduré; leur langue eft la même, & la langue des Malabars, qui font de l'autre côté de la prefqu'île, à l'oueft, eft tout-à-fait différente.

Les Tamoults fe font répandus le long de la côte du Carnate, & dans l'intérieur des terres; ils fe font même rendus

les maîtres du pays, & en ont en quelque ſorte aſſujetti les peuples, en les engageant par la force de la perſuaſion à quitter les bois où ils vivoient, diſent les Tamoults, à la manière des brutes. De cette façon les Tamoults ſont venus à bout de les tirer de leurs forêts, & de les civiliſer un peu; mais ils ſont malgré cela reſtés dans un état de mépris ſi grand aux yeux de leurs bienfaiteurs, qu'ils s'eſtimeroient peut-être plus heureux au fond de leurs forêts: ces gens font aujourd'hui partie de la Nation, & compoſent la plus baſſe & la plus vile caſte, connue ſous le nom de *Parias*, que l'on n'emploie que dans les plus vils travaux; elle ne peut ſe flatter de jamais ſortir de ſon état d'aviliſſement; les caſtes ſont immiſcibles.

Les Tamoults ſe diſent très-anciens à la côte du Carnate; ils adoroient anciennement un Dieu qu'ils nommoient *Baouth*, & ils m'ont aſſuré qu'il y a encore quelques Indiens qui, en ſe cachant, reconnoiſſent cette Divinité, & qui lui rendent leurs hommages.

Le Dieu *Baouht* a une ſi grande reſſemblance avec le Dieu *Sommonacodom* des Siamois, & le Dieu *Foë* des Chinois, qu'on ne peut guère douter que ce ne ſoit la même Divinité; c'eſt ce que nous aurons occaſion de vérifier dans la ſuite, comme auſſi d'examiner ſi les Indiens ont porté leur culte en Chine, ou ſi ce ne ſeroient point plutôt les Chinois qui étant venus commercer anciennement à la côte de Coromandel, en auroient emmené avec eux en Chine, le Dieu *Baouth*, comme l'aſſurent les Tamoults.

Les Tamoults aſſurent auſſi qu'ils tiennent des Brames l'Aſtronomie & leur religion actuelle, & que les Brames ſont venus de la partie du nord, dans le Tanjaour & le Maduré; mais ils ne peuvent dire, ni dans quel temps, ni de quelle partie préciſément du nord ils ſont venus. Ils ajoutent que c'eſt par leur éloquence & par leur auſtérité, que les Brames ſont venus à bout de renverſer le culte qu'on rendoit au Dieu *Baouth*, & de chaſſer ſes Miniſtres; nous ne parlerons ici que de leur Aſtronomie.

De l'Aſtronomie des Indiens Tamoults.

Selon les Tamoults, l'époque de l'arrivée des Brames dans le Maduré & le Tanjaour, n'eſt pas bien ancienne, mais ſelon eux une époque de mille ans eſt aſſez récente. Au reſte, ils ne diſent rien de cette époque ; ſeulement ils conviennent qu'il y eut une réforme dans l'Aſtronomie, ſous le règne d'un Roi, qu'ils nomment *Salivagena* ou *Salivaganam :* ce Roi *Salivaganam* eſt ſans doute le même dont parle M. Holwell, connu des Bengalis, ſous le nom de *Succadit ;* ſa mort fut une nouvelle époque pour les Gentils; il mourut, ſelon M. Holwell, l'an 79 de Jeſus-Chriſt. *(Évènemens Hiſtoriques, chap. IV, p. 24, édit. d'Amſterdam, 1768).*

Salivagena aimoit, dit-on, beaucoup l'Aſtronomie; cette ſcience prit tant de faveur ſous ſon règne, que l'époque de *Salivagena* eſt auſſi fameuſe dans l'Inde parmi les Tamoults, que celle de Nabonaſſar l'eſt chez les Chaldéens. Or, ſelon le calcul que m'en ont donné les Brames & les Tamouts en 1769, il y avoit alors ſeize cents quatre-vingt-onze ans que *Salivagena* étoit mort. La mort de ce Prince tomberoit donc l'an 78 de J. C. ce qui ſemble prouver que dès ce temps-là les Brames étoient dans cette partie de l'Inde, & qu'on y ſavoit déjà calculer les Éclipſes de Soleil & de Lune, dans un temps où le nord de l'Europe étoit encore plongé dans les ténèbres de l'ignorance & de la barbarie.

Mais quels progrès n'a pas faits depuis ce temps, l'Aſtronomie parmi nous, tandis que les Brames ſont aujourd'hui ce qu'ils étoient du temps de *Salivaganam,* il y a dix-ſept cents ans ! Et ſoit qu'on doive attribuer cette indolence à des cauſes phyſiques, telles que le climat; ſoit que des cauſes morales y aient part, il eſt certain que les Brames ne penſent point à étendre leurs connoiſſances, & tous ceux que j'ai vus, m'ont paru peu curieux de perfectionner leurs calculs, ne faiſant pour cet effet aucune obſervation aſtronomique, ni aucune autre eſpèce de recherche. Ils s'imaginent même que celles que nous faiſons chez eux ſont une ſuite de notre ignorance, & de ce

que nous venons pour nous inſtruire chez eux dans une ſcience que nous ne connoiſſons point en Europe.

Ils font leurs calculs aſtronomiques avec une vîteſſe & une facilité ſingulière, ſans plume & ſans crayon, ils y ſuppléent par des cauris (eſpèce de coquilles) qu'ils rangent ſur une table, comme nos jetons, & le plus ſouvent par terre.

Cette méthode de calculer m'a paru avoir ſon avantage, en ce qu'elle eſt bien plus prompte & plus expéditive que la nôtre, mais en même temps elle a un très-grand inconvénient; il n'y a pas moyen de revenir ſur ſes calculs, encore moins de les garder, puiſqu'on efface à meſure qu'on avance. Si on s'eſt, par malheur, trompé dans le réſultat, il faut recommencer ſur nouveaux frais.

Mais il eſt bien rare qu'ils ſe trompent. Ils travaillent avec un ſang-froid ſingulier, un flegme & une tranquillité dont nous ſommes incapables, & qui les mettent à couvert des mépriſes que nous autres Européens ne manquerions pas de faire à leur place: il ſemble donc que nous devons, les uns & les autres, garder chacun notre méthode; il ſemble que la leur ait été faite uniquement pour eux.

Leurs règles de calculs aſtronomiques ſont en vers énigmatiques qu'ils ſavent par cœur; par ce moyen ils n'ont pas beſoin de tables de préceptes. Au moyen de ces vers qu'on leur voit réciter (comme nous faiſons nos formules) à meſure qu'ils calculent, & au moyen de leurs cauris, ils font les calculs des Éclipſes de Soleil & de Lune avec la plus grande promptitude.

Cet uſage d'Aſtronomie théori-pratique, réduite en vers, eſt ſans doute une ſuite de la molleſſe naturelle à ce climat, qui eſt ſi chaud, qu'il agit ſur les fonctions du corps & de l'ame, en mettant l'un & l'autre dans une ſorte d'anéantiſſement qui les rend incapables d'une trop longue application. C'eſt, ſans doute, dis-je, par cette raiſon, que les Brames, pour plus de facilité, & pour ſe moins fatiguer l'eſprit (les vers ſe retenant facilement) ſe ſont fait cette méthode. Peut-être auſſi ont-ils eu leur intérêt en cela, qui eſt d'avoir une

langue énigmatique qui ſoit ignorée du reſte du monde, ou pour le moins, entendue de peu de perſonnes; & comme avec cela ils ſont les Miniſtres de la Religion & des Princes, il eſt aiſé de ſe figurer toute l'étendue du pouvoir de cette caſte ſur les peuples.

Leurs Tables du Soleil & de la Lune ſont cependant écrites ſur des feuilles de palmier, toutes taillées fort proprement, de la même grandeur: ils en font de petits livrets auxquels ils ont recours quand ils veulent calculer une Éclipſe; ils ſe ſervent alors d'un petit ſtylet ou poinçon, avec lequel ils tracent ſur ces feuilles tous les caractères qu'ils veulent. Ce poinçon forme un trait léger mais apparent, en déchirant la pellicule légère qui recouvre la feuille.

Ce que j'ai pu apprendre de l'Aſtronomie des Brames ſe réduit à cinq points principaux.

L'uſage du gnomon, la longueur de l'année, la préceſſion des équinoxes, la diviſion du Zodiaque en vingt-ſept conſtellations, & le calcul des Éclipſes de Soleil & de Lune.

De l'uſage du Gnomon chez les Brames.

La première choſe que j'ai remarquée dans l'Aſtronomie des Brames, eſt l'uſage du gnomon: cet uſage leur eſt une des plus anciennes pratiques de l'Aſtronomie; on ne peut pas même ſe figurer que ceux qui les premiers ont travaillé à l'Aſtronomie ſolaire, & à régler par conſéquent la longueur de l'année, ne ſe ſoient ſervis des ombres méridiennes des corps; car c'eſt le ſigne le plus apparent & le plus frappant du mouvement du Soleil vers l'un & l'autre pôle.

Les Chaldéens, long-temps avant les Grecs, obſervoient avec le gnomon. On peut voir ce que dit à ce ſujet Hérodote dans ſon Euterpe; mais Hérodote ne nous apprend point comment ils s'en ſervoient; & quoique tout le monde ſache ce qu'on entend par gnomon, il y a dans la façon de s'en ſervir par les Brames, quelques circonſtances dignes de curioſité, qui peuvent nous donner une idée de la manière dont les Chaldéens faiſoient uſage du gnomon; car il y a

bien de l'apparence que les Brames de nos jours tirent leurs connoiſſances aſtronomiques des anciens Bracmanes, & ceux-ci des Chaldéens.

Le gnomon ſert aux Brames à tracer la ligne méridienne, à orienter leurs pagodes, & enfin à trouver de combien la longueur d'un jour quelconque de l'année, pris hors des équinoxes, excède la durée du jour de l'équinoxe, ou eſt plus petit que ce même jour.

Ces Aſtronomes ne font leur opération du gnomon que le jour de l'équinoxe. Voici quelle eſt leur méthode.

Ils diſent que le jour de l'équinoxe le Soleil eſt au milieu du monde; & que là où eſt cet Aſtre, les corps ne font point d'ombre. Ils cherchent donc le jour que le Soleil a douze ſignes, ou o ſignes (nous enſeignerons ce calcul, *ſection II, article 1.*er du calcul des Éclipſes de Soleil). Ce calcul une fois fait, on égaliſe (dit la méthode) un terrein, & on le met de niveau. Au milieu, on plante à plomb une règle ou perche quelconque, dont la longueur eſt arbitraire, mais qui doit être diviſée depuis le terrein juſqu'au ſommet, en douze parties égales qu'on nomme *angoulam*, (c'eſt-à-dire ongles, pouces ou lignes) & chacun de ces pouces eſt ſubdiviſé en ſoixante parties qu'on nomme *chevi-angoulam*, (ſeconds pouces); on obſerve enſuite la plus petite ombre du Soleil, & on meſure la longueur de cette ombre en parties du gnomon qui ſert d'échelle.

Cette longueur de l'ombre du gnomon, pour un lieu donné, ſera toujours la même, diſent les Brames, pour le lieu où elle aura été une fois obſervée.

Lorſque les Brames veulent bâtir une pagode, & que la Divinité à laquelle cette pagode doit être dédiée, leur a fait révéler ſes ordres, & l'endroit qu'elle affectionne plus particulièrement, ils emploient l'opération du gnomon; pour lors ils décrivent de ſon pied un cercle, & par le moyen de deux points d'ombre ils tracent une ligne méridienne qui ſert à orienter la pagode & les pyramides dont elle eſt ornée.

Dans

Dans toutes les pagodes, l'édifice eſt une eſpèce de quarré dont les côtés regardent les quatre parties du monde.

Les pyramides des pagodes ſont en général des morceaux curieux, quoique d'une architecture bizarre aux yeux d'un Européen : elles ſont fort élevées, dans la forme de celles d'Égypte, ſurchargées d'ornemens dans le goût de ceux de nos égliſes gothiques; & elles ſervent de portail & d'entrée au temple. Je me ſuis donné la peine de meſurer & de prendre la direction de celle de Vilnour, petite ville Indienne à deux lieues à l'oueſt de Pondichéry ; j'ai trouvé que les quatre faces de ces pyramides regardoient exactement les quatre points cardinaux.

On me demandera ſi les Brames corrigent la Méridienne, à cauſe du changement du Soleil en déclinaiſon dans l'intervalle de temps des deux points d'ombre, pris le matin & le ſoir, ſur-tout le jour de l'Équinoxe.

Les Brames, il eſt vrai, ne font point cette correction; ils ne la connoiſſent même pas. Au reſte, cette correction, calculée pour la latitude de Pondichéry, pour le jour de l'Équinoxe, & pour 7 heures environ d'intervalle du matin au ſoir, eſt tout au plus de $3'' \frac{1}{2}$, quantité trop petite pour être aperçue ſans quart-de-cercle; ce qui fait même une exactitude bien ſuffiſante dans une infinité de cas.

J'ai dit que l'obſervation de la longueur de l'ombre du gnomon, ſervoit aux Brames à calculer la différence aſcenſionnelle; & voici leur procédé.

Ils ſavent, par exemple, qu'à Tirvalour, ville de la dépendance du roi de Tanjaour, à trente lieues au plus dans le ſud de Pondichéry, cinq lieues à l'oueſt de Negapatnam, la longueur de l'ombre du gnomon, eſt, le jour de l'équinoxe, de 144 parties, dont le gnomon en contient 720; ils multiplient 144 par 20, & diviſant le produit 2880 par 60, ils trouvent 48 minutes d'heure; c'eſt ce qu'ils appellent *adi-chara-vinady*.

Ils partagent après cela l'*adi-chara-vinady*, en cinq parties;

ils prennent quatre de ces parties que l'on nomme *maddhia-chara-vinady*; il sera, dans cet exemple, 38′ $\frac{2}{5}$.

Enfin le tiers de l'*adi-chara-vinady*, ou de 48 minutes, donnera 16 minutes; ce qu'ils appellent l'*antia-chara-vinady*.

Ils retiennent ces trois nombres, & ils les arrangent dans leur mémoire, de façon que le premier nombre 48 répond au premier signe; le second nombre 38 $\frac{2}{5}$ au second signe; & 16 au troisième signe, comme dans la Table suivante.

TABLE INDIENNE de la différence ascensionnelle, ou bien, valeur des signes de Bouja.

SIGNES.	MINUTES D'HEURE.
0.	00.
1.	48.
2.	38.
3.	16.

Cette opération étant faite, lorsqu'on veut avoir le temps de la demeure du Soleil sur l'horizon, pour un jour donné, on calcule la longitude du Soleil pour ledit jour, & on prend sa distance à l'Équinoxe; cette distance s'appelle *le Bouja*, & sert d'argument pour trouver, avec le secours de la Table précédente, la différence du jour proposé, avec le jour de l'Équinoxe.

Si l'argument est moindre qu'un signe, on calcule la partie proportionnelle, en prenant 48 minutes pour différence de 0 signe à un signe. Et si l'argument est un signe juste, on prend 48 minutes, on ajoute cette différence à 30 heures, depuis le 12 Mars Indien jusqu'au 12 Septembre; on la soustrait, au contraire, depuis le 12 Septembre jusqu'au 12 Mars, lorsque l'ombre du bâton (Gnomon) est tournée du côté du nord; car si l'ombre du bâton étoit tournée au sud, ce seroit tout le contraire.

Si l'argument eſt de deux ſignes, on ajoute enſemble les deux différences qui répondent à 1ˢ & à 2ˢ, & ſi l'argument eſt entre le premier & le ſecond ſigne, on calcule la partie proportionnelle, en prenant $38'\frac{2}{5}$ pour différence du ſecond ſigne, & on ajoute cette partie proportionnelle à 48 minutes; on opère de même pour trois ſignes.

Les obſervations des Brames ſe réduiſent à ce que nous venons de voir; cette opération leur eſt indiſpenſable, puiſqu'elle entre dans le calcul des Éclipſes de Soleil & de Lune.

Par exemple, dans l'Éclipſe du 17 Octobre 1762, dont nous donnerons le calcul ci-après, le vrai temps de la conjonction de la Lune au Soleil, ſelon les Tables Indiennes, fut à $21^h\ 48'\ 30''$, à compter du lever du Soleil; la longitude du Soleil, & celle de la Lune étoient alors de $6^s\ 22^d\ 34'\ 59''$; la diſtance du Soleil à l'équinoxe le plus proche eſt donc $22^d\ 34'\ 59''$. Je dis, un ſigne ou 30 degrés eſt à 48 minutes, comme $22^d\ 34'\ 59''$, ſont à un quatrième terme qui ſera $36'\ 8''$: ôtant ce quatrième terme de 30 heures qui expriment la durée du jour de l'équinoxe, on aura $29^h\ 23'\ 52''$ pour la demeure du Soleil ſur l'horizon de Tirvalour, le 17 d'Octobre.

Ce que je viens de dire que les Brames avoient pratiqué pour Tirvalour, ils l'ont fait pour un grand nombre d'autres villes de l'Inde. La Table ſuivante indique quelques-unes de ces villes, avec la longueur de l'ombre du gnomon, telles qu'elles m'ont été communiquées par le Brame établi à Tirvalour; la longueur du gnomon étant ſuppoſée de 12 doigts ou 720 parties.

	Doigts.
Maduré	$2\frac{14}{60}$.
Tirvalour	2,24.
Cangivaron	2,52.
Caleſti	3,00.
Sericeylam	3,30.
Ouchilipatnam	5,20.

Il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût recueillir un grand nombre

de ces obſervations; ce ſeroit ſans doute un bon moyen, en y joignant de bons itinéraires, de faire une Carte de l'Indoſtan, meilleure que tout ce que nous avons encore ſur ce pays; car, de s'en rapporter uniquement aux Itinéraires, pour un auſſi vaſte pays que l'Indoſtan, & où cent lieues ne ſont, pour ainſi dire, qu'un point dans une ligne, il ne faudroit pas que je fuſſe au fait de la façon dont on eſtime les Itinéraires, pour y ajouter foi. Je crois être en état d'avancer qu'il n'a pas encore paru une Carte exacte de l'Inde. Où pourrions-nous en effet trouver cette Carte ? Dans Strabon & dans Ptolémée : écoutons ce que Strabon nous dit au ſujet de la connoiſſance que les Romains avoient alors de l'Inde.

« L'Inde, dit Strabon, dans l'argument du *livre XV de ſa* » *Géographie*, eſt fort loin d'ici, & peu de Romains l'ont vue; » ceux qui y ont été n'en ont vu qu'une partie, & rapportent » preſque tout par ouï-dire; ce qu'ils ont vu, ils ne l'ont vu » qu'en courant & à la façon des militaires. Par cette raiſon, » ils ne rapportent pas la même choſe des mêmes lieux, quoi- » qu'ils aient écrit ſur l'Inde, comme ſur des choſes vues & » examinées avec ſoin. Il y en a d'autres, continue Strabon, » qui pour s'être trouvés dans la même expédition, tels que » ceux qui ont accompagné Alexandre dans ſa conquête de » l'Inde, n'en ſont pas moins contradictoires dans les faits qu'ils rapportent ».

L'Inde étoit donc fort mal connue du temps de Strabon; & ſe perſuadera-t-on que Ptolémée la connût bien mieux ?

La carte de l'Inde de Guillaume de l'Iſle, publiée en 1705, eſt, ſans nulle difficulté, la meilleure qui eût encore paru. Depuis ce célèbre Géographe, la Géographie n'a fait aucuns progrès dans cette partie. . . . .

Les dernières guerres de l'Indoſtan, commencées ſous M. Dupleix, nous ont, à la vérité, procuré des Cartes géographiques de quelques parties de l'Inde; mais je doute que ces cartes ſoient plus exactes que celle de Guillaume de l'Iſle: j'ai vu à Pondichéry une de ces cartes qui avoit été faite ſur des Mémoires & Journaux qu'avoit procurés l'expédition,

envoyée dans le Décan, par M. Dupleix. Cette carte avoit été faite dans le goût de celles dont parle Strabon. J'étois ſur le point de me procurer une copie de celle dont je parle: je crus inutile de me charger d'un pareil ouvrage pour le montrer en France, lorſque j'eus découvert les fondemens qui avoient ſervi à conſtruire cette carte. Je fus inſtruit de fort bonne part, que lorſque les différens points marqués dans le Journal, & ceux ſûs par des ouï-dire (comme parle Strabon) furent placés, il reſta vers le milieu de la carte un grand eſpace vide à remplir, qu'on ne put boucher faute de matériaux; il auroit fallu, pour le faire, une province auſſi grande que la Picardie ou la Normandie. L'auteur qui ne s'attendoit pas à cela, fut obligé de faire prêter les points de ſa carte, & d'étendre leur diſtance reſpective. C'eſt donc de notre temps, à peu-près comme du temps de Strabon; & peut-on ſe figurer qu'une carte de l'Inde, faite par les itinéraires, ſoit bonne, quand on ſait la manière dont on compte ces itinéraires?

On eſt aſſis, & le plus ſouvent couché dans ſon palanquin, & porté par des Bouées, qui tantôt vont vîte, tantôt lentement, & ſe repoſent de temps en temps: on ſuppoſe cependant que ces Bouées font un certain nombre de coſſes par heure.

Lorſqu'on ſe met en route on s'endort bientôt, ſur-tout ſi c'eſt l'après-dînée, car rien n'y porte davantage que la chaleur du pays, ſouvent aidée & favoriſée du repas & du mouvement du palanquin; on croit, malgré cela, ſavoir, lorſqu'on eſt arrivé, la quantité de coſſes que l'on a faits, ſoit par le moyen de ſa montre, ſoit en s'en rapportant à ſes Bouées, ou aux gens de l'endroit où on s'arrête; mais tout cela peut-il donner une bonne diſtance reſpective? Sans compter que les coſſes ſont des meſures qui varient autant & plus que ne le font nos lieues, peut-on ſe flatter, au bout de quarante ou de cinquante journées de marche de cette eſpèce, d'avoir la poſition exacte des deux points extrêmes de ſa route? C'eſt ainſi que fut faite la carte que je vis, qui alloit de Pondichéry à Aurengabad.

Je sais que l'on m'objectera que la carte de M. de l'Isle, dont je viens de parler, doit être sujette aux mêmes défauts à peu-près que cette carte que j'ai vue. Je ne peux pas disconvenir que M. de l'Isle a dû se servir de l'estime qu'il aura trouvée, ou dans les Voyageurs, ou qu'il aura eue par des correspondances dans l'Inde, &c. mais ce célèbre Géographe étoit doué d'une sagacité unique pour combiner ensemble les différens matériaux dont il vouloit composer une carte; il avoit des ressources que nous ne connoissons pas. Ce qu'il y a de vrai, c'est que sa carte de l'Inde, & celle de la côte de Coromandel, est encore la meilleure que je connoisse, malgré ses défauts. Je conseillerois donc de s'en tenir à cette carte, & d'en corriger les points à mesure qu'on en découvrira de défectueux.

Je n'entends parler ici que de l'intérieur de l'Inde: nous avons exactement le gisement de toutes les côtes de cette vaste péninsule, & la position géographique de presque tous les principaux points de ces côtes. Les cartes marines de M. d'Après sont ce que je connois de plus correct en ce genre.

Remarques sur les Observations des Brames.

Je trouve qu'il y auroit trois corrections à faire aux Observations des Brames si on vouloit les employer avec quelque succès.

La première vient de la fausse supposition qu'ils font; savoir que le Soleil, le jour de l'équinoxe, est au milieu du monde; ce qui n'est pas exactement vrai. Le Soleil n'est véritablement au milieu du monde, à l'instant de midi, pour un lieu donné, que lorsque l'équinoxe arrive à midi compté au Méridien du lieu donné: alors les corps ne font point d'ombre, là où est le Soleil.

Il est cependant vrai que l'erreur sur le moment où arrive l'équinoxe, en peut à peine causer une de 10 à 11 minutes dans la hauteur du Soleil; ce qui ne fait que trois lieues ou trois lieues & demie d'incertitude sur le lieu.

La seconde correction vient de la réfraction; mais elle

eſt preſque inſenſible ici ; puiſqu'elle va à peine à 45 ſecondes de degré pour les provinces ſeptentrionales de l'Indoſtan : pour le Décan & les autres provinces méridionales de la Péninſule, la réfraction eſt au-deſſous de 30 ſecondes.

La troiſième correction ſeroit peut-être la plus conſidérable ; mais il eſt fort difficile de l'apprécier : elle conſiſte dans l'erreur de l'obſervation.

Il eſt certain que les Anciens trouvoient les ombres des corps, trop grandes de beaucoup. Il ſuffit, pour s'en convaincre, d'ouvrir Strabon ; on verra que les latitudes déduites des obſervations du gnomon, ſuppoſent toutes que l'on a obſervé les ombres trop grandes ; & cela provient, comme l'on ſait, de ce qu'il eſt impoſſible de diſcerner le terme de l'ombre & de la lumière ; mais auſſi les Anciens péchoient par le même excès dans toutes les obſervations, & ces obſervations donnent aſſez bien les différences en latitude. En rectifiant donc la latitude d'un des lieux obſervés, on peut avoir avec une préciſion aſſez approchée, & preſque ſuffiſante pour la Géographie, la poſition des autres points.

Voilà comme j'entends que les obſervations des Brames, faites dans l'Inde avec le gnomon, & recueillies en aſſez grand nombre, contribueroient à rectifier la carte de l'Inde.

C'eſt auſſi de cette façon que j'ai établi la latitude des ſix villes dont le Brame de Tirvalour m'a donné les Obſervations que j'ai rapportées plus haut.

J'ai calculé premièrement la différence en latitude de ces villes, comme l'on voit ci-après :

Maduré	
Tirvalour	0d 45′ 59″
Cangivaron	2. 7. 35.
Caleſti	0. 36. 3.
Sericeylam	2. 11. 26.
Ouchilipatnam	7. 42. 8.

J'ai pris enſuite Cangivaron pour exemple. Cette ville, de la dépendance du Carnate, eſt entre Pondichéry &

Madraſpatnam, ſa diſtance à l'une & à l'autre de ces deux villes eſt très-connue, ſur-tout depuis la dernière guerre. Les Ingénieurs qui ont ſervi dans cette guerre, m'ont unanimement aſſuré, que de Pondichéry à Cangivaron, on compte en droite ligne, dix-huit lieues; de Cangivaron à Madraſpatnam, dix-ſept; & qu'enfin de Cangivaron au bord de la mer, en ligne droite, on comptoit onze lieues & demie.

Ces diſtances reſpectives ſont aſſez petites pour ne pas craindre des erreurs bien grandes; pour calculer la latitude de Cangivaron, d'après ces ſuppoſitions, on fera attention au giſement de la côte, parce que Madraſpatnam & Pondichéry, quoique placés ſur le bord de la mer, ne ſont pas pour cela ſous le même méridien. La côte à Pondichéry fait avec le méridien un angle de $33^d\ 45'$ à l'eſt.

Ces principes une fois établis, je trouve que la diſtance de Pondichéry au pied de la perpendiculaire, tirée de Cangivaron au bord de la mer, eſt de $41'\ \frac{4}{10}$.ᵉˢ; l'angle à Pondichéry, entre Cangivaron & la Méridienne, de $5^d\ 19'\ \frac{1}{2}$ à l'eſt.

CANGIVARON.

La diſtance à l'Eſt de la Méridienne étoit de....	0^d	$5'$	$\frac{1}{10}$
La diſtance à la perpendiculaire au nord, de.....	0.	53.	$\frac{8}{10}$
J'ai obſervé la latitude à Pondichéry, de........	11.	56.	0.
y ajoutant........................	0.	53.	48.
On a pour la latitude de Cangivaron..........	12.	49.	48.
Selon M. de l'Iſle......................	12.	56.	0.
Selon M. d'Anville......................	13.	0.	0.

MADURÉ.

Selon l'obſervation des Brames...............	9.	56.	0.
Selon M. de l'Iſle......................	9.	56.	0.
Selon M. d'Anville......................	9.	59.	0.

TIRVALOUR.

Selon l'obſervation des Brames...............	10.	42.	13.
Selon M. de l'Iſle......................	11.	0.	0.

La Carte

La Carte de M. de l'Isle est défectueuse en ce point, en ce qu'il met Tirvalour à l'ouest de Tranguebar ; mais cette ville est à l'ouest de Negapatnam, c'est-à-dire, sept lieues environ plus au nord que Tranguebar. Je ne trouve point Tirvalour sur la Carte de M. d'Anville.

Selon M. Daprès, la latitude de Negapatnam est de $10^d\ 30'$; Tirvalour est de quelques minutes plus nord que Negaptnam.

Cet accord est bien suffisant pour justifier ce que j'ai avancé plus haut, qu'on pourroit parvenir à rectifier la Carte de l'Indostan, si on pouvoit joindre à de bons Itinéraires, les observations de la longueur de l'ombre du gnomon, faites par les Brames dans les endroits où ils sont établis.

Les trois villes suivantes ont été calculées selon la même méthode; elles ne sont sur aucune de nos Cartes françoises, je n'ai par conséquent pu les comparer.

Calesty	$13^d\ 25'\ 51''$
Sericeylam	15. 37. 17.
Ouchilipatnam	23. 19. 25.

De la longueur de l'Année selon les Brames; de la division qu'ils assignent au jour Astronomique; des Mois & des Jours.

Après avoir parlé de l'usage du gnomon chez les Brames, il me semble naturel de passer à la longueur de l'année, à la division du jour astronomique, des mois & des jours; c'est la seconde chose que j'envisage dans l'Astronomie Indienne.

L'année des Brames est solaire, & de $365^j\ 15^h\ 31'\ 15''$ *; ils comptent le jour astronomique d'un lever du Soleil à l'autre lever, & ils divisent cet intervalle en soixante parties qu'ils appellent *heures;* dans l'heure ils comptent soixante minutes, & dans la minute, soixante secondes ou *clins-d'œil*.

* Je parle d'heures, de minutes & secondes Indiennes.

Ils nomment la minute, dans leur langue, *veinary*, & la seconde *taiparc*. Donc les $15^h\ 31'\ 15''$, dont la longueur de l'année excède, selon les Brames, 365 jours, se réduisent à $6^h\ 12'\ 30''$ Européennes; c'est ce que nous pouvons appeler *l'année sydérale des Brames;* mais parce que les Étoiles avancent, selon eux, de 54 secondes tous les ans, d'occident en orient, on trouve (en supposant encore avec eux le mouvement journalier du Soleil d'un degré) qu'il faut ôter $21'\ 36''$, pour avoir ce que nous appelons l'*année tropique* ou *équinoxiale* de $365^j\ 5^h\ 50'\ 54''$.

Cette détermination est de deux minutes seulement plus grande que celle que les Astronomes admettent aujourd'hui pour la longueur de l'année; mais elle est plus petite de $4'\frac{1}{2}$, ou environ, que celle d'Hipparque adoptée par Ptolémée, qui supposoit l'année beaucoup trop longue. Par conséquent les anciens Brames connoissoient la longueur de l'année solaire, beaucoup mieux que ne l'ont connue Hipparque & Ptolémée.

Les Brames partagent l'année, ou les $365^j\ 15^h\ 31'\ 15''$ dont elle est composée selon eux, en douze mois; de façon que le mois d'Avril, ou celui qui y répond, est le premier mois de l'année astronomique des Indiens.

Ces mois n'ont pas tous la même durée; le mois de Juin est le plus long de tous, & le mois de Décembre le plus court.

Juin a....................	$31^j\ 36^h\ 38'$
Décembre..................	29. 20. 53.
Ce qui fait de différence......	2. 15. 45.

Cette différence suppose que les Astronomes qui les premiers ont travaillé à cette méthode Indienne, ont connu l'apogée & le périgée du Soleil; c'est-à-dire, qu'ils ont remarqué que le Soleil retardoit son mouvement dans le mois de Juin, & qu'il l'accéléroit au contraire pendant le mois de Décembre; qu'il employoit par conséquent plus de temps à parcourir le signe des Gémeaux que celui du Sagittaire.

La longueur des autres mois eſt en proportion de celle des mois de Juin & de Décembre, ou comme le temps que le Soleil met à parcourir les autres ſignes du Zodiaque.

TABLE I.[ere] *De la durée que les Brames donnent à chaque mois, & à chaque ſigne du Zodiaque.*

			J.	H.	M.	S.
Sittirey........	Avril..........	♈	30.	55.	32.	0.
Vayaſçy........	Mai..........	♉	31.	24.	12.	0.
Any..........	Juin..........	♊	31.	36.	38.	0.
Ady..........	Juillet..........	♋	31.	28.	12.	0.
Avany........	Août..........	♌	31.	2.	10.	0.
Pivattaſſy......	Septembre......	♍	30.	27.	22.	0.
Arbaſſy........	Octobre........	♎	29.	54.	7.	0.
Cartiguey......	Novembre......	♏	29.	30.	24.	0.
Margajy......	Décembre......	♐	29.	20.	53.	0.
Tay..........	Janvier........	♑	29.	27.	16.	0.
Maſcy........	Février........	♒	29.	48.	24.	0.
Pangouny.....	Mars..........	♓	30.	20.	21.	15.
Durée des douze mois..............			365.	15.	31.	15.

TABLE II. *De la ſomme des Mois complets pour trouver le commencement de chaque Mois.*

SIGNES.	MOIS.	J.	H.	M.	S.
♈	Avril.				
♉	Mai.	30.	55.	32.	0.
♊	Juin.	62.	19.	44.	0.
♋	Juillet.	93.	56.	22.	0.
♌	Août.	125.	24.	34.	0.
♍	Septembre.	156.	26.	44.	0.
♎	Octobre.	186.	54.	6.	0.
♏	Novembre.	216.	48.	13.	0.
♐	Décembre.	246.	18.	37.	0.
♑	Janvier.	275.	39.	30.	0.
♒	Février.	305.	6.	46.	0.
♓	Mars.	334.	55.	10.	0.
♈	Avril.	365.	15.	31.	15.

La ſemaine des Brames comprend ſept jours; mais il faut remarquer que dans leur langue, ils n'ont point de termes pour exprimer le mot *Semaine.* Ils comptent les jours du mois par les ſept Planètes; & d'une manière aſſez ſingulière; car ils commencent par Vénus, de Vénus ils paſſent à Saturne, de Saturne au Soleil, &c.

Ils ſuppoſent un zéro à Vénus, à Saturne l'unité, le nombre deux au Soleil, &c. comme l'on voit dans la Table ſuivante.

TABLE des Jours de la Semaine, ſelon les Brames.

Soucra-varam.	Jour de Vénus. . .	Vendredi.	0.
Sany-varam.	Jour de Saturne. . .	Samedi.	1.
Aditta-varam	Jour du Soleil. . . .	Dimanche.	2.
Soma-varam.	Jour de la Lune. . .	Lundi.	3.
Mangala-varam. . . .	Jour de Mars.	Mardi.	4.
Bouta-varam.	Jour de Mercure. . .	Mercredi.	5.
Brahaſpati-varam. . .	Jour de Jupiter . . .	Jeudi.	6.

Cette diſpoſition eſt indiſpenſable aux Brames pour leurs calculs, comme nous le verrons ci-après.

Selon les Interprètes dont je me ſuis ſervi, le jour de Vénus répond à notre vendredi.



SUITE DU PREMIER
MÉMOIRE SUR L'INDE.

Par M. LE GENTIL.

De la Durée du Monde & de ſes différens âges ſelon les Brâmes; de la Préceſſion des Équinoxes, & des Époques qui ſervent à calculer les mouvemens du Soleil & de la Lune.

VOICI ce que diſent les Brames. Ils aſſurent que le monde doit durer 4 millions 320 mille ans, dont il y avoit déjà 3 millions 897 mille 870 ans d'écoulés en 1762. Ils partagent la durée du monde en quatre âges.

Le premier a commencé à la création, & a duré 1 million 728 mille ans. Ils l'appellent l'*âge d'innocence.*

Le ſecond a duré un quart de moins que le premier; ſavoir, 1 million 296 mille ans.

Le troiſième a duré un tiers de moins que le ſecond; ſavoir 864 mille ans.

Enfin, le quatrième eſt celui dans lequel nous vivons; il ne durera que la moitié du troiſième; ſavoir, 432 mille ans. Ils l'appellent l'*âge d'infortune*, ou *calyougan*, de *caly*, époque, & de *ougan*, infortune. En 1762, le quatrième âge ne comptoit encore que 4 mille 863 ans. Il lui reſtoit de durée 427 mille 137 ans.

Les Brames ont grand ſoin d'endormir les peuples avec ces préjugés, & de les inſinuer aux enfans dans les écoles.

Ces différens âges ſont rapportés de même dans M.rs l'abbé Bannier & le Maſcrier (*6.e vol.* des Cérémonies Religieuſes) & dans la grammaire Tamulaire du P. Conſtance-Joſeph

Beſchio, Jéſuite Italien, Miſſionnaire, imprimée à Tranguebar en 1728, de laquelle j'ai apporté un exemplaire.

Ces Auteurs traitent ces nombres de rêveries, de contes & de fables: ils ont certainement raiſon, quant à ce qui regarde la durée du monde; mais ils n'ont trouvé, ni les uns, ni les autres, la ſolution de ces nombres, qui ſervent cependant d'époque aux Brames, généralement pour tous leurs calculs aſtronomiques.

Cette prétendue durée du monde, & celle de ſes différens âges, me parurent auſſi, dans les commencemens, ſi groſſièrement forgées, & les nombres tellement employés au haſard, que je fus quelque temps ſans daigner me donner la peine d'examiner d'où ils pouvoient provenir. Le maître que j'avois pris me les rappelant ſouvent en faveur du ſyſtème des Indiens ſur leur antiquité, je me rappelai de mon côté que dans les calculs que j'avois faits ſous ſes yeux, des Éclipſes du Soleil, il m'avoit fait ſuppoſer un mouvement dans les Étoiles, de 54 ſecondes par an; je ſoupçonnai dès-lors que tous ces âges pouvoient bien être un certain nombre de révolutions de l'équinoxe. Je ne fus pas long-temps à m'en aſſurer; je trouvai donc devant mon maître, que les quatre âges de la durée du monde, dont les Indiens ſe vantent avec tant d'emphaſe, ne ſont que des périodes aſtronomiques qu'on peut faire remonter à l'infini; car ſi-tôt que les Brames ſuppoſent la préceſſion des équinoxes de 54 ſecondes par an, la révolution du ciel entier ſera de 24 mille ans. Or, les âges rapportés ci-deſſus ſont tous diviſibles par 24000; d'où il ſuit que ce ſont autant de périodes du mouvement des Étoiles en longitude.

Cette eſpèce de découverte ne parut pas faire grande impreſſion ſur mon maître, & encore moins ſur un autre Brame; ſoit qu'il le fît exprès, ſoit qu'il fût dans le préjugé comme le reſte du peuple. Ma miſſion, à Pondichéry, s'étant répandue dans une partie de l'Inde, & ſur tout le long de la côte, ce Brame étoit venu de Tirvalour, proche de Karical, à trente lieues dans le ſud de Pondichéry, pour me

voir, à ce qu'il me dit. Il s'imagina peut-être que je devois être une eſpèce de Brame dans ma nation; car chez eux, aucune famille que celle des Brames ne peut ſe mêler d'Aſtronomie. Les Indiens s'en rapportent avec une confiance aveugle à ce que leur diſent ces Brames ſur tout ce qui a rapport à cette ſcience.

Ces Brames, comme je l'ai déjà dit, nous regardent, nous autres Européens, preſque comme des Sauvages qui n'ont point ou preſque point de connoiſſances; fiers de leur caſte, de leur ancienneté & de leur ſavoir, ils ont pour les Européens beaucoup de mépris. Ils ont de la peine à ſe figurer que nous ayons des connoiſſances, des Univerſités, des Académies, comme ils en ont dans pluſieurs villes, ſur-tout à Bénarés dans le Bengale, la plus célèbre Académie de tout l'Indoſtan.

Malgré leur mépris pour nous, & la foible idée qu'ils ont de nos connoiſſances; quoique ce Brame qui étoit venu me rendre viſite de ſi loin, témoignât la plus grande indifférence en voyant mes inſtrumens d'Aſtronomie; quoiqu'il parût très-peu flatté de l'explication que je lui donnai de l'uſage du quart-de-cercle pour les obſervations Aſtronomiques, cependant ma prédiction, au ſujet de la Comète qui parut en Août & Septembre 1769, le frappa; elle fit la même ſenſation ſur l'eſprit de tous les Indiens de Pondichéry. J'avois annoncé, dans le courant du mois de Septembre, que cette Comète, après qu'elle auroit ceſſé de paroître le matin vers la fin du mois, reparoîtroit vers la mi-Octobre à ſept heures du ſoir, & qu'on la verroit la queue tournée en ſens oppoſé à celui qu'elle avoit lorſqu'on la voyoit en Septembre. Nous la revimes en effet pendant deux à trois jours; mais les mauvais temps qui ſurvinrent bientôt, m'empêchèrent de continuer de l'obſerver. Je reviens à nos périodes.

Outre celles dont je viens de parler, les Brames en ont encore deux autres; l'une de ſoixante ans, l'autre de trois mille ſix cents ans. Celle de ſoixante ans étant révolue, ils recommencent à compter: elle leur eſt d'un grand uſage pour marquer les faits ou époques les plus mémorables de

leur

leur hiſtoire. Ils enveloppent le tout d'un voile ſi myſtérieux, qu'il eſt impoſſible d'y rien entendre, ſi l'on n'a pas la clef des nombres. Ils le font ſans doute pour en ôter la connoiſſance au vulgaire. Je vais en donner un exemple.

J'ai parlé d'un renouvellement de l'Aſtronomie dans l'Inde, ſous un Roi qu'ils nomment *Salivaganam;* & que la mort de ce Prince tombe à l'an 78 de J. C. En voici le calcul:

Multipliez, diſent-ils, 22 par 60, & vous aurez......	1320.
Ajoutez-y l'année courante........................	22.
la ſomme ſera................................	1342.
Ajoutez-y encore..............................	349.
la ſomme ſera................................	1691.

Donc, il y a ſeize cents quatre-vingt-onze ans (j'écrivois ceci à la fin de 1769) que Salivaganam, le reſtaurateur de l'Aſtronomie, eſt mort.

Il eſt aiſé de voir que le produit de 22 par 60, indique qu'il s'eſt écoulé vingt-deux périodes de ſoixante ans, depuis la mort de Salivaganam; vingt-deux que l'on ajoute enſuite eſt l'année courante de la même période de ſoixante ans; mais d'où peut provenir le nombre 349? Dans ce nombre, on trouve cinq périodes de ſoixante ans, plus, la fraction $\frac{49}{60}$, qui indique que Salivaganam eſt mort la onzième année de la période de ſoixante ans. Les Brames ne pouvoient-ils donc pas donner une autre forme à leur calcul? Sans doute, ils le pouvoient; mais ils aiment à parler d'une manière myſtérieuſe & cachée; or il y a du myſtère dans le nombre 349, & voici comment: prenez, diſent-ils, le nombre 9; prenez enſuite le *vedam,* ajoutez-y le *feu,* vous aurez 349. Or il faut ſavoir qu'il y a quatre livres du *vedam*, &, ſelon eux, trois eſpèces de *feu;* il faut de plus être au fait de leur façon de ranger ces nombres.

Il faut donc prendre, ſelon leur méthode, 1.° le nombre....	9.
2.° le vedam déſigné par le nombre..................	4
3.° le feu déſigné par le nombre....................	3
La ſomme fait................................	349.

Preſque tous leurs calculs aſtronomiques ſont ainſi voilés. Nous en verrons bientôt un exemple remarquable dans le calcul de la préceſſion des équinoxes.

Le cycle de ſoixante ans des Brames, a cela de particulier, qu'il diviſe ſans fraction le nombre 24000. Ainſi, ce cycle eſt un partage de la grande période de 24 mille ans. Je remarque encore que la grande année de ſix cents ans, citée par l'hiſtorien Josèphe, & célébrée à ſi juſte titre par Dominique Caſſini, diviſe exactement & ſans fraction la grande période Indienne de 24 mille ans. Ainſi, la grande année de Josèphe eſt un partage de la grande période de 24 mille ans.

Sur ce principe, la grande période de 24 mille ans, renferme quatre cents périodes ou cycles de ſoixante ans, & quarante périodes de ſix cents ans.

Les Étoiles avançant, ſelon les Brames, par année, de.......	$54^{S.}$
elles ſont en 60 ans	$54^{M.}$
& en 3600 ans	$54^{D.}$

Voilà le principe ou la ſource de ces périodes de ſoixante ans, & trois mille ſix cents ans. Les Brames prennent la première année pour un cycle; le ſecond eſt ſoixante fois plus grand que le premier; le troiſième ſoixante fois plus grand que le ſecond.

C'eſt peut-être là auſſi l'origine des périodes Chaldaïques de ſoixante ans, & de trois mille ſix cents ans que l'on trouve dans les fragmens qui nous ont été conſervés, de Béroſe, auteur Chaldéen, qui vivoit environ trois ſiècles avant J. C.

Je ſais bien que l'on m'objectera que les années de Béroſe ne peuvent être des années de trois cents ſoixante-cinq jours; que c'eſt le ſentiment général de tous les plus ſavans Chronologiſtes; que moi-même, dans ma Diſſertation ſur la valeur du *Saros, (Mémoires de l'Académie, année 1756)* j'ai dit que le *Saros* de Béroſe ne pouvoit s'entendre de trois mille ſix cents années ſolaires, parce qu'il y auroit eu des Rois qui auroient régné plus de ſoixante mille ans ſolaires, ſans compter les années qu'ils auroient vécu avant que d'avoir été Rois.

Me croyant aujourd'hui mieux inſtruit que je ne l'étois en 1756, lorſque je donnai mes remarques ſur la valeur du *Saros*, je ne fais point difficulté de prendre un autre ſentiment ; je penſe donc que la période de ſoixante ans de Béroſe, & celle de trois mille ſix cents ans, ſont les mêmes que celles dont ſe ſervent aujourd'hui les Brames, fondées ſur des années ſolaires de trois cents ſoixante-cinq jours, & ſur une préceſſion des équinoxes de 54 ſecondes par an. Je place le reſte au nombre des rêveries & des abſurdités que l'eſprit des hommes enfante ſi ſouvent.

Les Brames ne nous débitent pas des choſes moins ridicules & moins abſurdes, au ſujet de leur Dieu Brama, que le fait Béroſe au ſujet des anciens Rois de Babylone. Les Brames diſent que Brama doit vivre cent ans, & que les 4 millions 320 mille ans de la durée du monde, ne ſont que la moitié d'un jour de ceux de *Brama*, dont trois cents ſoixante-cinq jours font une année; ils comptent que ce *Brama* peut avoir actuellement une cinquantaine de ces eſpèces d'années.

Mettant toutes ces rêveries à part, il eſt hors de doute que dès le règne de *Salivaganam*, c'eſt-à-dire, dans le premier ſiècle de l'Ere Chrétienne, la période de ſoixante ans étoit en uſage chez les Brames & les Philoſophes de l'Inde; d'où l'on peut inférer qu'elle étoit connue long-temps avant; & comme cette période dérive du grand cycle de 24 mille ans, fondé ſur le mouvement des étoiles de 54 ſecondes par an, on en peut conclure, avec aſſez de vraiſemblance, que la préceſſion des équinoxes eſt connue de temps immémorial dans l'Inde; & que les Sages de l'Inde s'en ſervoient déjà dans leurs calculs aſtronomiques, lorſqu'Hipparque, cent vingt-huit ans avant J. C. ne faiſoit que la ſoupçonner; il y a plus, cette quantité de 54 ſecondes par an, s'accorde beaucoup mieux avec les obſervations de nos jours, que ne le font celles de Ptolémée, qui eſt venu près de trois ſiècles après Hipparque; & en effet, Ptolémée ſuppoſe (ſans trop ſavoir pourquoi) que les étoiles font un degré en cent ans. Selon les Brames le

mouvement des étoiles n'eſt que d'un degré en ſoixante-ſix ans & huit mois ; nous le trouvons par nos obſervations, à très-peu près, d'un degré en ſoixante-dix ans.

Voyons actuellement comment les Brames établiſſent l'époque des mouvemens du Soleil & de la Lune, parce qu'ils ſuppoſent que ces aſtres ſont partis tous les deux en même temps du même point.

Nous avons vu que les Étoiles avancent, ſelon ces Philoſophes, en un an, de.................................... $54''$
en 60 ans de.................................... $54'$
& en 3600 ans de.................................... 54^d

La différence de 54 degrés à 360 degrés, ou de 3 mille 600 ans, à 24 mille, eſt 20 mille 400 ans; ils partent de là pour leur époque Ils ſuppoſent donc que 20 mille 400 ans avant l'époque de l'âge d'infortune, (que nous appellerons comme eux dans nos calculs *Calyougam*) tous les aſtres étoient en conjonction dans le même point du Ciel. Or, ces 20 mille 400 ans & 3 mille 600, leur différence à 24 mille, ſont diviſibles par 600 ; donc lorſque les Brames diſent que 20 mille 400 ans avant l'époque *Calyougam*, le Soleil & la Lune étoient en conjonction, ou répondoient au même point du Ciel, c'eſt comme s'ils diſoient que trente-quatre révolutions de ſix cents ans, avant l'époque *Calyougam*, le Soleil & la Lune répondoient au même point du Ciel; donc les Brames ſe ſervent (ſans doute, ſans le ſavoir) de la grande année ou période de ſix cents ans, dont on voit quelques veſtiges dans Joſèphe ; & comme la révolution entière des étoiles, ſuppoſée par eux de 24 mille ans, renferme un certain nombre de périodes de ſix cents ans, ne peut-on pas conjecturer que les anciens Chaldéens avoient eu connoiſſance du mouvement des étoiles en longitude, connu de nos jours, ſous le nom de *préceſſion des équinoxes ;* tous ces nombres ont un trop grand rapport les uns avec les autres, pour penſer que le haſard y ait la moindre part; ces connoiſſances auront vraiſemblablement pris naiſſance dans quelque coin de l'Aſie,

& se seront ensuite répandues de proche en proche; elles se seront peu-à-peu perdues, par une suite nécessaire des révolutions qui détruisent toutes les choses humaines. Les anciens Bracmanes ou Brames en auront conservé quelques vestiges; & comme ces Philosophes se sont toujours renfermés chez eux, qu'ils sont peu curieux d'éclairer les autres hommes, il n'est pas étonnant si ces secrets astronomiques ne sont pas sortis de leur famille, & si Hipparque & Ptolémée n'ont rien su de ces précieuses connoissances.

Qu'il me soit permis de conclure, qu'il y a bien de l'apparence que les Brames calculent aujourd'hui sur des mouvemens célestes, établis long-temps avant eux, soit par les Chaldéens, soit par les anciens Bracmanes, dont les Brames eux-mêmes semblent descendre; qu'il est pareillement très-vraisemblable que la longueur de l'année solaire est un peu plus courte aujourd'hui qu'elle n'étoit du temps des premiers Chaldéens, & la précession des équinoxes plus lente.

Cette idée me paroît d'autant moins déraisonnable, que je ne vois pas pourquoi les mouvemens célestes seroient toujours les mêmes; & quoique ceux dont se servent aujourd'hui les Brames, soient beaucoup plus exacts que ceux dont se servoient Hipparque & Ptolémée, ils ne représentent cependant pas assez exactement les phénomènes de nos jours; je veux dire les Éclipses. Les Brames s'en sont, sans doute, aperçus il y a déjà bien des années. En effet, nous verrons que lorsqu'ils ont extrait de leur époque les nombres qui servent à calculer la longitude moyenne (si on peut l'appeler ainsi) du Soleil & de la Lune, ils ôtent de ces nombres, une quantité constante, sans que j'aie pu savoir la raison de cette opération. Je conjecture que les motifs de religion, les seuls qui, comme je le dirai dans la suite, les font veiller aux observations des Éclipses du Soleil & de la Lune, auront été cause qu'ils se seront, à la longue, aperçus que leurs calculs ne cadroient point avec les apparences; & ils n'auront peut-être pas pu trouver d'autre moyen d'y remédier, qu'en ôtant de la longitude moyenne du Soleil & de la Lune, une certaine quantité qu'ils

ont crue capable de remédier au défaut de leurs Tables dans les temps des oppositions & des conjonctions de la Lune; car comme ils n'observent jamais la Lune hors de ces deux points, peu leur importe que leurs Tables soient en défaut ou non hors le temps des syzygies.

TABLE des Années de l'ère Chrétienne, auxquelles répondent celles de la période de soixante ans des Brames, & de l'époque Calyougam.

ANNÉES de J. C.	ANNÉES de l'Époque *Calyougam.*	ANNÉES de la Période de 60 ans.
498	.... 3600	.... 0.
1760	.... 4862	.... 2.
1761	.... 4863	.... 3.
1762	.... 4864	.... 4.
1763	.... 4865	.... 5.
1764	.... 4866	.... 6.
1765	.... 4867	.... 7.
1766	.... 4868	.... 8.
1767	.... 4869	.... 9.
1768	.... 4870	.... 10.
1769	.... 4871	.... 11.
1770	.... 4872	.... 12.

Il est nécessaire d'avertir que cette Table représente des années complettes; ce qu'il est important de savoir pour les calculs de la longitude du Soleil & de la Lune, & pour les Éclipses. Par exemple, pour calculer l'Éclipse de Lune du 23 Décembre 1768, il faut prendre l'année de l'époque *Calyougam*, qui répond à l'année 1767. C'est 4869; mais avant que d'en venir à ce calcul, il faut parler des signes du Zodiaque.

Du Zodiaque & des vingt-sept Constellations ou *Lieux de la Lune, comptés dans les douze Signes, selon les Brames.*

Les Brames connoissent le Zodiaque; ils le nomment *Sodi-mandalam*, qui veut dire *cercle des astres*, de *Mandalam*, cercle, & *Sodi* astres. Ils divisent ce cercle des astres en douze parties ou signes auxquels ils ont donné des noms, dont il seroit sans doute fort curieux d'avoir la vraie signification. J'ai bien fait tout ce qu'il m'a été possible pour me la procurer; mes interprètes me l'ont donnée, mais rien ne m'assure que ce soit la véritable origine de chaque mot.

Il est certain que la division du Zodiaque en douze signes, se perd dans l'antiquité; & en effet, cette division en douze parties a dû suivre de fort près la division de l'année en douze mois : on se persuade aisément que les premiers Astronomes, soit qu'on les suppose nés en Asie, soit qu'on les fasse sortir de l'Égypte, auront travaillé à reconnoître la route du Soleil & de la Lune dans le Ciel, en remarquant les étoiles dans le voisinage desquelles ces deux astres passoient; mais il n'est pas naturel de croire qu'ils se soient rencontrés dans l'Inde & en Égypte, à donner les mêmes noms aux mêmes étoiles; & comme le remarque très-bien le P. Palu, *(Mémoires de Trévoux, Avril 1737, page 656)* au sujet des constellations d'Orion, des Hyades & des Pléïades, les interprètes ont substitué au hasard des noms dont on ne voit point le rapport avec ceux de la langue originale.

Le Zodiaque des Brames paroît avoir beaucoup de rapport avec celui des Égyptiens, quant aux noms de signes, car il y a de la différence dans les constellations. Par rapport aux signes, je n'en ai remarqué de bien réelle, que dans le Capricorne que les Brames n'ont point. Le mot *Macaram* de la langue Brame, qui répond au mot *Capricorne*, signifie espèce de poisson.

Les Brames n'ont point le Sagittaire; c'est-à-dire, ce

monſtre, moitié homme & moitié cheval, qui lance une flèche par le moyen d'un arc. Le mot *Dhanoulſou* veut ſimplement dire *une flèche.*

Pareillement ils n'ont point le Verſeur-d'eau ; le mot *Coumbam* ne veut dire autre choſe qu'une couche, ou vaſe à mettre de l'eau.

Enfin, *Tolam* auquel mes interprètes ont ſubſtitué le mot *Balance,* déſigne une balance à la Romaine.

L'on voit donc que la différence entre le Zodiaque Indien, & le Zodiaque Égyptien, n'eſt bien ſenſible que dans le ſigne du Capricorne.

Noms des Signes du Zodiaque dans la langue des Brames.

Mecham (eſpèce de chien marron)...........	Bélier,
Urouchabam (Bœuf).....................	Taureau.
Mitounam..........................	Gémeaux.
Carcallakam........................	Écreviſſe.
Simham............................	Lion.
Canny (fille)........................	Vierge.
Tolam.............................	Balance.
Vrouchikam.........................	Scorpion.
Dhanoulſou.........................	Flèche.
Maçaram...........................	Eſpèce de Poiſſon.
Coumbam..........................	Cruche.
Minam............................	Poiſſon.

J'aurois donné ces noms, écrits avec les caractères Tamoults, ſi j'avois penſé qu'ils puſſent ſervir à mieux définir les ſignes de ce Zodiaque; mais je ne le penſe pas. Je me contenterai de les dépoſer dans la Bibliothèque du Roi.

Les Brames admettent, comme nous, deux eſpèces de Zodiaque; l'un fixe & immobile, qui commence au premier point du Bélier; l'autre avance tous les ans dans le Levant d'une certaine quantité, qu'ils eſtiment être de 54 ſecondes. La longitude du Soleil ſe compte toujours, ſelon les Brames, à partir

à partir du premier point du Bélier de ce ſecond Zodiaque, ou Zodiaque mobile.

Voyons la méthode de calculer la longitude de ce premier point.

La période de 3 mille 600 ans, produit du cycle de ſoixante ans par lui-même, comme je l'ai dit plus haut, retranchée de la grande révolution, ſuppoſée de 24 mille ans, donne l'époque 20 mille 400 ans; ils ſuppoſent donc que 20 mille 400 ans avant le commencement de l'âge d'infortune, le Soleil & la Lune, non-ſeulement étoient dans le même point du ciel, comme nous avons vu, mais en outre, que le Zodiaque mobile a recommencé ſa révolution; c'eſt comme s'ils diſoient que 20 mille 400 ans avant le commencement de l'âge d'infortune, la révolution de 24 mille ans a dû recommencer; par conſéquent la révolution où nous ſommes a dû recommencer encore 3 mille 600 ans après la première année de l'âge d'infortune; donc en 1763, il y avoit douze cents ſoixante-quatre ans que cette période avoit recommencé; & par conſéquent le premier degré du Zodiaque mobile des Brames, répondoit au premier point du Zodiaque fixe, l'an 3600 de l'époque *Calyougam;* ce qui répond à l'an 498 de l'Ere Chrétienne, différence de 1264 à 1762.

Pour trouver actuellement la longitude du premier point du Zodiaque mobile pour une année donnée de l'époque *Calyougam*, rien n'eſt plus aiſé; mais le calcul des Brames eſt ſi enveloppé que (l'époque exceptée) on ne voit pas du premier coup-d'œil, d'où proviennent les autres nombres qu'ils emploient.

On demande la longitude du premier degré du ſigne du Bélier, mobile pour le 17 Octobre de l'Ere Chrétienne 1762. Cette année répond à l'année complète 4863 de l'époque *Calyougam.*

Rien n'eſt ſi ſimple que ce calcul, en ſuivant l'explication que je viens de donner. Il ne s'agit que de prendre la différence de l'époque *Calyougam* 4863 à 3600, & la

multiplier par 54 secondes; or, cette différence est 1263 ans, qui multipliés par 54 secondes, donnent 68 mille 202 secondes,

qui font	$18^d\ 56'\ 42''$
ajoutez pour six mois	0. 0. 27.
vous aurez	18. 57. 9.

A la place de cette opération, qui est bien simple, voici ce que vous font faire les Brames :

Époque *Calyougam*	4863.
ôtez	3179.
Il reste	1684.
ôtez encore, s'il est possible, comme ici	1413.
Il reste	271.
multipliés par	3.
il vient	813.
Ajoutez-y	2976.
la somme est	3789.

Divisez cette somme par 200, le quotient 18 exprimera les degrés; s'il y a du reste (comme ici 189) ils le font multiplier par 60; ce qui donne 11340; divisant encore ce produit par 200, on a les minutes; c'est-à-dire 56. S'il se trouve encore un reste (comme ici 140) ils le multiplient encore par 60, & divisant le produit 8400 par 200, ils trouvent 42 secondes. Ils ont donc $18^d\ 56'\ 42'''$. Multipliant après cela les six mois complets par 270 tierces, & divisant le produit par 60, ils trouvent 27 secondes à ajouter. Ils trouvent donc, par une longue suite d'opérations, $18^d\ 57'\ 9''$, la même quantité que j'ai trouvée par une seule opération.

TABLE qui repréſente la forme du calcul de la préceſſion des Équinoxes par les Brames.

Époque *Calyougam*	4863.	
ôtez	3179.	
Reſte	1684.	
ôtez encore	1413.	
Reſte	271.	
multipliés par	3.	
Produit	813.	
Ajoutez	2976.	
Somme	3789.	200.
	200.	18^{d}
	1789.	
	1600.	
	189.	
	60.	
	11340.	200.
	1000.	$56'$
	1340.	
	1200.	
	140.	
	60.	
	8400.	200.
	800.	$42''$
	400.	
	400.	
	270.	
	6.	
	1620.	60
	120.	$+ 27'''$
	420.	
	420.	

J'ai dit que l'année où a recommencé, selon les Brames, la période de 24 mille ans, & celle de soixante ans, répond à l'an 498 de l'Ere Chrétienne. Or, la longitude de la première étoile du Bélier, l'an 498 de J. C. étoit, en supposant la précession de 50 secondes, de $12^d\ 18'\ 10''$: ces $12^d\ 18'\ 10''$ expriment la quantité dont les Brames diffèrent d'avec nous pour la longitude du premier point de leur Zodiaque. Mais parce qu'ils font la précession de 4 secondes plus grande; savoir de 54 secondes; la différence, en 1762, aura été moindre qu'en 498, de $1^d\ 24'\ 16''$: elle deviendra nulle au bout de 9 mille 808 ans, ou à peu-près; après cette époque, cette même différence ira toujours en croissant jusqu'à ce qu'elle soit de six signes, ou de 180 degrés. Il faudra pour cela 162 mille ans.

Pour le calcul des éclipses de Soleil, les Brames se servent d'une Table intitulée, *Table de la valeur des douze signes.*

Cette Table est différente, selon les latitudes pour lesquelles on calcule; elle m'a paru construite avec art, & a pour base une autre Table intitulée, *de la valeur des douze signes pour le milieu du monde;* c'est-à-dire, sous l'Équateur. Nous avons vu que le jour que le Soleil entroit dans l'équinoxe, les Brames supposoient que cet Astre étoit au milieu du monde.

TABLE I.ere

De la valeur des 12 Signes pour le milieu du monde.

SIGNES.		Min.	Pour Tirvalour.
1.	♈	278.	— 24
2.	♉	299.	— 19
3.	♊	323.	— 8
4.	♋	323.	+ 8
5.	♌	299.	+ 19
6.	♍	278.	+ 24
7.	♎	278.	+ 24
8.	♏	299.	+ 19
9.	♐	323.	+ 8
10.	♑	323.	— 8
11.	♒	299.	— 19
12.	♓	278.	— 24

Je n'ai pu ſavoir ſur quels principes cette Table eſt fondée. Les Brames la tiennent ſans doute de la même ſource d'où ils ont tiré leurs autres élémens. Néceſſairement elle ſuppoſe l'obliquité de l'écliptique.

La différence de valeur du premier ſigne & du troiſième eſt, dans cette Table, de 46 minutes d'heure Indienne, ou 18 minutes Européennes. Or, en ſuppoſant l'obliquité de l'écliptique, même de 25 degrés, je ne trouve la différence que de 16 minutes Européennes.

La Table précédente étant ſuppoſée, les Brames trouvent la valeur des douze ſignes pour une latitude donnée, en ſuppoſant encore la longueur de l'ombre du gnomon le jour de l'équinoxe, pour cette latitude.

C'eſt ſur ces principes que la Table ſuivante pour la latitude de Tirvalour a été calculée. Je prends pour exemple Tirvalour, parce que je donne ci-après le calcul de l'éclipſe

de Soleil du 17 Octobre 1762, pour la latitude de cette Ville.

TABLE II.

De la valeur des 12 Signes pour la latitude de Tirvalour.

SIGNES.		Min.
1.	♈	254
2.	♉	280
3.	♓	315
4.	♋	331
5.	♌	318
6.	♍	302
7.	♎	302
8.	♏	318
9.	♐	331
10.	♑	315
11.	♒	280
12.	♊	254

Cette Table n'est qu'une répétition de la première, dont on a ôté, & à laquelle on a ajouté, selon les titres, les quantités que l'on trouve à côté pour Tirvalour. Pour savoir actuellement d'où proviennent ces quantités, voici la façon dont les Brames les ont calculées.

J'ai dit qu'ils ont trouvé que la longueur de l'ombre du style pour Tirvalour, étoit, le jour de l'équinoxe, de deux doigts & 24 minutes; qu'ils multiplioient cette quantité par 20; & qu'ils en divisoient le produit par 60 : que le quotient 48 étoit la différence ascensionnelle qu'ils cherchoient. Les Brames prennent la moitié de cette différence, ou 24 minutes; c'est ce qu'il faut ôter, selon eux, de la Table de la valeur des signes sous l'Équateur, pour avoir celle qui doit répondre à la latitude de Tirvalour, & au premier signe.

Pour le ſecond ſigne, ils enſeignent de prendre les $\frac{4}{10}$ de la différence aſcenſionnelle 48 minutes; or, les $\frac{4}{10}$ de 48 minutes ſont $19' \frac{2}{10}$; c'eſt la quantité qu'il faut ôter de celle qui répond à l'Équateur, pour avoir celle qui convient au parallèle de Tirvalour, & au ſecond ſigne.

Enfin, pour le troiſième ſigne ils enſeignent de prendre le ſixième de la différence aſcenſionnelle 48 minutes; or, le ſixième de 48 minutes eſt 8 minutes; c'eſt la quantité qu'il faut ôter de la valeur déterminée ſous l'équateur, pour avoir celle qui répond au parallèle de Tirvalour, & au troiſième ſigne.

Ces quantités deviennent additives depuis le quatrième ſigne juſqu'au neuvième, après leſquels elles reprennent le ſigne négatif.

Les Brames, outre cette diviſion du Zodiaque en douze ſignes, telle que nous venons de le voir, le partagent en vingt-ſept parties, qu'ils appellent *conſtellations*, ou *lieux de la Lune, comptés dans les douze ſignes;* de façon que chaque ſigne du Zodiaque eſt composé de deux conſtellations & un quart de conſtellation. Diviſez 360 degrés par 27 degrés, le quotient donnera $13^d\ 20'$; or, le quart de $13^d\ 20'$ eſt $3^d\ 20'$; donc, deux fois $13^d\ 20'$ & $3^d\ 20'$, font 30 degrés, ou un ſigne entier.

Il ſemble que les auteurs de cette façon de diviſer le Zodiaque, aient eu intention d'en former deux, un pour la Lune, & l'autre pour le Soleil. Peut-être même la diviſion du Zodiaque, ou plutôt l'origine des conſtellations du Zodiaque a-t-elle commencé de cette manière. Je ſerois très-porté à le croire. Le mouvement de la Lune eſt beaucoup plus ſenſible que celui du Soleil, ce qui me fait juger que ceux qui ſe ſeront les premiers appliqués à la recherche du mouvement des Aſtres auront commencé par le mouvement de la Lune. Ils auront remarqué les étoiles auxquelles elle paroiſſoit répondre chaque jour; & comme après vingt-ſept jours révolus, elle reparoiſſoit encore à peu-près aux environs des mêmes étoiles, ces premiers Aſtronomes auront donné

des noms à ces étoiles, pour les reconnoître, & pour s'entendre entr'eux.

Ces vingt-ſept conſtellations des Brames ſont marquées dans le ciel par des étoiles, & c'eſt une des choſes qui m'a paru la plus curieuſe dans l'Aſtronomie Indienne, qui prouve en faveur de la grande ancienneté des conſtellations du Zodiaque; car on trouve ici une différence ſingulière entre les étoiles qui compoſent les vingt-ſept conſtellations des Brames, & celles qui entrent dans les douze ſignes. Pour moi je crois qu'une partie du Zodiaque Égyptien a été compoſée ſur ces vingt-ſept conſtellations, & qu'on aura ſupprimé, par exemple, du Bélier les étoiles qui paroiſſoient être trop éloignées du cours du Zodiaque, comme nous le verrons.

Ces vingt-ſept conſtellations des Brames, ou *lieux de la Lune que l'on compte dans les douze ſignes,* pour me ſervir de leurs termes, ont chacune un nom particulier dont je n'ai pu ſavoir la ſignification; mais que je rapporterai tel qu'il m'a été donné.

Je paſſai pluſieurs ſoirées à reconnoître ces conſtellations. La ſingularité que je remarquai dans le ſigne du Bélier, me fit redoubler d'attention pour les autres; il m'en manquoit dix à douze; les mauvais temps me ſurprirent au milieu de mes veilles; je tombai malade. Lorſque je devins convaleſcent mon Brame s'en étoit allé, je partis de mon côté.

Il eſt vrai qu'il me laiſſa les configurations, ſi on peut les appeler ainſi, de ces conſtellations, leur nom, & le nombre d'étoiles que renferme chacune en particulier; malgré cela je ne peux pas aſſurer les avoir bien reconnues, parce que beaucoup de ces conſtellations, comme on le remarquera, ſortent de notre Zodiaque: les configurations, d'ailleurs, ne ſont pas aſſez reſſemblantes, comme on peut voir dans la figure.

TABLE

TABLE des vingt-sept Conſtellations des Brames.

I.

Aſſoupati, ſix Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par ſix Étoiles, ſavoir, les trois de la tête du Bélier, deux du Triangle ($\alpha \beta$) & la Luiſante du pied auſtral d'Andromède (γ), *fig. 1.*

I I.

Barany, trois Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par trois Étoiles; ce ſont les trois principales de la Mouche, très-viſibles à la vue ſimple, *fig. 2.*

I I I.

Cartiguey, ſept Étoiles.

Cette conſtellation eſt compoſée de ſept Étoiles; ce ſont les Pléïades, *figure 3.*

I V.

Rohany, cinq Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par cinq Étoiles; ce ſont les Hyades, *figure 4.*

V.

Mroucaſirichan, trois Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par trois Étoiles très-viſibles, au nord des trois de la ceinture d'Orion; ce ſont les trois dans le cou d'Orion, *figure 5.*

V I.

Tirouvadirey, une Étoile.

Cette conſtellation n'a qu'une Étoile; c'eſt α d'Orion, *fig. 6.*

V I I.

Pounarpouſſam, ſix Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par ſix Étoiles; je crois que ce ſont les étoiles des Gémeaux $\xi \gamma \nu \mu \kappa$, & l'étoile H qui n'eſt d'aucune conſtellation, & qui eſt très-voiſine de l'Écliptique, *fig. 7.*

V I I I.

Pouſſam, cinq Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par cinq Étoiles; je crois que ce ſont les étoiles $\tau \iota \delta \zeta \epsilon$, des Gémeaux, *fig. 8.*

I X.

Âhiliam, quatre Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par quatre Étoiles qui forment un quarré long; je crois que ce ſont les deux têtes des Gémeaux, & les deux de la tête du Lion μ & ϵ, *figure 9.*

Suite des *vingt-sept Constellations.*

X.

Makam, quatre Étoiles.

Cette constellation est désignée par quatre Étoiles en zig-zag; je crois que ce sont les quatre de la crinière du Lion $\alpha\eta\gamma\zeta$, *fig. 10.*

X I.

Pouram, deux Étoiles.

X I I.

Outram, deux Étoiles.

Ces deux constellations sont désignées par quatre Étoiles qui forment un quarré long, dont deux appartiennent à la XIe constellation, & les deux autres à celle-ci; je crois que ce sont $\beta\delta\theta o$ du Lion, *fig. 11.*

X I I I.

Assam, beaucoup d'Étoiles.

Cette constellation est désignée par un paquet d'Étoiles en forme de triangle isocèle, ou de pyramide; il y a bien de l'apparence que c'est la gerbe de blé, autrement chevelure de *Berenice*, *fig. 12.*

X I V.

Sittirey, deux Étoiles.

Cette constellation n'a que deux Étoiles; je crois que c'est ϵ & δ de la Vierge, *fig. 13.*

X V.

Svady, une Étoile.

Cette constellation n'a qu'une Étoile; je crois que c'est l'épi de la Vierge, *fig. 14.*

X V I.

Vissakam, douze Étoiles.

Cette constellation est désignée par douze Étoiles; mais je n'ai pu la reconnoître, malgré la configuration que j'en ai, *fig. 15.*

Il y a bien apparence que ces Étoiles, pour la plupart, sont de la Balance; peut-être quelques-unes sont-elles hors de ce signe: en ce cas, il est bien difficile de deviner, ou plutôt d'estimer laquelle, entre plusieurs Étoiles, dont on n'a ni la grandeur, ni la configuration exacte, est celle qu'il faut choisir.

X V I I.

Anoucham, six Étoiles.

Cette constellation a six Étoiles, qui sont du Scorpion; malgré cela, & ma configuration, je n'ai pu les reconnoître, *fig. 16.*

X V I I I.

Quettey, quatre Étoiles.

Cette constellation est désignée par quatre Étoiles; ce sont, à ce que

Suite des *vingt-ſept Conſtellations.*

je conjecture, $\epsilon \mu \zeta$ de la queue du Scorpion, & une autre au-deſſous; elles ſont fort près toutes les quatre & dans la même ligne droite, *fig. 17.*

XIX.

Moulam, quatre Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par quatre Étoiles; ce ſont les quatre de l'extrémité de la queue du Scorpion, $\iota \chi \lambda \upsilon$, *fig. 18.*

XX.

Pouſſadam, deux Étoiles.

XXI.

Outradam, deux Étoiles.

Ces deux conſtellations ſont déſignées par quatre Étoiles qui forment un quarré long, dont deux appartiennent à la vingtième conſtellation, & les deux autres à la vingt-unième; je crois que ce ſont χ d'Antinoüs & α du Capricorne, d'une part; $\zeta \mu$ du Sagittaire, de l'autre part, *fig. 19.*

XXII.

Tirouvonam, trois Étoiles.

La vingt-deuxième conſtellation eſt déſignée par trois Étoiles que je n'aurois pas ſoupçonnées; ce ſont les trois étoiles de l'Aigle, *fig. 20.*

XXIII.

Avouttam, pluſieurs Étoiles.

Cette conſtellation eſt déſignée par pluſieurs Étoiles; ce ſont celles qui compoſent le Dauphin, *fig. 21.*

XXIV.

Chatayam, une Étoile.

Cette conſtellation eſt un paquet de pluſieurs Étoiles qui forment à la vue ſimple une nébuleuſe que l'on trouve en menant une ligne de la dernière de la tête du Dauphin (γ) à l'étoile α de Pégaſe, un peu au nord de cette ligne, à côté de deux autres Étoiles, & un peu plus près des Étoiles du Dauphin que de celles de Pégaſe, *fig. 22.*

XXV.

Pourattady, deux Étoiles.

XXVI.

Outrettady, deux Étoiles.

Ces deux conſtellations ſont déſignées par quatre Étoiles qui forment un grand quarré; α & β de Pégaſe, pour la vingt-cinquième; α d'Andromède & γ de Pégaſe pour celle-ci, *fig. 23.*

Suite des *vingt-sept Constellations.*

XXVII.

Rebady, plusieurs Étoiles.

Cette constellation est désignée par une espèce d'arc qu'ils imaginent dans le ciel; c'est ce que nous nommons le lien des Poissons; de façon cependant que la principale, marquée α, les deux précédentes ξ, ν & o, ne sont point comprises dans cette vingt-septième constellation, *figure 24.*

Je ne sache pas que nous connoissions rien de plus ancien que ces vingt-sept constellations; je le repète, la division du Zodiaque, en douze signes, n'est vraisemblablement venue qu'après celle-là. Il est certain que la Lune faisant treize fois & demie environ le tour du Zodiaque, contre le Soleil une fois, il aura été bien plus facile aux premiers Astronomes de reconnoître son mouvement, que celui du Soleil; pour cela ils se seront servis d'alignement pour se reconnoître; & comme parmi les Étoiles du Zodiaque, il s'en trouve de fort petites, qui sont à peine sensibles à la vue, ils en ont été chercher d'autres aux environs qui fussent plus apparentes. De plus, ces premières observations se faisant, comme je viens de le dire, par des alignemens; il est encore certain qu'en se servant d'Étoiles un peu plus éloignées, ils mesuroient le mouvement de la Lune avec plus de précision.

C'est sans doute la raison pour laquelle je ne trouve aucune des Étoiles du Verseau & des Poissons *(je pourrois peut-être ajouter du Cancer)* parmi les vingt-sept constellations des Brames; ils n'ont employé que les plus apparentes du lien des Poissons, lesquelles forment une espèce de pied de Bœuf, & sont allés chercher plus loin des Étoiles plus apparentes pour y comparer la Lune; & ces Étoiles sont celles de l'Aigle, du Dauphin, de Pégase & d'Andromède; de sorte que leur Zodiaque commence à ce que nous appelons *la Tête du Bélier, le Triangle & la Tête d'Andromède*, & finit, à peu de chose près, à cette dernière constellation.

On peut conjecturer, par ce que je viens de dire du Zodiaque des Indiens, & de leurs vingt-sept constellations,

que ce Zodiaque eſt beaucoup plus ancien que le Zodiaque Égyptien; & en effet, prenons, pour le faire voir, le ſigne du Bélier; ce ſigne eſt compoſé, comme les autres, de deux conſtellations & un quart. Il comprend non-ſeulement les trois étoiles de la tête du Bélier Égyptien & Grec, mais encore celles qui ſont au nord de ces trois étoiles, c'eſt-à-dire la Mouche, deux du triangle, & le pied méridional d'Andromède; ces trois conſtellations ſont tout-à-fait modernes, comme l'on ſait : il y a donc bien de l'apparence que dans le temps où les Sciences paſſèrent de l'orient de l'Aſie dans l'occident, les Aſtronomes de ce temps auront réformé le Zodiaque qu'ils avoient reçu des Orientaux, c'eſt-à-dire qu'ils auront retranché des ſignes du Zodiaque les étoiles qui s'éloignoient un peu trop du cours des Planètes, comme dans cet exemple, toutes les étoiles au nord de la tête du Bélier : ces étoiles une fois abandonnées ſeront reſtées pendant long-temps ſans être claſſées, juſqu'à ce que les Grecs, peuple très-nouveau, aient paru ſur la ſcène du monde, & que la folie les ait pris de vouloir que la poſtérité lût dans le ciel l'hiſtoire de leurs principaux Héros, &c.

J'ai cherché les raiſons qui ont pu déterminer les premiers Aſtronomes à faire entrer dans leur ſigne du Bélier, par exemple, les Étoiles qui ſont aujourd'hui partie du triangle & de la conſtellation d'Andromède; outre ce que j'en ai déja dit, voici de plus ce que j'ai trouvé.

En ſuppoſant le mouvement des Étoiles en aſcenſion droite, tel que les Aſtronomes modernes l'admettent; la première Étoile du Bélier, & la luiſante du pied auſtral d'Andromède, ſont les ſeules Étoiles remarquables de cette partie du Ciel qui aient pu ſe trouver en même temps dans les points équinoxiaux; en effet, je trouve dix-huit cents trente ans pour la première du Bélier, & dix-huit cents ſoixante pour le pied d'Andromède; la différence ne va pas à un demi-degré. Il eſt vrai que ces deux Étoiles diffèrent de 11 degrés en longitude; mais dans les premières années de l'Aſtronomie, dans l'enfance de cette Science, on ne diſtinguoit pas la longitude de l'aſcenſion droite, &

on ne faisoit attention qu'au mouvement diurne, ou en ascension droite.

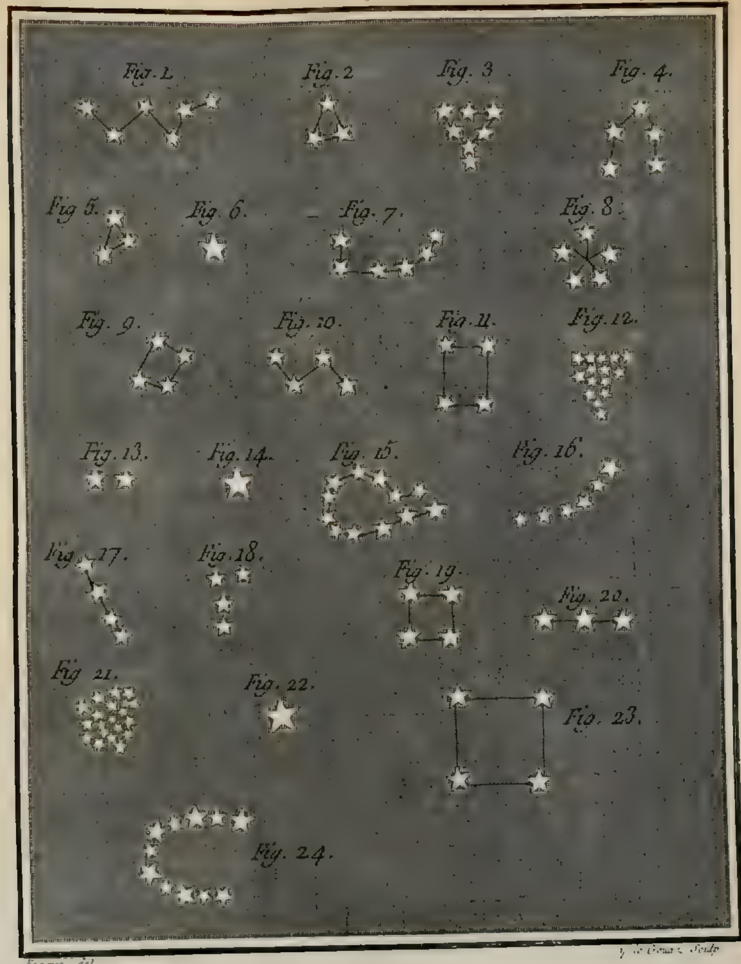
Je donne ici une Planche qui représente les figures des vingt-sept constellations des Brames : j'ai fait dessiner & graver ces figures, exactement conformes & pareilles pour la grandeur, à celles que je conserve, de la propre main de mon Interprète; on y remarquera une chose fort singulière, ce sont des lignes tirées d'une Étoile à l'autre; ces lignes sont de même dans l'original; c'est, à mon avis, une preuve que les premières Observations se faisoient par des alignemens.

Il paroîtra d'abord fort extraordinaire que des observations, en apparence si grossières, aient donné la précision que nous admirons dans les Élémens d'Astronomie des Anciens, & que les Brames nous ont conservés; c'est encore une preuve de l'ancienneté de l'Astronomie: la grande distance ou le grand intervalle qui se sera écoulé entre les observations de comparaison, aura suppléé au défaut des Instrumens qui contribuent, de nos jours, à la justesse des observations. J'ajouterai encore que les Pléïades sont ici au nombre de sept, quoiqu'il n'y en ait véritablement que six de visibles aujourd'hui à la vue simple.



VI.

Les 27. Constellations ou lieux de la Lune dans les 12. Signes selon les Brames.



Fossier del   Sculp

OBSERVATIONS SUR L'ANIMAL QUI PORTE LE MUSC, *Et sur ses rapports avec les autres Animaux.*

Par M. DAUBENTON.

L'ODEUR forte & pénétrante du Musc est trop sensible, pour que ce parfum n'ait pas été remarqué en même-temps que l'animal qui le porte; aussi leur a-t-on donné à tous les deux le même nom de *Musc.* Cet animal se trouve dans les royaumes de Boutan & de Tunquin, à la Chine & dans la Tartarie Chinoise, & même dans quelques parties de la Tartarie Moscovite. Je crois que de temps immémorial il a été recherché par les habitans de ces contrées, parce que sa chair est très-bonne à manger, & que son parfum a toujours dû faire un objet de commerce. Mais on ne sait pas en quel temps le Musc a commencé à être connu en Europe, & même dans la partie occidentale de l'Asie. Il ne paroît pas que les Grecs, ni les Romains aient eu connoissance de ce parfum, puisqu'Aristote ni Pline n'en ont fait aucune mention dans leurs Écrits. Les auteurs Arabes sont les premiers qui en aient parlé. Sérapion donna une description du Porte-musc dans le huitième siècle.

Depuis ce temps, déjà fort éloigné, un grand nombre d'Auteurs ont décrit cet animal : on l'a comparé pendant plus de dix siècles au Chevreuil, au Bouc, au Cerf, au Chamois, à la Gazelle, au Chevrotain, sans pouvoir déterminer son genre, & assigner sa vraie place parmi les autres quadrupèdes.

Nous serionsencore dans la même incertitude, & il y a toute apparence que de long-temps on n'auroit pu éclaircir ce point intéressant de l'Histoire Naturelle, si M. le Duc de

la Vrillière n'avoit eu la bonté de nous faire voir le Porte-muſc vivant. Jamais on n'en avoit amené en France. C'eſt un préſent qui méritoit, par ſa rareté, d'être envoyé du fond de l'Aſie, & d'être offert à un Miniſtre qui favoriſe toutes les Sciences, & l'Hiſtoire Naturelle en particulier, autant par ſa propre inclination, que par ſon zèle pour l'utilité publique.

J'ai vu, au mois de Juillet, le Porte-muſc *(fig. 1)* dans un parc de M. le duc de la Vrillière, à Verſailles. L'odeur du muſc qui ſe répandoit de temps en temps, ſuivant la direction du vent, autour de l'enceinte où étoit le Porte-muſc, auroit pu me ſervir de guide pour trouver cet animal. Dès que je l'aperçus, je reconnus dans ſa figure & dans ſes attitudes beaucoup de reſſemblance avec le Chevreuil, la Gazelle & le Chevrotain, aucun animal de ce genre n'a plus de légèreté, de ſoupleſſe & de vivacité dans les mouvemens que le Porte-muſc. Il reſſemble encore aux animaux ruminans en ce qu'il a les pieds fourchus, & qu'il manque de dents inciſives à la mâchoire ſupérieure. Mais on ne peut le comparer qu'au Chevrotain pour les deux défenſes ou longues dents canines qui tiennent à la mâchoire du deſſus, & ſortent d'un pouce & demi au-dehors des lèvres.

La ſubſtance de ces dents eſt une ſorte d'ivoire, comme celle des défenſes du Babirouſſa, & de pluſieurs autres eſpèces d'animaux; mais les défenſes du Porte-muſc ont une forme très-particulière, elles reſſemblent à de petits couteaux courbes, placés au-deſſous de la gueule, & dirigés obliquement de haut en bas, & de devant en arrière; leur bord poſtérieur eſt tranchant. Quelques Auteurs ont comparé ces dents aux défenſes du Sanglier, pour l'uſage que le Porte-muſc en peut faire; leur ſituation a fait auſſi préſumer qu'elles ſervent à couper des racines qui ſont de la groſſeur du doigt, & qui ſont la principale nourriture du Porte-muſc; mais je crois qu'il s'en ſert à différens uſages, ſuivant les circonſtances où il ſe trouve, ſoit pour couper des racines, ſoit pour ſe ſoutenir dans des endroits où il ne peut pas trouver d'autres points

points d'appui; soit enfin pour se défendre ou pour attaquer. Plus on observe les mœurs des animaux, plus on les voit employer, dans le besoin, toutes les parties de leur corps qui peuvent leur servir.

Le Porte-musc n'a point de cornes; les oreilles sont longues, droites & très-mobiles; les deux dents blanches qui sortent de la gueule, & les renflemens qu'elles forment à la lèvre supérieure, donnent à la physionomie du Porte-musc, vu de face *(fig. 2)*, un air singulier qui pourroit le faire distinguer de tout autre animal, à l'exception du Chevrotain.

Les couleurs du poil sont peu apparentes; au lieu de couleurs décidées, il n'y a que des teintes de brun, de fauve & de blanchâtre, qui semblent changer, lorsqu'on regarde l'animal sous différens points de vue, parce que les poils ne sont colorés en brun ou en fauve qu'à leur extrémité; le reste est blanc, & paroît plus ou moins à différens aspects. La teinte blanchâtre domine sur les poils les plus longs, parce qu'ils s'écartent davantage les uns des autres, & par conséquent laissent paroître plus de blanc: cette apparence de changement dans les couleurs du poil n'est pas particulière au Porte-musc, on la voit sur tous les animaux qui ont différentes couleurs sur un même poil; il y a du blanc & du noir sur les oreilles du Porte-musc, & une étoile blanche au milieu du front.

Cette étoile me paroît être une sorte de livrée qui disparoîtra lorsque l'animal sera plus âgé; car je ne l'ai pas vue sur deux peaux de Porte-musc qui m'ont été adressées pour le Cabinet d'Histoire Naturelle du Jardin du Roi, par M. le Monnier, Médecin du Roi, de la part de M.de la comtesse de Marsan: ces deux peaux ont été envoyées des Indes par M. l'abbé Gallois, qui a déjà rapporté plusieurs fois en ce pays-ci des choses curieuses & utiles, de la Chine & d'autres contrées de l'orient; les deux peaux, dont il s'agit, m'ont paru venir d'animaux adultes, l'un mâle & l'autre femelle; les teintes des couleurs du poil y sont plus foncées que sur le Porte-musc vivant que je viens de décrire. Il y a de plus,

ſur la face inférieure du cou, deux bandes blanchâtres; larges d'environ un pouce, qui s'étendent irrégulièrement le long du cou, & qui forment une ſorte d'ovale alongé, en ſe rejoignant en avant, ſur la gorge, & en arrière entre les jambes de devant.

Le poil a près de trois pouces & demi ſur quelques parties du corps; on l'a comparé à des tuyaux de plumes, parce qu'il eſt en partie creux; mais il étoit inutile de prendre un objet de comparaiſon ſi éloigné; ce poil ne me paroît pas différent de celui de pluſieurs animaux ruminans.

Le muſc eſt renfermé dans une poche placée ſous le ventre, à l'endroit du nombril. Je n'ai vu ſur le Porte-muſc vivant que de petites éminences ſur le milieu de ſon ventre: je n'ai pu les obſerver de près, parce que l'animal ne ſe laiſſe pas approcher, & qu'on ne pourroit pas le ſaiſir ſans riſquer de le bleſſer: la poche du muſc tient à l'une des peaux envoyées par M. l'abbé Gallois, mais cette poche eſt deſſéchée; il m'a paru que ſi elle étoit dans l'état naturel, elle auroit au moins un pouce & demi de diamètre. Il y a, dans le milieu un orifice très-ſenſible, dont j'ai tiré de la ſubſtance du muſc, très-odorante & de couleur rouſſe. La poche eſt revêtue de poils blanchâtres, très-légèrement teints de fauve, ſur-tout à la pointe. M. Gmelin ayant obſervé ſa ſituation ſur deux mâles, rapporte dans le *IV.e vol. des Mém. de l'Académie Impériale de Péterſbourg*, que cette poche étoit placée au-devant, & un peu à droite du prépuce.

Le Porte-muſc diffère de tout autre animal, par la poche qu'il a ſous le ventre, & qui renferme le muſc; cependant, quoique ce caractère ſoit unique par ſa ſituation, il me paroît peu important pour l'Anatomie comparée; il ne contribue nullement à déterminer la place du Porte-muſc parmi les Quadrupèdes, parce qu'il y a des ſubſtances odoriférantes qui viennent d'animaux très-différens du Porte-muſc. Je pourrois citer beaucoup de ces animaux, car j'en ai décrit un grand nombre qui ont des poches, où il ſe fait une ſécrétion de ſubſtances odoriférantes, ſolide ou liquide dans différentes

parties du corps, comme le dos du Pécari, le prépuce du Caſtor, le deſſous de l'anus de la Civette, dont l'odeur a tant de rapport à celle du Muſc, qu'on a donné à ce parfum le nom de Muſc d'Afrique; cependant, il y a preſque autant de différence entre la Civette & le Porte-muſc, qu'entre un Chat & un Chevreuil.

Les caractères extérieurs du Porte-muſc, qui indiquent ſes rapports avec les autres Quadrupèdes, ſont les pieds-fourchus, les deux longues dents canines, & les huit dents inciſives de la mâchoire du deſſus, ſans qu'il y en ait dans celle du deſſous. Par ces caractères, le Porte-muſc reſſemble plus au Chevrotain qu'à aucun autre animal; il en diffère, en ce qu'il eſt beaucoup plus grand, car il a plus d'un pied & demi de hauteur, priſe depuis le bas des pieds du devant juſqu'au deſſus des épaules, tandis que le Chevrotain n'a guère plus d'un demi-pied.

Les dents molaires du Porte-muſc ſont au nombre de ſix de chaque côté de chacune des mâchoires; le Chevrotain n'en a que quatre. Il y a auſſi de grandes différences entre ces deux animaux, pour la forme des dents molaires & des couleurs du poil. La poche du Muſc fait un caractère qui n'appartient qu'au Porte-muſc mâle; la femelle n'a ni poche de muſc, ni dents canines, ſuivant les obſervations de M. Gmelin, que j'ai déja cité.

Le Porte-muſc que j'ai vu vivant, paroît n'avoir point de queue. M. Gmelin a trouvé, ſur trois individus de cette eſpèce, au lieu de queue, un petit prolongement charnu, long d'environ un pouce. La plupart des Auteurs qui ont décrit cet animal, & qui en ont donné la figure, ne font aucune mention de cette partie; mais d'autres ont fait repréſenter le Porte-muſc avec une queue bien apparente, quoique fort courte. Grew dit qu'elle a deux pouces de longueur; mais il n'a pas obſervé ſi cette partie renfermoit des vertèbres.

Dans la deſcription que M. Gmelin a faite du Porte-muſc, les viſcères m'ont paru reſſemblans à ceux des animaux ruminans, ſur-tout les quatre eſtomacs, dont le premier a trois

convexités, comme dans les animaux ſauvages qui ruminent. Si l'on joint ce caractère à celui des deux dents canines dans la mâchoire du deſſus, le Porte-muſc reſſemble plus, par ces deux caractères, au Cerf, qu'à aucun autre animal ruminant, excepté le Chevrotain, au cas qu'il rumine, comme il y a lieu de le croire.

Ray dit qu'il eſt douteux que le Porte-muſc rumine. Les gens qui ſoignent celui que j'ai décrit vivant, ne ſavent pas s'il rumine: je ne l'ai pas vu aſſez long-temps pour en juger par moi-même, mais je ſais, par les obſervations de M. Gmelin, qu'il a les organes de la rumination, & je crois qu'on le verra ruminer. On ſaura auſſi par la ſuite s'il produira du muſc dans ce pays-ci. J'eſpère qu'il y vivra, parce qu'il eſt bien ſoigné, parce qu'il a réſiſté à la fatigue du tranſport, & que notre climat eſt au moins auſſi bon que celui de la Tartarie Moſcovite, vers le lac Baikal, autour duquel on trouve le Porte-muſc, ſuivant le rapport de Corneille Lebrun & de M. Gmelin.

On ne fait pas aſſez de tentatives pour naturaliſer, dans notre climat, des animaux étrangers & utiles, ou des races mieux conditionnées que celles que l'on a déjà. La Nature ſe prête à ces ſortes de migrations d'animaux, comme aux tranſplantations des végétaux, lorſqu'on ſait la ménager, en ne lui donnant pas de trop grands obſtacles à ſurmonter, par rapport aux différences des climats, du ſol & des alimens.





Fossier del.
y le Gouaz Sculp.

Fig. 1. Le Porte-Musc. Fig. 2. Le Porte-Musc vu de Face.

SUITE DU PREMIER MÉMOIRE SUR L'INDE.

Par M. LE GENTIL.

Méthode en uſage parmi les Brames de la côte de Coromandel, pour calculer les Éclipſes de Lune.

CETTE méthode s'appelle *Vaquiam*, qui veut dire *nouveau*, dans la langue des Brames ; elle eſt en uſage dans une grande partie de l'Inde. A Benares, dans le Bengale, les Brames emploient une autre méthode ; on la nomme, dans leur langue, *Sittandum*, c'eſt-à-dire, *ancien:* j'ai fait ce que j'ai pu pour me la procurer, mais inutilement.

Les Brames ſuppoſent dans leurs calculs, les années complettes, & les jours complets. Quand ils calculent le lieu du Soleil & de la Lune, ils le font toujours pour la fin de la journée, ou pour le moment du lever du Soleil du jour ſuivant.

Je prendrai pour exemple l'éclipſe totale de Lune du 23 Décembre 1768, qui fut viſible à Pondichéry, pendant toute ſa durée; & que j'obſervai avec beaucoup de ſoin, mais dont on n'a vu à Paris que la fin.

Les calculs que je rapporte ſont faits avec le dernier ſcrupule, ils ont été refaits pluſieurs fois; je les ai toujours trouvés exactement conformes à une ſeconde, & ſeconde & demie près avec l'original, que j'ai de la main de mon interprète, qui l'a mis dans le plus grand détail & le plus grand ordre.

Ce calcul eſt renfermé dans ſeize opérations, compriſes ſous trois Sections. Je conſerve les trois Sections; mais je diminue le nombre des opérations, parce que j'ai vu qu'on le pouvoit faire, ſans nuire à la clarté que j'ai voulu répandre dans cette méthode.

SECTION PREMIÈRE.

Pour trouver le Chouddhadinam.

Les Brames entendent par le *Chouddhadinam*, les jours complets écoulés depuis l'époque *Calyougam*, jusqu'au temps proposé inclusivement ; c'est ce qu'ils calculent en cette manière.

1.° *Trouver les années écoulées depuis l'époque* Calyougam, *jusqu'au commencement de l'année proposée; ainsi que l'année de la période de soixante ans.*

J'ai dit qu'en 1761 complet, il s'étoit écoulé, selon les Brames, 4 mille 863 ans de l'époque du quatrième âge; la différence des deux façons de compter, est 3102: cette différence doit toujours nous servir pour réduire nos années à la façon de compter des Brames, & elle est toujours additive.

L'année proposée pour l'Éclipse est 1768, ou 1767 complet. Y ajoutant 3102, on a 4869 pour l'année proposée, selon la façon de compter des Brames; ainsi l'Éclipse est arrivée dans l'année courante 4870, qui répond à l'année courante de l'Ere Chrétienne 1768 : on trouve ci-devant une Table toute faite, de cette réduction pour dix années; on peut étendre cette Table aussi loin qu'on le jugera nécessaire.

Pour savoir à quelle année de la période de soixante ans répond l'année 4869 de l'époque Calyougam, divisez ce nombre par 60, & sans avoir égard au quotient, remarquez le reste 9; ce nombre 9 indique que l'Éclipse est arrivée dans la dixième année de la période de soixante ans.

2.° *Trouver les Heures, Minutes & Secondes, écoulées depuis l'époque* Calyougam, *jusqu'au dernier moment de l'année proposée, lequel sera en même temps le commencement de l'année courante.*

Multipliez l'année complète..........	4869. 00ʰ 00′ 00″
par la longueur de l'année solaire......	365ʲ 15. 31. 15
le produit sera.........................	1,778444. 30. 56. 15
ôtez-en la quantité constante..........	2. 8. 51. 15
le reste..................................	1,778442. 22. 5. 00

sera le temps écoulé que l'on cherche.

Divisez le nombre de jours par 7, il restera le nombre 1, qui exprime un jour complet; ce nombre répond, dans la Table des jours de la semaine, au Samedi; donc l'année suivante 4870, a commencé le Samedi 22ʰ 5′ 00″ après le lever du Soleil, dans ledit jour de Samedi. Si l'on vouloit savoir quel jour de la semaine commencent les autres mois de l'année, il faut ajouter la valeur de ces mois prise dans la Table première, qu'on trouve ci-devant à l'article de la *longueur de l'année*, &c.

Par exemple, je veux savoir quel jour de la semaine a commencé le mois de Mai.

A l'instant du commencement du mois d'Avril......	1ʲ 22ʰ 5′
j'ajoute la valeur de ce mois..................	30. 55. 32
la somme est....................................	32. 17. 37

Divisant 32 par 7, le reste 4 indique que le mois de Mai a commencé par un Mardi.

Pour avoir le jour par où a dû commencer le mois de Juin, on se rappellera qu'il est resté 4ʲ 17ʰ 37′ qui indiquent que le mois a commencé un Mardi 17ʰ 37′ après le lever du Soleil.

On écrira....................................	4ʲ 17ʰ 37′
ensuite la durée de Mai de..................	31. 24. 12
la somme sera................................	35. 41. 49

Divisant 35 par 7, il ne reste rien; ce qui fait voir que le mois a commencé un vendredi 41^h $49'$ après le lever du Soleil.

3.° *Trouver les Jours, Heures, Minutes & Secondes, écoulées depuis l'époque* Calyougam, *jusqu'au mois de Novembre complet de l'année courante* 4870; *ce qui sera aussi le commencement du mois de Décembre.*

Au nombre que l'on vient de trouver...	$1,778442^j$ 22^h $5'$ $00''$
ajoutez la valeur des huit signes écoulés (vous la trouverez dans la Table seconde intitulée, *de la somme des mois)*, vous aurez pour 8 signes, ou 8 mois.....	246. 18. 37. 00
La somme est..........................	1,778688. 40. 42. 00

C'est la quantité que l'on cherche; divisez actuellement le nombre des jours par 7, reste 2 : voyez dans la Table des jours de la semaine, le nombre 2 y répond au Dimanche; donc le mois de Décembre de l'année courante 4870, a commencé un Dimanche 40^h $42'$ $00''$ après le lever du Soleil.

4.° *Trouver ce qu'il faut ajouter pour avoir le* 12 *de Décembre complet.*

Le mois de Décembre de l'année courante 4870 a commencé, comme nous l'avons dit, un Dimanche 40^h $42'$ $00''$ après le lever du Soleil. Pour avoir le 12 complet au lever du Soleil, moment où commence le 13; prenez le complément de 40^h $42'$ $00''$ à 60^h, vous aurez 19^h $18'$ $00''$.

à..............................	$1,778688^j$ 40^h $42'$ $00''$
ajoutez........................	12. 19. 18. 00
& vous aurez...................	1,778701. 00. 00. 00

c'est ce que l'on appelle *Chouddhadinam*, jours purs, simples ou entiers de *Chouddha*, qui signifie purs, & *dinam* jours.

Dans

Dans cet exemple, j'ai ſuppoſé la réduction faite, de notre façon de compter, à celle des Brames; c'eſt-à-dire que j'ai ſuppoſé que l'Éclipſe eſt arrivée le 12 du mois de Décembre Indien.

Pour trouver ſoi-même cette réduction, on ſait que l'Éclipſe eſt arrivée le 23 Décembre, & que le mois de Décembre a commencé chez les Indiens par un Dimanche.

Cherchez dans les Éphémérides, entre le 7 & le 14 de Décembre incluſivement, vous trouverez que le 11 fut un Dimanche; ajoutez un jour, parce que l'année fut biſſextile ſelon notre façon de compter; donc, le 23 Décembre répond au 12 Indien.

SECTION SECONDE.

Pour trouver le Dithy.

Par le *dithy,* les Brames entendent l'âge de la Lune; or, toutes les opérations de cette ſeconde ſection mènent à connoître cet âge.

1.° *Trouver le* Souria-ſtoutham, *qui ſignifie mot-à-mot le lieu du Soleil.*

Il faut ici ſe rappeler quatre choſes:

La première, que la longitude du Soleil ſe calcule toujours, ſelon cette méthode, pour le moment du lever de cet Aſtre.

La ſeconde, que cette même longitude ſe compte dans les conſtellations du Zodiaque, & non dans les ſignes du Zodiaque; c'eſt-à-dire, que pour calculer le lieu du Soleil, les Brames partent du premier point du Zodiaque mobile.

La troiſième, que l'année aſtronomique des Brames commence à l'arrivée du Soleil dans la conſtellation du Bélier, le 1.er du mois d'Avril.

La quatrième, que les ſignes ont la même valeur que les mois, & les degrés la même que les jours; les heures, minutes & ſecondes de la journée la même valeur que les minutes, ſecondes & tierces du mouvement du Soleil, ou de ſa longitude. Cette réduction ne doit pas ſurprendre, puiſque l'on compte ici 60 heures dans un jour, auſſi-bien

que 60 minutes pour le mouvement moyen du Soleil dans un jour. Donc, le mouvement moyen du Soleil eſt d'un degré par jour, ſelon les Indiens; d'une minute par heure, &c.

Ces principes une fois poſés, voici le procédé des Brames.

Le temps propoſé eſt le 12 de Décembre complet, ou le 13, 0^h $0'$ avant le lever du Soleil. Depuis le premier d'Avril juſqu'à cet inſtant il s'eſt donc écoulé 8 mois 12^j 19^h $18'$. Or, tout ceci change de dénomination, & devient 8^s 12^d $19'$ $18''$; c'eſt ce qu'on peut appeler la longitude moyenne du Soleil, à laquelle les Brames font une petite correction, qu'ils nomment *Yoquiathy*, pour avoir le vrai lieu du Soleil.

TABLE des Brames pour l'Équation du Soleil.

			ÉQUATION pour la première huitaine du Mois. 9.	ÉQUATION pour la deuxième huitaine du Mois. 17.	ÉQUATION pour la troiſième huitaine du Mois. 25.	ÉQUATION pour le reſte du Mois.	
			M.	M.	M.	M.	
12.	♓	Mars	2.	4.	7.	10.	—
1.	♈	Avril. . . .	11.	14.	16.	17.	—
2.	♉	Mai.	19.	21.	22.	24.	—
3.	♊	Juin.	24.	25.	25.	24.	—
4.	♋	Juillet . . .	24.	23.	22.	21.	—
5.	♌	Août. . . .	19.	17.	15.	13.	—
6.	♍	Septembre.	11.	8.	6.	3.	—
7.	♎	Octobre...	2.	1.	3.	5.	+
8.	♏	Novembre.	6.	8.	9.	10.	+
9.	♐	Décembre.	10.	11.	11.	11.	+
10.	♑	Janvier. . .	11.	9.	8.	7.	+
11.	♒	Février. . .	6.	4.	2.	0.	+

Cette Table eſt conſtruite de façon qu'on n'y trouve l'équation que de huit jours en huit jours. Pour cette raiſon, les Brames ſuppoſent au haut de chaque colonne 9, 17, 25; voici la manière de s'en ſervir.

Si les degrés du ſigne courant ſont au-deſſous de 8 ou moindres que 8, il faut prendre les minutes de l'équation qui répondent à la première huitaine, & faire cette analogie. Huit jours ſont au nombre des minutes de la première huitaine, comme les degrés, minutes & ſecondes du ſigne courant, ſont à un quatrième terme, qui ſera l'équation que l'on cherche, additive ou ſouſtractive, ſelon les ſignes + ou —.

Si les degrés du ſigne courant ſont au-deſſus de 8, & moindres que 16, on prend; 1.° les minutes de la première huitaine, on les met à part, & on les garde; 2.° on ſouſtrait huit jours ou huit degrés du nombre de degrés du ſigne courant, & avec le reſte on fait l'analogie que l'on vient de voir; 3.° on ajoute le quatrième terme au nombre de minutes de la première huitaine que l'on a miſe à part. La ſomme donne l'équation que l'on cherche.

Si les degrés du ſigne courant ſont au-deſſus de 16, & moindres que 24, on prend, 1.° les minutes de la première & ſeconde huitaine, on en fait une ſomme que l'on garde; 2.° on retranche 16 degrés du lieu du Soleil, après quoi l'on opère comme ci-deſſus, & de même lorſque les degrés du ſigne courant ſont au-deſſus de 24; c'eſt-à-dire qu'il faut toujours ajouter enſemble les équations qui répondent aux huitaines écoulées, pour les joindre à celle qui convient à la huitaine courante.

Lorſque le Soleil eſt dans la Balance, ou lorſqu'il a paſſé le 8 d'Octobre, comme l'équation change de ſigne, il y a une attention à faire pour tout le reſte du mois; il faut d'abord ôter du lieu du Soleil les deux minutes de l'équation qui convient à la première huitaine, & opérer ſur le reſte comme ci-deſſus.

Dans l'exemple propoſé, le Soleil eſt dans $8^{ſ}\ 12^{d}\ 19'\ 18''$. je trouve dans la Table 10 minutes, qui répondent aux

huit premiers jours du mois; enſuite j'ôte 8 degrés de 12^d $19' 18''$, reſtent 4^d $19' 18''$. Je dis enſuite, 8 jours ou 8 degrés ſont à 11 minutes qui répondent, dans la Table, à la ſeconde huitaine, comme 4^d $19' 18''$ ſont à $5' 57''$, qui mis avec les 10 minutes de la première huitaine, donnent $15' 57''$ pour l'équation du Soleil : ajoutant ces $15' 57''$ à 8^s 12^d $19' 18''$, on a le lieu vrai du Soleil dans 8^s 12^d $35' 15''$.

La forme de la Table, pour l'équation du Soleil, eſt fort ſingulière; on ne voit pas d'abord ſur quel principe elle a pu être conſtruite; on voit ſeulement qu'elle eſt faite pour corriger une fauſſe ſuppoſition que font les Brames dans le calcul du lieu du Soleil : ils ſuppoſent en effet les jours du mois égaux en durée; ce qui n'eſt pas vrai, même ſelon leurs principes.

Ils ſont, par la même raiſon, obligés de corriger le mouvement journalier du Soleil. Ils ne ſe ſervent jamais des mouvemens horaires. Calculant toujours pour le moment du lever du Soleil, ils ſe ſervent du mouvement diurne qu'ils appellent *mouvement journalier.* Pour avoir celui du Soleil, ils appliquent à ſon moyen mouvement l'équation qui convient au jour propoſé.

Dans l'exemple préſent, on prend dans la Table, 11 minutes, qui répondent à la ſeconde huitaine du ſigne courant : diviſant ce nombre 11 minutes par 8, on trouve $1' 22'' \frac{1}{2}$; équation qu'il faut ajouter à 1 degré ou 60 minutes, pour avoir le mouvement journalier du Soleil de $61' 22'' \frac{1}{2}$.

2.° *Trouver le* Chandra-ſtoutham, *mot-à-mot le lieu de la Lune.*

La longitude de la Lune eſt très-aiſée à trouver, & demande peu de temps.

Pour la calculer, les Brames ont quatre périodes avec le ſecours deſquelles ils trouvent des jours ſemblables en valeur à ceux du Soleil, qu'ils convertiſſent par conſéquent en ſignes, degrés, minutes & ſecondes. La quatrième de ces périodes

eſt de deux cents quarante-huit jours. Cette période révolue, les Brames ſuppoſent que la Lune revient au même point du ciel.

Périodes Lunaires des Brames, qui leur ſervent de diviſeur.

	Jours.
Première période	1600984.
Seconde période	12372.
Troiſième période	3031.
Quatrième période	248.

Périodes Lunaires des Brames, qui leur ſervent de multiplicateur.

	Mois.	Jours.	H.	M.
Première période	7.	2.	00.	07
Seconde période	9.	27.	48.	10
Troiſième période	11.	7.	31.	1
Quatrième période	00.	27.	44.	6

Ces périodes étant ſuppoſées, diviſez, diſent les Brames, le *chouddhadinam* par les quatre diviſeurs, ou périodes lunaires données. Cette diviſion s'opère de la manière ſuivante; après avoir diviſé le *chouddhadinam* par la première période lunaire donnée, diviſez encore ce qui reſte par la ſeconde période: cette ſeconde diviſion achevée, diviſez encore le reſte par la troiſième période; & enfin le troiſième reſte, diviſez-le par la quatrième période donnée: cette opération vous donne quatre quotiens; multipliez-les par les quatre autres périodes ou multiplicateurs donnés, vous aurez quatre produits que vous ajouterez enſemble.

Il peut arriver que lorſqu'on eſt parvenu à la troiſième diviſion, le quotient de cette troiſième diviſion eſt un zéro; mais comme zéro ne ſe peut multiplier, on met zéro pour le troiſième produit.

Si après la quatrième diviſion vous avez un reſte, cherchez avec ce reſte dans la Table qui a pour titre, *Mouvement journalier de la Lune, pendant la période de 248 jours*, ce qui répond à ce reſte; ajoutez-le aux quatre réſultats donnés,

& vous aurez la longitude de la Lune. Cette longitude ſera exprimée en mois, jours, heures & minutes; mais ces mois vaudront autant que des ſignes; les jours vaudront des degrés, &c. comme dans le calcul du lieu du Soleil. Voici les noms que les Brames donnent aux quatre quotiens; & pour exprimer le produit de ces quotiens par les périodes données, ils diſent: chaque *vedam* vaut une période lunaire; chaque *raſſam* une période, &c.

Vedam...........................	1.
Raſſam..........................	14.
Calam...........................	1.
Devaram.........................	5.

Dans l'exemple propoſé, nous avons trouvé le *chouddhadinam* de 1778701 jours. Si nous faiſons les opérations énoncées ci-deſſus, nous aurons les quatre quotiens 1 : 14 : : 1 : 5, qui multipliés par les périodes données ci-deſſus, on aura les produits tels qu'on les voit dans la Table ſuivante.

TABLE du Calcul de l'âge de la Lune ſelon les Brames.

1778701.	1600984. 1.ere période.	
1600984.	1 Vedam	= 7s 2d 0' 7"
177717.	12372. 2.e période.	
12372.	14 Raſſam	= 6. 29. 14. 20.
53997.	3031. 3.e période.	
49488.	1 Galam	= 11. 7. 31. 1.
4509.		
3031.		
1478.	248. 4.e période.	
1240.	5. Devaram	= 4. 18. 40. 30.
238	jours de reſte.....	= 8. 19. 46. 0.
Donc, longitude de la Lune.....		2. 17. 11. 58.

Les Brames l'appellent *sandradrouvam*, qui veut dire, *terme, total, but.* A cette longitude ils appliquent deux corrections. La première se trouve dans la Table suivante; on la prend avec la longitude du Soleil. Cette correction est toujours additive. Les signes + & — que l'on voit à côté ne regardent que la troisième colonne, qui marque la variation d'un jour à l'autre. Cette Table est tout-à-fait singulière par le titre que lui donnent quelques Indiens. Ils prétendent que c'est une réduction de différence de méridiens; cette Table est en effet intitulée:

Différence en longitude du premier Méridien qui est au milieu de l'île de Ceylan, pour Tirvalour, à quatre lieues à l'ouest de Négapatnam, ville maritime aux Hollandois, dans la côte de Coromandel.

Tel est le titre de cette Table que je conserve dans mes manuscrits, écrit de la main même de mon Interprète. J'ai aussi eu cette Table d'une autre source; mais elle commence par le mois d'Avril; & le titre ne dit rien de plus que ce que l'on voit ci-après.

TABLE dont se servent les Brames pour corriger la Longitude de la Lune.

MOIS & SIGNES.			MINUTES continues pour les Mois consécutifs. *Dessandragalé.*	MINUTES pour chaque Mois. *Andragalé.*	SECONDES pour chaque Mois. *Andravihelé.*
10.	♑	Janvier ...	... 29	.... 1	2 —
11.	♒	Février ...	... 26	.... 3	6 —
12.	♓	Mars	... 21	.... 5	10 —
1.	♈	Avril	... 15	.... 6	12 —
2.	♉	Mai	... 10	.... 5	10 —
3.	♊	Juin	... 7	.... 3	6 —
4.	♋	Juillet ...	... 8	.... 1	2 +
5.	♌	Août	... 11	.... 3	6 +
6.	♍	Septembre.	... 17	.... 6	12 +
7.	♎	Octobre...	... 21	.... 4	8 +
8.	♏	Novembre.	... 28	.... 7	14 +
9.	♐	Décembre.	... 30	.... 2	4 +

Dans l'exemple présent, nous avons trouvé la longitude du Soleil de $8^s\ 12^d\ 35'\ 15''$. L'équation qui répond dans la Table à 8 mois ou 8 signes complets, est de 28 minutes. On trouve dans la même Table l'équation pour un jour ou pour un degré, de 4 secondes additives, ce qui donne 48 secondes pour 12 jours, & $2''\ 21'''$ pour $35'\ 15''$; donc l'équation pour la longitude de la Lune est de $28'\ 50''$, on supprime les tierces quand elles sont au-dessous de 30; lorsqu'elles sont au-dessus, on les supprime également, mais on ajoute une seconde.

On a trouvé la longitude de la Lune de........	$2^s\ 17^d\ 11'\ 58''$
y ajoutant l'équation..........................	+.... 28. 50
on a le lieu de la Lune, 1.° corrigé de.........	2. 17. 40. 48

La

La ſeconde équation ou correction de la longitude de la Lune ſe trouve ainſi. Dans la Table intitulée, *du Mouvement journalier de la Lune, pendant la période de 248 jours;* vous trouverez avec le reſte de la quatrième diviſion (238).

Le mouvement journalier de la Lune de..............	840′
Prenez auſſi ſon mouvement moyen de................	791.
Otez l'un de l'autre, la différence eſt..................	49.

Remarquez bien cette différence; ſi elle appartient au moyen mouvement de la Lune, ou bien ſi, comme dans l'exemple préſent, la différence eſt du mouvement journalier, prenez le quotient de la quatrième diviſion (dans l'exemple préſent 5), multipliez-le par 32 tierces, vous aurez 160 tierces, qui multipliées par 49 minutes, différence trouvée ci-deſſus entre le mouvement vrai & le mouvement moyen de la Lune, donneront 7840 tierces, qui font 2′ 10″ 40‴. Il faut ajouter cette correction à la longitude de la Lune, lorſque la différence trouvée appartient, comme dans cet exemple, au mouvement journalier de la Lune; ſi la différence eût été du mouvement moyen, il eût fallu ſouſtraire l'équation.

Lieu de la Lune, 1.° corrigé.................	2ſ 17d 40′ 48″
2.e correction additive.........................	2. 11
Donc, longitude vraie de la Lune.............	2. 17. 42. 59

3.° *Trouver le* Dithy-antham, *c'eſt-à-dire l'âge de la Lune complet.*

C'eſt ce que nous appelons l'inſtant de l'oppoſition.

De la longitude de la Lune..................	2ſ 17d 42′ 59″
ôtez la longitude du Soleil....................	8. 12. 35. 15
La différence eſt........................	6. 5. 7. 44

ou 185d 7′ 44″; diviſez les 185d par 12, le quotient 15 indique l'âge de la Lune complet ou ſon oppoſition, & le ſurplus 5d 7′ 44, fait voir que la Lune eſt déjà avancée dans ſon décours. Réduiſez ce ſurplus en tierces, vous aurez

1 million 107 mille 840 tierces qui vont ſervir de dividende.

Du mouvement journalier de la Lune.	840′ 00″ 00‴
ôtez celui du Soleil de.	61. 22. 30
le reſte ſera de	778. 37. 30
ajoutez	1.
& vous aurez	778. 38. 00

réduiſez le tout en ſecondes, vous aurez 46718 ſecondes.

Ces opérations finies, diviſez la diſtance de la Lune au Soleil réduite en tierces, par la différence du mouvement de la Lune au Soleil, réduite en ſecondes, le quotient donnera des heures.

Plus, multipliez le reſte par 60, & diviſez le produit par le même diviſeur, le quotient exprimera des minutes.

Plus, multipliez le reſte, s'il s'en trouve, par 60, & diviſez par le même diviſeur; le quotient exprimera des ſecondes; le reſte ſe néglige. Otez les heures, minutes & ſecondes, que vous aurez trouvées, de 60 heures, le reſte donnera le moment de l'âge complet, c'eſt-à-dire, la fin du quinzième jour complet de la Lune; ou enfin, ſelon nous, l'inſtant de l'oppoſition.

La raiſon de cette opération, & pourquoi les Brames enſeignent de toujours ſouſtraire la quantité trouvée, eſt parce qu'ils ſuppoſent la diſtance de la Lune au Soleil, plus grande que ſix ſignes; c'eſt-à-dire que dans leurs exemples, la Lune eſt toujours ſuppoſée avoir paſſé le terme de ſon âge complet, & par conſéquent ſon oppoſition; car ſi on trouvoit que la diſtance de la Lune au Soleil fût moindre que ſix ſignes, il faudroit refaire le calcul pour le jour ſuivant.

Suite du Calcul de l'âge complet de la Lune pour l'exemple présent.

1107840‴	
93436.	46718″
173480.	23 heures.
140154.	
33326.	
60.	46718.
1999560.	42 minutes.
186872.	
130840.	
93436.	
37404.	
60.	46718.
2244240.	48 secondes.
186872.	
375520.	
373744.	
1976.	

Quoique les Brames enſeignent de pouſſer le calcul juſqu'aux ſecondes, ils ſe contentent ici des minutes d'heures pour réſultat; cette exactitude eſt ſuffiſante pour eux, puiſque 30 ſecondes d'heures Indiennes, ne font que 12 ſecondes Européennes, & que le Soleil ne fait, ſelon les Brames, qu'une ſeconde de degré par minute d'heure Indienne; donc l'âge complet de la Lune, ou ſon oppoſition au Soleil, eſt arrivée $23^h\ 43'$ avant le lever du Soleil pour le 13 Décembre, ou bien le 12, $36^h\ 18'$ après le lever du Soleil.

Il faut actuellement calculer la longitude du Soleil & celle de la Lune, qui conviennent à l'heure trouvée, afin de voir ſi la différence eſt de ſix ſignes juſtes.

L'heure trouvée ci-dessus est $23^h\ 42'\ 43''$ avant le lever du Soleil pour le 13 ; ce qui se change en $23'\ 43''$ de degré.

Avec la Table de l'équation du Soleil, calculez l'équation qui convient au 12 Décembre pour $23'\ 43''$, & vous trouverez 33 secondes additives; les ajoutant à $23'\ 43''$, vous aurez $24'\ 16''$ qu'il faut ôter de la longitude du Soleil trouvée ci-dessus.

Or, la longitude du Soleil trouvée ci-dessus est de. .	$8^s\ 12^d\ 35'\ 15''$
ôtant.	24. 16
Donc, longitude du Soleil pour le moment de l'opposition.	8. 12. 10. 59

Pour avoir la longitude de la Lune pour le même instant, faites cette analogie.

Le mouvement journalier de la Lune de 840 minutes, est à 60 heures, comme $23^h\ 43'$ est à un quatrième terme, que vous trouverez de $5^d\ 32'\ 2''$; appliquez-y la première correction que vous trouverez de 1 seconde pour $24'\ 16''$, & vous aurez $5^d\ 32'\ 3''$, qu'il faut ôter de la longitude de la Lune trouvée ci-dessus.

Or, la longitude de la Lune trouvée ci-dessus est de	$2^s\ 17^d\ 42'\ 59''$
ôtant.	5. 32. 3
on a la longitude de la Lune pour le moment de l'opposition.	2. 12. 10. 56
Longitude du Soleil.	8. 12. 10. 59

Comme ces deux lieux ne diffèrent que de 3 secondes, & & que dans aucun cas la différence n'est jamais que de quelques secondes, les Brames se contentent d'égaliser, comme ils disent, les deux longitudes, ils appellent cette opération *Oubaya-sloutha-samscaram*, concordance des deux lieux.

Pour cet effet, ils ajoutent ici 4 secondes au lieu de la Lune, 1 seconde au lieu du Soleil, & 1 minute à l'heure supposée; donc le vrai moment de l'âge complet de la Lune est arrivé le 12 Décembre $36^h\ 18'$ après le lever du Soleil.

Le Soleil & la Lune étant dans.	$8^s\ 12^d\ 11'\ 00''$
	2. 12. 11. 00

SECTION TROISIÈME,

Dans laquelle on enſeigne tous les calculs qui ont rapport à l'Éclipſe.

1.° *Trouver le* Ragon-ſtoutham.

C'eſt ce que nous nommons *le lieu du nœud aſcendant de la Lune. Ragon* eſt le nom du *Dragon* ou *Serpent*, que les Indiens ſe figurent qui veut dévorer la Lune, & qui leur fait faire, pendant les Éclipſes, toutes les extravagances que la plupart des Voyageurs ont vues, & nous ont décrites.

C'eſt-là l'origine de la queue & de la tête du Dragon, que l'on trouve dans les anciens Livres d'Aſtrologie. Les Tamoults racontent, au ſujet de ce Dragon, une aſſez plaiſante hiſtoire. Je ne la place point ici, parce que j'ai cru qu'elle appartenoit plus à l'article qui traite de la religion des Indiens, qu'à ce Traité d'Aſtronomie.

Pour avoir donc le complément du nœud,

multipliez le *chouddhadinam* par....................	*600.*
ajoutez au produit.................................	1758576;
diviſez le tout par................................	339618.

Le quotient diviſé par 12 donnera des ſignes; plus, multipliez le reſte par 30, & diviſez par le même diviſeur, le quotient donnera des degrés; plus, multipliez le reſte par 60, & diviſez par le même diviſeur, le quotient donnera des minutes; plus, multipliez le reſte par 60, & diviſez par le même diviſeur, le quotient donnera des ſecondes: l'on peut voir le calcul ci-après.

TABLE représentant le calcul du lieu du nœud ascendant de la Lune.

Chouddhadinam....	1778701.		
	600.		
	1067220600.		
Ajoutez.......	1758576.		
	1068979176.	339618.	12.
	1018854.	4147 signes.	262.
	501251.	24.	
	339618.		
	1616337.	74.	
	1358472.	72.	
	2578656.	27.	
	2377326.	24.	
	201330.	3 signes.	
	30.		
	6039900.		
	339618.	339618.	
	2643720.	17 degrés.	
	2377326.		
	266394.		
	60.		
	15983640.		
	1358472.	339618.	
	2398920.	47 minutes.	
	2377326.		
	21594.		
	60.	339618.	
	1295640.	4 secondes.	
	1018854.		
	276786.		

Le complément du nœud, est donc de........ $3^{s}\ 17^{d}\ 47'\ 4''$

Et le nœud ascendant dans.................. 8. 12. 12. 56.

Pour avoir le lieu du nœud pour l'inſtant de l'âge complet de la Lune, il faut faire cette analogie. Le mouvement du nœud en 60 heures (191^{s}) eſt à 60 heures, comme la différence trouvée ci-deſſus ($23^{h} 43'$) entre l'inſtant de l'oppoſition & celui du 12 Décembre complet, eſt à un quatrième terme qui donne $1' 15''$ à ajouter au lieu du nœud, qui devient par conſéquent $8^{s} 12^{d} 14' 11''$.

Les Brames corrigent cette époque, en y ajoutant conſtamment 40 minutes; donc le lieu du nœud aſcendant étoit alors $8^{s} 12^{d} 54' 11''$.

2.° *Trouver le* Vichepam.

C'eſt ce que nous nommons *la latitude de la Lune.*

Du lieu de la lune	2^{s} 12^{d} $11'$ $00''$
ôtez le lieu du nœud	8. 12. 54. 11
vous aurez le *patona-chandren*	5. 29. 16. 49

Patona-chandren, veut dire la Lune offenſée du Dragon, de *Pat,* Serpent, *ona*, offenſer, & *chandren,* Lune.

Prenez le complément à ſix ſignes du *Patonachandren,* pour avoir le *Bouja* de $43' 11''$. C'eſt ce que nous pouvons appeler l'*argument de la latitude;* le *Bouja* étant la diſtance de la Lune à ſon nœud le plus proche; avec le *Bouja* vous trouverez dans la Table le *Vichepam,* ou la latitude de la Lune, de $0^{d} 3' 17' 48'''$.

4.° *Trouver le* Mana-yog-artham.

C'eſt ce que nous appelons *la ſomme des demi-diamètres de l'ombre & de la Lune :* on trouve cette ſomme en calculant.

1.° Le *chandra mandalam,* c'eſt-à-dire le diamètre de la Lune. *Chandra mandalam* ſignifie proprement cercle, orbite de la Lune.

Diviſez le mouvement journalier de la Lune ($840'$) par 25; plus, multipliez le reſte par 60 & diviſez par 25, vous aurez le *chandra mandalam* ou diamètre de la Lune $33' 36''$.

2.° Le *chaya mandalam.* C'eſt le demi-diamètre de l'ombre.

Multipliez par 5 le diamètre de la Lune 33′ 36″, vous aurez, en y ajoutant le *maya chaya,* (1′) 85 minutes.

3.° Ajoutez le diamètre 33′ 36″, la moitié de la ſomme ſera le *mana-yog-artham* (ſomme des demi-diamètres de la Lune & de l'ombre) de 59′ 18″.

4.° *Trouver le* Grahana-pramanam.

C'eſt la grandeur de l'Éclipſe.

De la ſomme des demi-diamètres..................	59′ 18″ 00‴.
ôtez la latitude............................	3. 17. 48
le reſte eſt	56. 00. 12

ou 201612 tierces. C'eſt un dividende. Réduiſez auſſi en tierces le diamètre de la Lune 33′ 36″, pour avoir un diviſeur qui ſera de 120960 tierces; la diviſion achevée, vous aurez 1 au quotient.

Multipliez le eſte, 80652, par 60, & diviſez le produit, 4839120, par le même diviſeur 120960, le quotient ſera 40. Le reſte, 720, peut ſe négliger.

Donc la grandeur de l'Éclipſe, dans l'exemple préſent, a dû être d'un entier & $\frac{40}{60}$.e de l'entier ou 8 doigts, c'eſt-à-dire de 20 doigts juſtes.

5.° *Trouver le* Grahana-calam, *c'eſt-à-dire le temps de l'Éclipſe.*

Par ce temps de l'Éclipſe, les Brames entendent la demi-durée; d'où ils tirent le commencement & la fin. Ils appellent le commencement *grahana ſparſa calam*, & *ſparſa* ſignifie *tact.* Ils nomment la fin *grahana mocqua calam*, & *mocqua* ſignifie la *délivrance.* C'eſt comme s'ils diſoient, *temps du tact de l'éclipſe,* & *temps de la délivrance de l'éclipſe.* Tous ces mots tiennent chez eux à ces anciennes ſuperſtitions avec

avec lesquelles ils endorment les peuples, qu'un dragon ou grand serpent cherche à dévorer la Lune.

Le commencement & la fin de l'Éclipse sont, selon les Brames, des temps ordinaires de l'Éclipse, comme appartenans à toute sorte d'Eclipses; l'immersion & l'émersion (comme dans l'exemple présent) sont des temps extraordinaires.

La durée de l'Éclipse se trouve ainsi:

Quarrez le demi-diamètre de l'ombre & de la Lune 59′ 18″; quarrez également la latitude de la Lune 3′ 18″, & vous aurez	3516′ 29″ 24‴.
&	10. 53. 24
ôtez l'un de l'autre, il reste	3505. 36. 00

Tirez-en la racine quarrée, elle est de 59′ 12″ 20‴. Réduisez-la en quartes, pour avoir un dividende de 12 millions 788 mille 640 quartes.

Nous avons trouvé ci-dessus, la différence du mouvement journalier de la Lune au Soleil, de 778′ 37″ 30‴, qui font 2 millions 803 mille 50 tierces, & qui servent de diviseur.

Achevez l'opération comme vous avez fait les précédentes; & vous aurez au quotient 4h 34′ pour le *grahanar-tha-calam*, ou la demi-durée de l'Éclipse.

Par un calcul semblable, vous parviendrez à trouver le temps de la demeure dans l'ombre.

Du demi-diamètre de l'ombre	85′ 00″
ôtez le diamètre de la Lune	33. 36
il reste	51. 24
prenez-en la moitié	25. 42
quarrez-la pour avoir	660. 29,24
ôtez-en le quarré de la latitude	10. 53,24
il reste	649. 36,00
extrayez la racine quarrée	25. 29,00

qui font 5 millions 504 mille 400 quartes pour dividende. Le diviseur est toujours le même, c'est-à-dire 2 millions 803 mille 50 tierces.

Achevez l'opération, & le quotient donnera l'*antacarartha-calam*, ou la demi-durée de l'obſcurité totale de 1^h $58'$.

Les Brames confondent, dans leurs calculs, le moment de l'oppoſition avec celui du milieu de l'Éclipſe. Ils n'ont point appris à diſtinguer ces deux temps, ou-bien ils l'ont oublié. Donc en ſuppoſant l'oppoſition

le 12 Décembre à	36^h $18'$
on aura le commencement à	31. 44
l'immerſion totale à	34. 20
l'émerſion à	38. 16
la fin à	40. 52

Pour réduire ces heures, il faut ſe rappeler que la façon de compter des Brames eſt d'un lever du Soleil à l'autre lever. Il faut donc actuellement chercher le temps que le Soleil reſte ſur l'horizon le 12 Décembre pour le parallèle de Tirvalour. En ſuivant la méthode des Brames, que nous avons expliquée plus haut, vous trouverez que le 12 Décembre, le jour eſt à Tirvalour, de 28^h $23'$, & que le midi arrive à 14^h $11'$ $\frac{1}{2}$; ſur ces principes vous trouverez que

le commencement de l'Éclipſe eſt arrivé après le coucher du Soleil, à	3^h $21'$
l'immerſion à	5. 57
l'émerſion à	9. 53
la fin à	12. 29
durée de l'Éclipſe	9. 8
durée de l'obſcurité totale	3. 56

Convertiſſant ce temps en heures Européennes *(voyez la Table ci-après)*, on a

le commencement à	1^h $20'$ $24''$
l'immerſion à	2. 22. 48
le milieu à	3. 10. 00
l'émerſion à	3. 57. 48
la fin à	4. 59. 36

Durée de l'Éclipse	3h 39′ 12″
Durée par les Tables de Mayer	3. 35. 00
Différence	4. 12
Durée de l'obscurité totale	1. 35. 00
Le calcul des Tables de Mayer, donne	1. 38. 45
Différence	3. 45
Grandeur de l'Éclipse	20 doigts.
Par les Tables de Mayer	20. 25M

La longueur du jour étant le 12 Décembre à *Tirvalour* (comme nous l'avons dit) de 28h 23′ Indiennes, ou de 11h 21′ 12″ Européennes, on trouve que le Soleil doit se coucher ce jour-là, pour le parallèle de *Tirvalour*, à 5h 38′ 48″. Ajoutant à cette heure les momens de l'Éclipse réduits en heures Européennes, on a

le commencement à	7h 1′ 00″
l'immersion à	8. 3. 24
l'émersion à	9. 38. 24
la fin à	10. 40. 12

Le tout calculé pour le méridien de *Tirvalour:* or *Tirvalour* est d'environ cinq lieues plus occidental que *Negapatnam*, ville appartenante aux Hollandois, à peu de chose près, sous le même méridien que Pondichéry.

La même Éclipse, calculée par les Tables de Mayer, m'a donné les phases suivantes:

commencement à	1h 30′ 45″
immersion à	2. 28. 15
milieu à	3. 17. 56
émersion à	4. 7. 00
fin à	5. 5. 45

Ce calcul, comparé avec celui des Brames, donne

la différence en longitude entre Paris & *Tirvalour*	5h 32′ 49″
y ajoutant pour la différence entre *Tirvalour* & Pondichéry	0. 1. 0
on aura	5h 33′ 49″

pour la différence des Méridiens entre Paris & Pondichéry, j'ai trouvé	$5^h\ 10'\ 6''$
Donc, l'erreur des Brames, dans cet exemple, est de . . .	23. 43

qui en produisent à peine 13 dans le lieu de la Lune.

Les Brames sont beaucoup moins éloignés de la vérité pour la durée de l'Éclipse, que pour l'instant précis des autres phases. Leur accord avec l'observation pour la durée, est encore digne de remarque.

Durée de l'Éclipse.

		Différence.
Selon les Brames . . .	$3^h\ 39'\ 12''$	$4'\ 42''$
Observée	3. 34. 30	
Selon M. Mayer . . .	3. 35. 00	0. 30

Durée de l'obscurité.

		Différence.
Selon les Brames . . .	$1^h\ 35'\ 00$	$3'\ 30''$
Observée	1. 38. 30	
Selon M. Mayer . . .	1. 38. 45	0. 15

6.° *Trouver le* Grahana-diq, *c'est-à-dire, le rhumb de vent par lequel commence & finit l'Éclipse.*

Pour savoir le côté du disque de la Lune par où l'Éclipse doit commencer & finir, il faut voir ce qu'il reste de différence du *patonachandren,* ou argument de latitude *(voy. sect. IIIe, article II).*

Si ce reste est entre 0 signe & 6 signes, la latitude sera *outra vichepam,* c'est-à-dire *latitude boréale;* l'Éclipse commencera au sud-est & finira au sud-ouest.

Si le reste est entre 6 signes & 12 signes, la latitude sera *daqchana vichepam,* c'est-à-dire *latitude australe;* l'Éclipse commencera au nord-est & finira au nord-ouest.

Mais si le reste est 0 signe, 6 signes ou 12 signes, sans aucunes autres parties de degrés, minutes, &c. ou s'il n'y avoit que peu de différence, comme seroit un degré, en

plus ou en moins, l'Éclipſe commenceroit à l'eſt & finiroit à l'oueſt.

Dans l'exemple préſent, nous avons trouvé le *patonachandren* de $5^{s}\ 29^{d}\ 17'$; & comme la différence pour avoir ſix ſignes eſt très-peu de choſe, l'Éclipſe a dû commencer à l'eſt & finir à l'oueſt.

Nous avons encore calculé, ſelon la même méthode, l'Éclipſe centrale de la Lune du 30 Août 1765 que je vis, & que j'obſervai à l'Iſle-de-France par le temps le plus ſerein. En voici les réſultats bien vérifiés, & calculés juſqu'à la préciſion des ſecondes.

Année complète ſelon le Calendrier Romain	1764.
Ajoûtez la différence conſtante	3102.
Année complète de l'époque *Calyougam*	4866.
de la période de 60 ans, la	6.

L'époque *Calyougam* 4866, multipliée par la longueur de l'année ($365^{j}\ 15^{h}\ 31'\ 15''$), donne

pour la réduction	$1777448^{j}\ 44^{h}\ 22'\ 30''$
ôtez la quantité conſtante	2. 8. 51. 15
il reſte	1777346. 35. 31. 15
pour quatre mois complets, depuis Avril, ajoutez	125. 24. 34. 00
vous aurez les jours écoulés depuis l'époque *Calyougam* juſqu'au 1.er d'Août	1777472. 00. 5. 15

Les jours étant diviſés par 7, il reſte 4, indiquant que le mois d'Août a commencé par un Mardi. Cherchez, dans le calendrier Grégorien, entre le 7 & le 14 d'Août 1765, vous trouverez que le 13 fut un Mardi. Par conſéquent le 30 d'Août répond au 18 Indien. Donc l'Éclipſe eſt arrivée le 18 d'Août, ſelon la façon de compter des Brames, un Vendredi.

à	$1777472^{j}\ 00^{h}\ 5'\ 15''$
Ajoutez	17. 59. 54. 45
La ſomme ſera	1777490. 0. 0. 0

complets, depuis l'époque *Calyougam* jusqu'au 17 d'Août complet de l'année courante 4867.

Longitude moyenne du Soleil..........	4ˢ 17ᵈ 59′ 54″ 45‴.
Équation soustractive................	39. 44. 50
Longitude vraie du Soleil............	4. 17. 20. 9. 55
Et son mouvement journalier de........	00. 58. 7. 30

Pour la Longitude de la Lune.

On trouvera 1. Vedam............	7ˢ 2ᵈ 00′ 3″ 0‴
14. Rassam............	6. 29. 14. 20. 0
1. Calam..............	11. 7. 31. 1. 0
1. Devaram...........	0. 27. 44. 6. 0
19. Reste..............	8. 15. 1. 0. 0
Le lieu de la Lune non corrigé..........	10. 21. 30. 34. 0
Première correction additive............	0. 0. 9. 44. 0
1.° Lieu de la Lune corrigé............	10. 21. 40. 18. 0
Seconde correction additive............	0. 0. 0. 17. 36
2.° Lieu de la Lune corrigé............	10. 21. 40. 35. 36
Et son mouvement journalier de........	824.
Distance de la Lune au Soleil...........	6ˢ 4ᵈ 20′ 25″ 41‴.
Donc l'opposition est passée, & les 4ᵈ 20′ 25″ 41‴ de plus que les 15 jours, ou de plus que six signes, répondent à....	20ʰ 24′ 9″
Complément à 60 heures...............	39. 35. 31
Donc l'opposition est arrivée............	39. 35. 51 après le
lever du Soleil pour le 18.	
Longitude du Soleil pour ce moment....	4ˢ 17ᵈ 00′ 23″ 58‴.
Longitude de la Lune.................	10. 17. 00. 21. 54
Différence..........................	0. 0. 0. 2. 4

Ajoutant 2″ 6‴ à la Longitude de la Lune,
0. 2 à celle du Soleil,
Et.... 2. 0 à l'heure, on aura la concordance des lieux du Soleil & de la Lune...................... { 4ˢ / 10 } 17ᵈ 00′ 24″.

Et le vrai moment de l'opposition, après le lever du Soleil, 39ʰ 35. 53

Pour le nœud.

On trouvera	10ˢ	16ᵈ	24′	00″	14‴
Plus, la correction	0.	0.	40.	0.	0
Donc, lieu vrai du nœud	10.	17.	4.	00.	14
Et la latitude de la Lune de	0.	00.	18.	4.	50
Le diamètre de la Lune	0.	32.	57.	56.	0
Le demi-diamètre de l'ombre	0.	83.	24.	00.	0
Et la somme des demi-diamètres	0.	58.	10.	48.	0

D'où l'on tirera

Le commencement de l'Éclipse à	35ʰ	2′	24″
L'immersion à	37.	37.	48
L'émersion à	41.	33.	58
Et la fin à	44.	9.	22
La longueur du jour sera de	31.	17.	00
Donc, commencement après le coucher du Soleil	3.	45.	24
L'immersion à	6.	20.	48
Le milieu à	8.	18.	53
L'émersion à	10.	16.	58
La fin à	12.	52.	22

En heures Européennes.

Commencement après le coucher du Soleil	1ʰ	30′	10″
Immersion à	2.	32.	19
Milieu à	3.	19.	33
Émersion à	4.	6.	47
Fin à	5.	8.	57
Durée de l'Éclipse	3.	38.	47
Selon Mayer	3.	40.	36
Différence	0.	1.	49
Durée de l'obscurité	1.	34.	28
Selon Mayer	1.	42.	41
Différence	0.	7.	13

Comparées à l'observation.

Durée de l'Éclipse.

		Différence.
Selon les Brames	3h 38′ 47″	0′ 41″
Observée	3. 39. 28	1. 8
Selon M. Mayer	3. 40. 36	

Durée de l'obscurité.

		Différence.
Selon les Brames	1h 34′ 28″	7′ 48″
Observée	1. 42. 16	0. 25
Selon M. Mayer	1. 42. 41	

	Doigts.
La grandeur de l'Éclipse, selon les Brames	21. 7′
Selon M. Mayer	22. 7
Différence	1. 0

Longueur du jour pour le parallèle de Tirvalour, le 18 Août	31d 17′ 00″
En heures Européennes	12. 30. 48
Donc, coucher du Soleil à Tirvalour	6. 15. 24
Ajoutant l'heure du milieu de l'Éclipse	3. 19. 33
Milieu de l'Éclipse à Tirvalour	9. 34. 57
Y ajoutant pour Pondichéry	0. 1. 00
Milieu de l'Éclipse à Pondichéry	9. 35. 57
Différence des méridiens entre Pondichéry & l'île de France (occidentale)	1. 28. 28
Donc, milieu de l'Éclipse à l'île de France	8. 7. 29
Je l'ai observé à	7. 45. 5
Donc, erreur des Brames	22. 24

qui en font environ treize dans le lieu de la Lune; & l'Éclipse a commencé à l'est de la Lune, & a fini à l'ouest.

MÉTHODE

Méthode dont se servent les Brames de la côte de Coromandel pour calculer les Éclipses de Soleil, appliquée à l'Éclipse du 17 Octobre 1762.

Le calcul des Éclipses de Soleil est plus long & plus compliqué que celui des Éclipses de Lune, parce qu'il faut y faire entrer les parallaxes ; or les Brames ne les connoissent point : nous allons voir le calcul qu'ils y substituent.

On propose de calculer l'Éclipse du 17 Octobre 1762.

Ce calcul sera divisé comme celui de la Lune, en trois sections.

Dans la première, on traitera du *chouddhadinam* ou des jours écoulés depuis *calyougam* jusqu'au jour proposé.

La seconde traitera du *dithy* ou âge de la Lune ; c'est-à-dire, de sa conjonction au Soleil.

Dans la troisième, on parlera du *grahanam*, ou des temps de l'Éclipse.

SECTION PREMIÈRE.

Trouver le Chouddhadinam.

DANS la Table intitulée : *des années de l'Ère Chrétienne, qui répondent aux années de l'Époque calyougam*, prenez celle qui répond à l'année complète 1761, vous trouverez 4863 ; ou bien ajoutez 3102 à l'année complète 1761, comme vous avez fait pour les Éclipses de Lune, & vous aurez 4863 ans de l'époque *calyougam*. Réduisez cette époque en jours à raison de $365^j\ 15^h\ 31'\ 15''$, vous aurez, pour le commencement de l'année courante, $1776250^j\ 48^h\ 57'\ 30''$.

Dans la Table *de la valeur des mois de l'année*, prenez ce qui s'est écoulé pour six mois complets, ou depuis le 1.er Avril jusqu'au 1.er Octobre, la somme donnera $186^j\ 54^h\ 6'$ à ajouter, & vous aurez le nombre de jours, d'heures, de minutes & secondes écoulées depuis l'époque *calyougam*, jusqu'au 1.er Octobre de l'année courante 4864, $1776437^j\ 43^h\ 3'\ 30''$. Ayant divisé le nombre de jours par 7, le reste 5

indique un Mercredi par où commença le mois. Cherchez dans le Calendrier grégorien, entre le 7 & le 14 Octobre 1762, vous trouverez que le 13 fut un Mercredi; par conséquent le 17 Octobre répond au 4 indien : donc l'Éclipse est arrivée le 4 Octobre, selon la façon de compter des Brames, un Dimanche. Ajoutez donc 4 jours à l'époque trouvée ci-dessus, & vous aurez 1776441j 43^h 3′ 30″; & comme la somme des heures passe 30, supprimez-les, & ajoutez un jour, ce qui vous donnera le *chouddhadinam* de 1776442 jours, ou jours écoulés depuis l'époque *calyougam* jusqu'au $\frac{4}{17}$ du mois d'Octobre ou *arbaſſy*.

SECTION DEUXIÈME.

Trouver le Dithy.

Les préceptes pour trouver le *dithy* ou l'heure de la conjonction de la Lune, sont les mêmes que pour l'opposition. On aura donc,

1.° Le lieu du Soleil, ou *Souvia-Sthoutam*, de...	6^s	4^d	15′	53″
Son mouvement journalier, de...............			59.	45
Le lieu de la Lune, ou *Chaudra-Sthoutam*, de..	6.	12.	29.	26
Son mouvement journalier, de...............			835.	

Enfin la Lune sera naissante, puisque ces 30 jours seront accomplis, & que la conjonction est passée. On trouvera qu'elle a dû arriver le 4 à 21^h 48′.

2.° En suivant ici les mêmes préceptes que pour l'opposition, on trouve

Le lieu de la Lune, pour le 4, à 21^h 48′, de	6^s	3^d	37′	44″	13‴
Et le lieu du Soleil dans...............	6.	3.	37.	50.	33
Différence........................				6.	20

Faisant la concordance de ces deux lieux, on aura le moment de la conjonction de la Lune au Soleil à 21^h 48′ 30″, & le lieu du Soleil & de la Lune, de... 6^s 3^d 37′ 50″.

SECTION TROISIÈME.

Du Grahanam, *ou de l'Éclipse.*

1.° *Trouver l'*Ayanangsam.

Ce terme est composé de deux mots, *ayanam*, qui signifie course; & *angsam*, membre, atome, &c.

Au reste, je n'ai pu savoir la vraie signification des termes que les Brames emploient dans leurs calculs des Éclipses de Soleil, ceux qui sont communs aux deux Éclipses; on en trouve l'explication dans le calcul des Éclipses de Lune.

Le lieu du Soleil & de la Lune que l'on vient de trouver, sont pris, comme nous l'avons dit, non du premier point du signe du Bélier, mais du premier point de la constellation du Bélier, qui est en avant de plusieurs degrés; c'est pourquoi, les Brames réduisent ici cette longitude du Soleil à celle du premier point du signe du Bélier, en se servant de la méthode expliquée ci-dessus, à l'article du Zodiaque: c'est ce qu'ils appellent trouver l'*ayanangsam.* Or, nous avons trouvé que le 17 Octobre 1762, la constellation du Bélier étoit

en avant, selon les Brames, de	0^s	18^d	$57'$	$9''$
les ajoutant au lieu du Soleil	6.	3.	37.	50
on a	6.	22.	34.	59

pour la longitude du Soleil, prise du premier point du signe du Bélier; ce qui s'appelle l'*ayana-souria-stoutham.*

Les Brames distinguent, comme l'on voit, l'entrée du Soleil dans la constellation du Bélier, de son arrivée à l'équinoxe; c'est à quoi ils ont grande attention lorsqu'ils veulent observer avec le gnomon.

L'entrée du Soleil dans la constellation du Bélier, commence l'année des Brames, comme nous l'avons dit, de façon que cette même entrée est toujours fixée au 1.er Avril. Au contraire, l'entrée du Soleil dans l'équinoxe arrive, selon leurs calculs, vers le 12 Mars; ce qui fait actuellement dix-huit à dix-neuf jours de différence.

Ils calculent pour le 12 de Mars la longitude du Soleil & l'*ayanangſam*, ou préceſſion des équinoxes; ils ajoutent l'un avec l'autre. Si la ſomme donne 12 ou 0 ſignes, c'eſt le moment de l'équinoxe; mais ſi la ſomme eſt moindre que 12 ſignes, ou plus grande que 0 ſignes, on recommence le calcul pour un ou deux jours avant ou après le 12 Mars; & par une partie proportionelle, on trouve la quantité qu'il faut ajouter pour avoir 12 ſignes ou 0 ſignes, & par conſéquent l'équinoxe.

2.° *Trouver le* Lengna-ſtoutham.

Par ce précepte, les Brames m'ont paru enſeigner le moyen de trouver le point de l'écliptique qui eſt à l'horizon au moment de la conjonction. Ils ont, comme nous l'avons dit, une Table de la valeur de chaque ſigne pour le lieu où ils ſont établis, & pour la latitude duquel ils calculent. Nous avons donné cette Table pour la latitude de Tirvalour : or cette Table eſt exprimée en minutes d'heure ſeulement, c'eſt pourquoi ils ſe contentent de réduire en minutes d'heure ſeulement le temps de la conjonction. Dans l'exemple préſent on a pour le temps de la conjonction réduite, 1308 minutes.

Prenez dans la Table intitulée, *valeur des 12 ſignes pour la latitude de Tirvalour,*

la valeur du huitième ſigne	318′
la valeur du neuvième	331
la valeur du dixième	315
ajoutez enſemble ces valeurs, vous aurez	964

Si le Soleil eût été dans 8 ſignes juſtes, ces 964 minutes ſeroient la valeur dont il faudroit ſe ſervir; mais comme il n'eſt que dans $6^{ſ}\ 22^{d}\ 34'\ 59''$, il s'en faut de $7^{d}\ 25'\ 1''$ qu'il n'ait 7 ſignes. Il faut donc ajouter la partie proportionnelle qui convient à $7^{d}\ 25'\ 1''$, en prenant 302 (valeur du 6.e ſigne) pour différence. On trouvera pour quatrième terme 74 minutes, leſquelles ajoutées à 964 minutes, donnent 1038.

L'heure de la conjonction eſt	1308
ôtant l'un de l'autre, il reſte	270

C'eſt-à-dire que le 10.e ſigne eſt levé, plus 270 minutes d'heures de l'onzième ſigne.

Pour réduire ces 270 minutes d'heure en degrés de ſigne, on prend dans la Table, 280 (valeur de l'onzième ſigne) pour différence, avec laquelle on forme la proportion ſuivante;

$$280' : 30^d :: 270' : 28^d\ 55'\ 43''.$$

Par conſéquent, le point du Zodiaque, qui eſt alors à l'horizon, ſelon les Brames, eſt $10^f\ 28^d\ 55'\ 43''$. C'eſt le *lengna-ſtoutham.*

La raiſon pour laquelle on ne prend point, dans cet exemple, de valeur de ſigne, paſſé le 10.e, eſt qu'il faut toujours faire en ſorte que la ſomme des valeurs ſoit moindre que la ſomme qui provient de la conjonction réduite en minutes.

3.° *Trouver le* Nata-Naliguey.

Par ce précepte, les Brames enſeignent le moyen de trouver la différence entre la conjonction & le milieu de l'Éclipſe.

De *Lengna-Stoutham* (précepte 2.e).........	$10^f\ 28^d\ 55'\ 43''$
ôtez l'*Ayana-Souria-Stoutham* (précepte 1.er)....	6. 22. 34. 59
il reſte.................................	4. 6. 20. 44

Multipliez le nombre des ſignes par 5, & le nombre des degrés, minutes & ſecondes par 10, le produit, s'il eſt moindre que 15, ſervira pour l'opération; ce ſera ce produit qu'on emploiera : s'il eſt plus grand que 15, ôtez-en 15, & l'opération s'achevera avec le reſte.

Dans cet exemple, le produit eſt.............	$21^f\ 3^d\ 00'\ 00''$
ôtant..................................	15.
reſte..................................	6. 3. 00. 00

Cette opération eſt une eſpèce de réduction en aſcenſion droite, puiſqu'elle eſt fondée ſur ce que 360 degrés ſont égaux à 60 heures, 30 degrés à 5 heures; un degré égal à 10 minutes d'heure Indienne.

De..	20h 0'
ôtez..	6. 3
il reste..	13. 57
Multipliez par..	6. 3
le produit donne..	84. 24
qui, réduites au même terme, font..................	5064'
Divisez cette quantité par..........................	1468

Le quotient donnera des heures : multipliez le reste par 60, & divisez encore par 1468, le quotient donnera des minutes, &c. comme l'on voit ci-après.

Calcul de la différence entre la conjonction & le milieu de l'Éclipse pour l'exemple présent.

```
 5064. | 1468.
 4404. | 3 heures.
 -----
  660.
   60.
 -----
39600. | 1468.
 2936. | 26 minutes.
 -----
10240.
 8808.
 -----
 1432.
   60.
 -----
85920. | 1468.
 7340. | 58 secondes.
 -----
12520.
11724.
```

Donc le *nata-naligucy*, ou la différence entre la conjonction & le milieu de l'Éclipse sera, dans cet exemple, de $3^h\ 26'\ 58''$.

Cette différence s'ajoute à l'heure de la conjonction,

lorsque le Soleil est à l'occident; elle se soustrait au contraire, lorsque cet astre est à l'orient du méridien.

On a trouvé la conjonction à....................	21^h 48′ 30″.
ajoutant....................................	3. 26. 58
on a le milieu de l'Éclipse à..................	25. 15. 28

Les Brames appellent ce terme *ambana-parvanta-naligucy*.

Calculez actuellement la longitude du Soleil pour le moment du milieu de l'Éclipse, ce que vous obtiendrez aisément en prenant avec son mouvement journalier, 59′ 45″, le mouvement qui convient à 3^h 26′ 58″, & que vous trouverez de 3′ 25″.

La longitude du Soleil, réduite au moment du milieu de l'Éclipse sera donc de 6^f 22^d 38′ 24″.

Calculez pareillement la longitude de la Lune pour le moment du milieu de l'Éclipse; ce qui sera facile, en vous servant de son mouvement journalier de 835 minutes, & vous trouverez son mouvement pour 3^h 26′ 58″, de 47′ 47″.

La longitude de la Lune réduite au moment du milieu de l'Éclipse, sera donc de 6^f 23^d 22′ 46″.

4.° *Trouver le* Ragou *pour l'*Ambana-parvanta-naliguey; *c'est-à-dire le nœud ascendant pour le moment du milieu de l'Éclipse.*

Les préceptes sont les mêmes que pour l'opposition, avec la seule différence qu'il faut ajouter (pour les Éclipses de Soleil) l'*ayanangsam* (la précession) à la longitude du nœud.

Dans cet exemple, on trouvera

Le complément du nœud de..............	11^f	18^d	3′	21″
Donc, le nœud ascendant................	00.	11.	56.	39
Ajoutez pour la réduction à l'heure de la conjonct.	0.	0.	0.	2
pour l'équation........................	0.	0.	40.	0
pour la précession.....................	0.	18.	57.	9
Vous aurez la Longitude du nœud, de.......	1.	1.	33.	50

5.° *Trouver le* Avanaty.

Par ce précepte, les Brames enſeignent le moyen de trouver une quantité qui, comparée avec la latitude de la Lune, donne la grandeur de l'Éclipſe; & voici leur procédé qui eſt aſſez ſingulier.

Il faut premièrement trouver la durée du jour propoſé. Nous avons enſeigné les moyens d'y parvenir, & nous avons trouvé en même temps que le 17 Octobre le Soleil reſte ſur l'horizon de *Tirvalour*

pendant	29^h 23′ 52″
la moitié	14. 41. 56

indique l'heure à laquelle le Soleil paſſe au Méridien.

De l'heure du milieu de l'Éclipſe	25^h 15′ 38″
ôtez l'heure de midi	14. 42. 56
il reſte	10. 32. 42
Réduiſez-les en partie de l'Équateur; ce qui vous donnera	2^f 3^d 12′ 00″
Ajoutez-les au lieu du Soleil pour le moment du milieu de l'Éclipſe	6. 22. 38. 24
la ſomme fera	8. 25. 50. 24

Secondement, faites le *bouja*, c'eſt-à-dire, cherchez la diſtance du Soleil au plus proche équinoxe;

Pour cet effet, ôtez 6 ſignes de	8^f 25^d 50′ 24″
le bouja ſera de	2. 25. 50. 24

Cherchez dans la Table intitulée, *de la différence aſcenſionnelle, ou valeur des ſignes de bouja,* vous aurez

Pour le premier ſigne	48′
pour le ſecond	38
la ſomme donne	86

Si le *bouja* eût été de deux ſignes juſtes, ces 86 minutes ſeroient la valeur dont il faudroit ſe ſervir; mais comme il eſt

est de $2^s 25^d 50' 24''$, il est plus grand que 2 signes, de $25^d 50' 24''$. Il faut donc ajouter la partie proportionnelle qui convient à $25^d 50' 24''$, en prenant 16 (valeur du troisième signe) pour différence; & on fera la proportion suivante :

$$30^d : 16' :: 25^d\ 50' : 14'.$$

Le quatrième terme (14′) ajouté à 86, donne 100 minutes; c'est le *chara-vinaliguey*.

Il faut bien faire attention si le *bouja* est du nord ou du sud; c'est-à-dire, si la distance du Soleil au plus proche équinoxe est depuis le 12 Mars Indien, jusqu'au 12 Septembre, ou depuis le 12 Septembre jusqu'au 12 Mars. Dans l'exemple présent, le *bouja* est du sud.

Multipliez le *chara-vinaliguey*	100′
par	6
vous aurez	600
Multipliez encore par	60
le produit donnera	36000
Divisez par 144, & vous aurez 250.	
Troisièmement, à l'*achacharam*	114′ 14″
ajoutez ces	250. 00
Doublez la somme	364. 14
Et vous aurez	728. 28
Divisez par 25, vous trouverez	29. 8

Ces 29′ 8″ sont le *avanaty*.

6.° *Trouver le* Viqchepam, *c'est-à-dire la latitude de la Lune.*

Du lieu de la Lune pour le moment du milieu de l'Éclipse	$6^s\ 23^d\ 22'\ 46''$
ôtez le *ragou* ou lieu du nœud	1. 1. 33. 50
reste le *bouja* ou la distance de la Lune au nœud, de	5. 21. 48. 56
ôtez-les de	6. 0. 0. 0
vous aurez	0. 8. 11. 4

Cherchez, avec cet argument dans la Table, la latitude de la Lune, vous trouverez 38′ 34″.

Cette latitude est boréale, parce que le *bouja* est du nord; c'est-à-dire, que la distance de la Lune à son nœud est moindre que 6 signes.

Quand le *viqchepam* & l'*avanaty* sont du même rhumb de vent (cela veut dire de la même dénomination) on les ajoute; mais s'ils sont l'un nord & l'autre sud, ou de différens rhumbs de vents, on en prend la différence.

Dans l'exemple présent,

Le *viqchepam* est de	38′ 34″ nord.
L'*avanaty* est de	29. 8 sud.
La différence est	9. 26

7.° *Trouver le* Grahana-pramanam, *ou la grandeur de l'Éclipse.*

Prenez le mouvement journalier du Soleil	59′ 45″
multipliez-le par	5
vous aurez	298. 45
Divisez par 9 pour avoir le diamètre du Soleil de	33. 12
Prenez aussi le mouvement journalier de la Lune de	835.
Divisez par 25 pour avoir le diamètre de la Lune de	33. 24
Ajoutez ensemble ces diamètres, la somme sera	66. 36
Prenez-en la moitié	33. 18
ôtez l'*avanaty* (précepte 5)	9. 26
vous aurez pour reste	23. 52

Réduisez en tierces & divisez par le diamètre du Soleil réduit en secondes, vous aurez . . . 85920‴ | 1992″ | 43

ôtez la quantité constante	4
vous aurez	39es/60e

C'est la quantité du Soleil qui doit être éclipsée; ce qui répond à 7 doigts 48 minutes.

8.° *Trouver le* Grahanartha-calam, *c'est-à-dire la demi-durée de l'Éclipse.*

C'est le commencement & la fin. Les Brames, pour les

calculer, n'y emploient pas plus de façons que pour l'éclipse de Lune.

Du quarré de la moitié de la somme des diamètres.....	3892004″
ôtez le quarré de l'*avanaty*....................	320356
il restera..................................	3571648
Tirez la racine quarrée..........................	113400‴
Du mouvement journalier de la Lune...............	835′ 00″
ôtez le mouvement du Soleil......................	59. 45
le reste est....................................	775. 15

ou-bien 46 mille 515 secondes. Divisez par ce nombre la racine quarrée ci-dessus 113 mille 400 tierces, & vous opérerez en tout comme vous avez fait pour l'éclipse de Lune.

Vous aurez donc..........................	113400‴	46515″ / 2ʰ 26′
Négligez ce reste........................	12850.	

La demi-durée de l'Éclipse sera donc de...........	2 26′ 0″
Le milieu ayant été calculé pour..................	25. 15. 28
On aura le commencement à.........................	22. 49. 28
& la fin à..	27. 41. 28
La durée du jour ayant été trouvée comme ci-dessus, de	29. 23. 52
on aura le midi à.................................	14. 41. 56
& par conséquent le commencement de l'Éclipse dans l'après-midi à...........................	8. 7. 32
le milieu à.......................................	10. 33. 32
& la fin à..	12. 52. 32
Durée de l'Éclipse................................	4. 52. 00

& l'Éclipse commencera par la partie du nord-ouest, & finira par le sud-est du Soleil.

En heures Européennes.

Commencement à....................................	3. 15. 1
Milieu à..	4. 13. 25
Fin à...	5. 11. 49
Durée de l'Éclipse................................	1. 56. 48

Me ſera-t-il permis de conclure qu'on ne trouve chez aucune autre nation Orientale que chez les Indiens, pas même chez les Chinois, dont il ſemble cependant qu'on ait pris plaiſir à nous vanter les anciennes connoiſſances en Aſtronomie, des traces auſſi évidentes de l'antiquité de cette Science? Tout ſemble concourir à prouver que les Brames ne poſsèdent aujourd'hui que les débris d'une ſcience qui a été cultivée avec le plus grand ſuccès, bien des ſiècles avant J. C. Le climat de l'Inde, comme je l'ai déjà remarqué, eſt ſi chaud que les Brames, depuis tant de ſiècles qu'ils exiſtent, n'ont pu faire le moindre pas en avant pour perfectionner une ſi belle ſcience : les débris qu'ils en conſervent (peut-être encore avec aſſez de peines) leur viennent d'un climat plus tempéré : peut-être eux-mêmes ſont-ils originaires de ce climat, tel qu'il ſoit. Les Tamoults, à Pondichery, m'ont dit que les Brames venoient du nord (*voyez page 172*). Les reſtes de cette Aſtronomie m'avoient paru, par ces raiſons, très-précieux à recueillir.

Il y auroit, ſans doute, matière à faire des remarques curieuſes & intéreſſantes ſur cette Aſtronomie; mais les différentes autres parties du Journal de mon voyage m'ont occupé juſqu'à ce moment, & m'occupent encore à un point que je ne peux rien tenter ſur cette partie avant d'avoir mis fin au reſte de ma narration.

Je dirai ſeulement, en paſſant, que la théorie de la Lune, telle que les Indiens l'ont aujourd'hui, toute imparfaite qu'elle eſt encore, eſt certainement le fruit de méditations profondes, auxquelles les Brames de nos jours me paroiſſent bien éloignés de vouloir & de pouvoir ſe livrer.

La période de 248 jours, qui d'abord ne paroît pas réfléchie, a beaucoup de reſſemblance avec notre hypothèſe elliptique ſimple. Il m'a paru que les Aſtronomes qui ſont les Auteurs de cette période ont ſuppoſé, pour plus grande facilité, l'apogée de la Lune immobile, & qu'ils ont attribué à la Lune le mouvement de l'apogée; en effet, ſi l'on ſuppoſe

la Lune apogée; par exemple, le 1.[er] Janvier à midi, il eſt certain qu'au bout de 248 jours elle ſe retrouvera encore apogée à midi. Il faut de plus obſerver une choſe digne de remarque; c'eſt que les diamètres apparens de la Lune, que l'on tire de la période de 248 jours des Brames, cadrent aſſez bien avec ceux que l'on déduit de l'hypothèſe elliptique ſimple : car, quoique le diamètre de la Lune ne ſoit pas, rigoureuſement parlant, la vingt-cinquième partie de ſon mouvement diurne; cependant il eſt vrai de dire qu'il en approche beaucoup dans le cas où l'on emploie l'hypotheſe elliptique ſimple pour repréſenter le mouvement de la Lune dans le temps des ſyzygies, le ſeul point, comme je l'ai fait obſerver, dans lequel les Brames conſidèrent le mouvement de la Lune; en ſorte qu'aucun autre nombre que 25 ne ſatisfait auſſi-bien à la queſtion. Il eſt aiſé de ſe convaincre de cette vérité, en comparant les diamètres de la Lune tirés de ſon mouvement journalier pendant la période de 248 jours des Brames, avec ceux que donnent M.[rs] Caſſini & Halley, dans leurs Tables pour le temps des ſyzygies.

TABLE du mouvement journalier de la quatrième période, ou de deux cents quarante-huit jours de la Lune.

Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Differ. Min.	Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Differ. Min.
1.	0.	12.	3.		11.	4.	21.	58.	
2.	0.	24.	9.	723.	12.	5.	6.	8.	840.
3.	1.	6.	22.	726.	13.	5.	20.	25.	850.
4.	1.	18.	44.	733.	14.	6.	4.	44.	857.
5.	2.	1.	19.	742.	15.	6.	19.	2.	859.
6.	2.	14.	9.	755.	16.	7.	3.	15.	858.
7.	2.	27.	13.	770.	17.	7.	17.	22.	853.
8.	3.	10.	33.	784.	18.	8.	1.	17.	847.
9.	3.	24.	9.	800.	19.	8.	15.	1.	835.
10.	4.	7.	58.	816.	20.	8.	28.	29.	824.
11.	4.	21.	58.	829.					

Suite de la *Table du mouvement Journalier de la Lune.*

Jours.	Sig. Deg. Min.	Differ. Min.	Jours.	Sig. Deg. Min.	Differ. Min.
20.	8. 28. 29.		55.	0. 4. 49.	
21.	9. 11. 42.	808.	56.	0. 16. 52.	723.
22.	9. 24. 40.	793.	57.	0. 28. 58.	723.
23.	10. 7. 23.	778.	58.	1. 11. 10.	726.
24.	10. 19. 52.	763.	59.	1. 23. 31.	732.
25.	11. 2. 10.	749.	60.	2. 6. 5.	741.
26.	11. 14. 19.	738.	61.	2. 18. 52.	754.
27.	11. 26. 24.	729.	62.	3. 1. 55.	767.
28.	0. 8. 26.	725.	63.	3. 15. 14.	783.
29.	0. 20. 30.	722.	64.	3. 28. 47.	799.
30.	1. 2. 38.	724.	65.	4. 12. 35.	813.
31.	1. 14. 55.	728.	66.	4. 26. 34.	828.
32.	1. 27. 23.	737.	67.	5. 10. 44.	839.
33.	2. 10. 4.	748.	68.	5. 24. 59.	850.
34.	2. 23. 0.	761.	69.	6. 9. 17.	855.
35.	3. 6. 12.	776.	70.	6. 23. 36.	858.
36.	3. 19. 39.	792.	71.	7. 7. 51.	859.
37.	4. 3. 21.	807.	72.	7. 21. 58.	855.
38.	4. 17. 15.	822.	73.	8. 5. 55.	847.
39.	5. 1. 20.	834.	74.	8. 19. 40.	837.
40.	5. 15. 33.	845.	75.	9. 3. 10.	825.
41.	5. 29. 51.	853.	76.	9. 16. 25.	810.
42.	6. 14. 10.	858.	77.	9. 29. 24.	795.
43.	6. 28. 27.	859.	78.	10. 12. 8.	779.
44.	7. 12. 37.	857.	79.	10. 24. 39.	764.
45.	7. 26. 39.	850.	80.	11. 6. 58.	751.
46.	8. 10. 30.	842.	81.	11. 19. 8.	739.
47.	8. 4. 7.	831.	82.	0. 1. 13.	730.
48.	9. 7. 29.	817.	83.	0. 13. 15.	725.
49.	9. 20. 35.	802.	84.	0. 25. 19.	722.
50.	10. 3. 26.	786.	85.	1. 7. 27.	724.
51.	10. 16. 2.	771.	86.	1. 19. 43.	728.
52.	10. 28. 26.	756.	87.	2. 2. 10.	736.
53.	11. 10. 40.	744.	88.	2. 14. 49.	747.
54.	11. 22. 46.	734.	89.	2. 27. 43.	759.
55.	0. 4. 49.	726.	90.	3. 10. 53.	774.

Suite de la *Table du mouvement Journalier de la Lune.*

Jours.	Sig. Deg. Min.	Différ. Min.	Jours.	Sig. Deg. Min.	Différ. Min.
90.	3. 10. 53.		125.	6. 28. 10.	
91.	3. 24. 18.	790.	126.	7. 12. 25.	858.
92.	4. 7. 58.	805.	127.	7. 26. 33.	855.
93.	4. 21. 52.	820.	128.	8. 10. 32.	848.
94.	5. 5. 56.	834.	129.	8. 24. 18.	839.
95.	5. 20. 8.	844.	130.	9. 7. 50.	826.
96.	6. 4. 26.	852.	131.	9. 21. 7.	812.
97.	6. 18. 45.	858.	132.	10. 4. 8.	797.
98.	7. 3. 2.	859.	133.	10. 16. 54.	781.
99.	7. 17. 13.	857.	134.	10. 29. 26.	766.
100	8. 1. 17.	851.	135.	11. 11. 46.	752.
101.	8. 15. 8.	844.	136.	11. 23. 58.	740.
102.	8. 28. 47.	831.	137.	0. 6. 3.	732.
103.	9. 12. 10.	819.	138.	0. 18. 5.	725.
104.	9. 25. 18.	803.	139.	1. 0. 8.	722.
105.	10. 8. 11.	788.	140.	1. 12. 16.	723.
106.	10. 20. 48.	773.	141.	1. 24. 30.	728.
107.	11. 3. 14.	757.	142.	2. 6. 56.	734.
108.	11. 15. 28.	746.	143.	2. 19. 33.	746.
109.	11. 27. 36.	734.	144.	3. 2. 26.	757.
110.	0. 9. 39.	728.	145.	3. 15. 34.	773.
111.	0. 21. 41.	723.	146.	3. 28. 57.	788.
112.	1. 3. 46.	722.	147.	4. 12. 36.	803.
113.	1. 15. 58.	725.	148.	4. 26. 27.	819.
114.	1. 28. 18.	732.	149.	5. 10. 31.	831.
115.	2. 10. 50.	740.	150.	5. 24. 42.	844.
116.	2. 23. 36.	752.	151.	6. 8. 59.	851.
117.	3. 6. 37.	766.	152.	6. 23. 18.	857.
118.	3. 19. 54.	781.	153.	7. 7. 36.	859.
119.	4. 3. 26.	797.	154.	7. 21. 48.	858.
120	4. 17. 12.	812.	155.	8. 5. 52.	852.
121.	5. 1. 11.	826.	156.	8. 19. 46.	844.
122.	5. 15. 19.	839.	157.	9. 3. 26.	834.
123.	5. 29. 34.	848.	158.	9. 16. 51.	820.
124.	6. 13. 52.	855.	159.	10. 0. 1.	805.
125.	6. 28. 10.	858.	160.	10. 12. 55.	790.

Suite de la *Table du mouvement Journalier de la Lune.*

Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Differ. Min.	Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Differ. Min.
160.	10.	12.	55.		195.	1.	17.	4.	
161.	10.	25.	34.	774.	196.	1.	29.	18.	726.
162.	11.	8.	1.	759.	197.	2.	11.	42.	734.
163.	11.	20.	17.	747.	198.	2.	24.	18.	744.
164.	0.	2.	25.	736.	199.	3.	7.	9.	756.
165.	0.	14.	29.	728.	200.	3.	20.	15.	771.
166.	0.	26.	31.	724.	201.	4.	3.	37.	786.
167.	1.	8.	36.	722.	202.	4.	17.	14.	802.
168.	1.	20.	46.	725	203.	5.	1.	5.	817.
169.	2.	3.	5.	730.	204.	5.	15.	7.	831.
170.	2.	15.	36.	739.	205.	5.	29	17.	842.
171.	2.	28.	20.	751.	206.	6.	13.	34.	850.
172.	3.	11.	19.	764.	207.	6.	27.	53.	857.
173.	3.	24.	34.	779.	208.	7.	12.	11.	859.
174.	4.	8.	4.	795.	209.	7.	26.	24.	858.
175.	4.	21.	49.	810.	210.	8.	10.	29.	853.
176.	5.	5.	46.	825.	211.	8.	24.	23.	845.
177.	5.	19.	53.	837.	212.	9.	8.	5.	834.
178.	6.	4.	8.	847.	213.	9.	21.	32.	822.
179.	6.	18.	27.	855.	214.	10.	4.	44.	807.
180.	7.	2.	45.	859.	215.	10.	17.	40.	792.
181.	7.	17.	0.	858.	216.	11.	0.	21.	776.
182.	8.	1.	10.	855.	217.	11.	12.	49.	761.
183.	8.	15.	9.	850.	218.	11.	25.	6.	748.
184.	8.	28.	57.	839.	219.	0.	7.	14.	737.
185.	9.	12.	30.	828.	220.	0.	19.	18.	728.
186.	9.	25.	49.	813.	221.	1.	1.	20.	724
187.	10.	8.	52.	799.	222.	1.	13.	25.	722.
188.	10.	21.	39.	783.	223.	1.	25.	34.	725.
189.	11.	4.	13.	767.	224.	2.	7.	52.	729.
190.	11.	16.	34.	754.	225.	2.	20.	21.	738.
191.	11.	28.	46.	741.	226.	3.	3.	4.	749.
192.	0.	10.	52.	732.	227.	3.	16.	2.	763.
193.	0.	22.	55.	726.	228.	3.	29.	15.	778.
194.	1.	4.	58.	723.	229.	4.	12.	43.	793.
195.	1.	17.	4.	723.	230.	4.	26.	27.	808.

Suite

Suite de la *Table du mouvement Journalier de la Lune.*

Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Differ. Min.	Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Differ. Min.
230.	4.	26.	27.		239.	9.	3.	35	
231.	5.	10.	22.	824.	240.	9.	17.	11.	829.
232.	5.	24.	29.	835.	241.	10.	0.	31.	816.
233.	6.	8.	42.	847.	242.	10.	13.	35.	800.
234.	6.	23.	0.	853.	243.	10.	26	25.	784.
235.	7.	7.	19.	858.	244.	11.	9.	00.	770.
236.	7.	21.	36.	859.	245.	11.	21.	22.	755.
237.	8.	5.	46.	857.	246.	0.	3.	35.	742.
238.	8.	19.	46.	850.	247	0.	15.	41.	733.
239.	9.	3.	35.	840.	248.	0.	27.	44.	726.
									723.

TABLE de la Latitude de la Lune à l'Écliptique.

Deg.	Min.	Sec.	Deg.	Min.	Sec.
1.	4.	43.	10.	46.	53.
2.	9.	29.	11.	51.	32.
3.	14.	8.	12.	56.	8.
4.	18.	51.	13.	60.	43.
5.	23.	32.	14.	65.	19.
6.	28.	14.	15.	69.	54.
7.	32.	55.	16.	74.	24.
8.	37.	40.	17.	78.	54.
9.	42.	19.	18.	83.	24.

Nota. La Table ci-dessus a été imprimée sur l'original de la main de mon Interprète ; je n'ai rien voulu changer à la forme, ce qui fait qu'il y a une petite attention à faire pour les différences ; il faut toujours prendre celles qui sont mises après le jour donné ; cela vient de ce que tous les jours sont complets, & qu'il n'y a point ici de (00) à la tête de la Table, parce que dans le calcul du lieu de la Lune, il ne peut jamais rester (0) après la quatrième division.

Les Brames supposent le mouvement moyen journalier de la Lune de 791 minutes.

TABLE pour convertir les heures Indiennes en Européennes.

Heures. Minutes. Secondes. Tierces.	*H. M. S. T.*	*M. S. T. Q.*
1.		24.
2.		48.
3.	1.	12.
4.	1.	36.
5.	2.	
6.	2.	24.
7.	2.	48.
8.	3.	12.
9.	3.	36.
10.	4.	
20.	8.	
30.	12.	
40.	16.	
50.	20.	
60.	24.	

TABLE pour convertir les heures Européennes en Indiennes.

Heures. Minutes. Secondes. Tierces.	*H. M. S. T.*	*M. S. T. Q.*
1.	2.	30.
2.	5.	
3.	7.	30
4.	10.	
5.	12.	30.
6.	15.	
7.	17.	30.
8.	20.	
9.	22.	30.
10.	25.	
11.	27.	30.
12.	30.	
13.	32.	30.
14.	35.	
15.	37.	30.
16.	40.	
17.	42.	30.
18.	45.	
19.	47.	30.
20.	50.	
21.	52.	30.
22.	55.	
23.	57.	30.
24.	60.	

RECHERCHES SUR LE CALCUL INTÉGRAL ET SUR LE SYSTÈME DU MONDE.

Par M. DE LA PLACE.

I.

JE me propose de donner dans ce Mémoire, une nouvelle Méthode pour intégrer par approximation les équations différentielles, avec une application de cette méthode au mouvement des Planètes premières. Cette matière, l'une des plus intéressantes de toute l'analyse, a déjà donné lieu à des recherches très-profondes; heureux si celles que je présente ici aux Géomètres peuvent mériter leur attention!

C'est principalement dans l'application de l'analyse au système du monde, que l'on a besoin de méthodes simples & convergentes pour intégrer par approximation les équations différentielles; celles du mouvement des corps célestes se présentent en effet sous une forme si compliquée, qu'elles ne laissent aucun espoir de réussir jamais à les intégrer rigoureusement; mais comme les valeurs des variables sont à peu-près connues, on imagina de substituer à leur place, les quantités connues dont elles diffèrent toujours fort peu, plus une très-petite quantité; & en négligeant le quarré & les puissances supérieures de cette nouvelle indéterminée, on réduisit le Problème à l'intégration d'autant d'équations différentielles linéaires qu'il y avoit de variables. Il ne restoit plus ainsi qu'à intégrer ces équations; or les Géomètres imaginèrent pour cela différentes méthodes, dont la plus ingénieuse me paroît être celle des coëfficiens indéterminés de M. d'Alembert. Ayant ainsi une première valeur approchée des variables, on substitua dans les équations différentielles, au

lieu de chaque variable, cette valeur, plus une très-petite indéterminée, dont on négligea le quarré & les puiſſances ſupérieures, & en continuant d'opérer ainſi, on eut une ſeconde, une troiſième, &c. valeurs approchées. Cette méthode, analogue à celle de Newton, pour déterminer par approximation les racines des équations numériques, ſe préſenta naturellement aux Géomètres, qui réſolurent les premiers le Problème des Trois-corps; appliquée à la recherche du mouvement de la Lune, elle avoit l'inconvénient de donner dans la ſeconde approximation des arcs-de-cercle, dans le cas même où il étoit démontré qu'il ne devoit point y en avoir; mais on parvint à les faire diſparoître par différens moyens.

Lorſque la Planète n'a qu'un Satellite, la méthode que nous venons d'expoſer eſt ſuffiſante; mais quand elle en a pluſieurs, ou lorſqu'il s'agit de déterminer le mouvement de deux ou d'un plus grand nombre de Planètes autour du Soleil, on trouve par la ſeconde approximation, des termes du même ordre que ceux qui réſultent de la première, tandis qu'on les ſuppoſe d'un ordre inférieur. M. de la Grange eſt le premier qui ait ſenti & réſolu cette difficulté par une analyſe ſublime, dans ſon excellente pièce ſur les inégalités des Satellites de Jupiter, & dans le *tome III* des *Mémoires de Turin.* M.rs d'Alembert & de Condorcet ont depuis donné des méthodes fort ingénieuſes pour le même objet; celle que je propoſe ici eſt, ſi je ne me trompe, abſolument nouvelle & d'ailleurs très-utile, lorſque les variables ſont fonctions de quantités périodiques & d'autres quantités croiſſantes très-lentement, ce qui eſt le cas de toutes les queſtions relatives à l'Aſtronomie-phyſique. Elle conſiſte à faire varier les conſtantes arbitraires dans les intégrales approchées, & à trouver enſuite par l'intégration, leurs valeurs pour un temps quelconque. Cette méthode conduit à des équations fort ſimples & très-faciles à intégrer, quel que ſoit le nombre des variables, & c'eſt-là un de ſes principaux avantages. J'en ai donné une idée fort ſuccinte dans le Volume de l'Académie pour

l'*année 1772, Iere partie, page 651.* Je vais la développer ici avec plus d'étendue, & l'appliquer au mouvement des Planètes. Les Exemples suivans la feront mieux entendre que des généralités toujours difficiles à saisir.

EXEMPLE I.

Soit proposé d'intégrer l'équation différentielle

$$\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y = \alpha y \cdot \text{cof.}\, 2t; \quad (1).$$

α étant supposé fort petit & ∂t constant. J'intègre d'abord celle-ci, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = 0$; ce qui donne par les méthodes connues, $y = p \cdot \text{fin.}\, t + q \cdot \text{cof.}\, t$; p & q étant deux constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t}$, lorsque $t = 0$; c'est l'expression de y, en y supposant $\alpha = 0$. Soit maintenant,

$$y = p \cdot \text{fin.}\, t + q \cdot \text{cof.}\, t + \alpha z,$$

& l'équation (1) donnera, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + z = \frac{p}{2} \cdot \text{fin.}\, 3t - \frac{p}{2} \cdot \text{fin.}\, t + \frac{q}{2} \text{cof.}\, 3t + \frac{q}{2} \cdot \text{cof.}\, t;$$

d'où l'on aura en intégrant,

$$z = \frac{p}{4} \cdot t \cdot \text{cof.}\, t + \frac{q}{4} \cdot t \cdot \text{fin.}\, t - \frac{p}{16} \cdot \text{fin.}\, 3t - \frac{q}{16} \cdot \text{cof.}\, 3t;$$

il est inutile d'ajouter ici de nouvelles constantes, parce qu'elles sont déjà renfermées dans la première valeur de y; partant, on aura

$$\left.\begin{aligned} y = \left[p + \frac{\alpha}{4} qt.\right] \text{fin.}\, t + \left[q + \frac{\alpha}{4} \cdot pt\right] \cdot \text{cof.}\, t \\ - \frac{\alpha p}{16} \cdot \text{fin.}\, 3t - \frac{\alpha q}{16} \cdot \text{cof.}\, 3t \end{aligned}\right\} (2).$$

Je fais ensuite dans l'équation (1), $t = T + t_1$, T étant constant; elle devient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} + y = \alpha y \,\text{cof.}\, (2T + 2t_1);$$

& l'on trouvera en l'intégrant, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α inclusivement, & en ajoutant les constantes arbitraires de manière qu'elles coïncident avec celles de l'équation (2), lorsque $\alpha = 0$,

$$\left.\begin{aligned} y = \; & [{}'p + \frac{\alpha}{4} \cdot {}'q \cdot t_1] \cdot \text{sin.}(T + t_1) \\ & + [{}'q + \frac{\alpha}{4} \cdot {}'p \cdot t_1] \cdot \text{cos.}(T + t_1) \\ & - \frac{\alpha \cdot {}'p}{16} \cdot \text{sin.}(3T + 3t_1) \\ & - \frac{\alpha \cdot {}'q}{16} \cdot \text{cos.}(3T + 3t_1) \end{aligned}\right\} (3).$$

${}'p$ & ${}'q$ étant deux nouvelles constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t_1}$, lorsque $t_1 = 0$.

On pourroit simplifier un peu le calcul, en substituant tout de suite dans l'équation (1), au lieu de t, $T + t_1$, & en parvenant ainsi à l'équation (3); car l'équation (2) peut aisément s'en déduire, en y faisant $T = 0$; partant, $t = t_1$, ${}'p = p$, & ${}'q = q$.

Si l'on avoit $\alpha = 0$, on auroit, en comparant les équations (2) & (3), ${}'p = p$, ${}'q = q$; Donc, p ne diffère de ${}'p$ & q de ${}'q$, que de quantités de l'ordre α; soit donc, ${}'p = p + \delta p$, ${}'q = q + \delta q$, δp & δq étant de l'ordre α; cela posé, si l'on retranche l'équation (2) de l'équation (3), après avoir substitué dans celle-ci $t - T$, au lieu de t_1, on aura, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$0 = [\delta p - \frac{\alpha}{4} T \cdot q] \cdot \text{sin.}\, t + [\delta q - \frac{\alpha}{4} T \cdot p] \cdot \text{cos.}\, t,$$

équation qui à cause de t variable & de T supposé constant, se partage dans les deux suivantes,

$$\delta p = \frac{\alpha}{4} \cdot T \cdot q; \; (4).$$

$$\delta q = \frac{\alpha}{4} \cdot T \cdot p; \; (5).$$

On voit ainsi que p & q sont fonctions de $\frac{\alpha}{4}.T$; pour déterminer ces fonctions, soit $\frac{\alpha}{4}.T = x$, on aura, comme l'on sait,

$$'p = p + \delta p = p + x.\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2}.\frac{\partial\partial p}{\partial x^2} + \&c.$$

$$'q = q + \delta q = q + x.\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2}.\frac{\partial\partial q}{\partial x^2} + \&c.$$

partant

$$\delta p = x.\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2}.\frac{\partial\partial p}{\partial x^2} + \&c.$$

$$\delta q = x.\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2}.\frac{\partial\partial q}{\partial x^2} + \&c.$$

les équations (4) & (5) deviendront ainsi, en négligeant les quantités de l'ordre x^2, ou, ce qui revient au même, en comparant les termes multipliés par x,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = q; \; (6). \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = p; \; (7).$$

Pour intégrer ces deux équations, je fais $p = fe^{nx}$, & $q = ge^{nx}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, & f & n étant constans; en substituant ces valeurs de p & de q dans les équations différentielles (6) & (7), on aura, $fn = g$, & $gn = f$, d'où l'on tire $n = \pm 1$; partant, on aura $p = fe^x + {}'fe^{-x}$; & $q = ge^x + {}'ge^{-x}$; de plus on a $f = g$ & $'f = -{}'g$;

donc, $p = fe^{\frac{\alpha}{4}T} + {}'f.e^{-\frac{\alpha}{4}T}$; &

$q = fe^{\frac{\alpha}{4}T} - {}'f.e^{-\frac{\alpha}{4}T}$, f & $'f$ étant deux nouvelles constantes arbitraires; ce sont les expressions de p & de q, après le temps T, ou, ce qui est la même chose, les valeurs de $'p$ & de $'q$; maintenant, si l'on substitue dans l'équation (3) ces valeurs de $'p$ & de $'q$, & que l'on y suppose $t_{,} = 0$, elle deviendra

$$\left.\begin{aligned} y = f e^{\frac{\alpha}{4}T} \cdot \Big[\text{ſin.}\, T + \text{coſ.}\, T - \frac{\alpha}{16} \cdot \text{ſin.}\, 3T \\ - \frac{\alpha}{16} \cdot \text{coſ.}\, 3T\Big] \\ + {}'f e^{-\frac{\alpha}{4}T} \cdot \Big[\text{ſin.}\, T - \text{coſ.}\, T - \frac{\alpha}{16} \cdot \text{ſin.}\, 3T \\ + \frac{\alpha}{16} \cdot \text{coſ.}\, 3T\Big] \end{aligned}\right\} (\sigma)$$

c'eſt l'expreſſion de y, après le temps quelconque T, en négligeant les quantités de l'ordre α^2.

Si l'on vouloit porter la préciſion juſqu'aux quantités de l'ordre α^2, on le feroit d'une manière ſemblable, en faiſant varier les nouvelles arbitraires f & $'f$.

On pourroit parvenir encore à l'équation (σ) de cette manière, je reprends l'équation (2),

$$\left.\begin{aligned} y = \left(p + \frac{\alpha}{4}\, q t\right) . \text{ſin.}\, t + \left(q + \frac{\alpha}{4}\, p t\right) . \text{coſ.}\, t \\ - \frac{\alpha p}{16} . \text{ſin.}\, 3\, t - \frac{\alpha q}{16} . \text{coſ.}\, 3\, t \end{aligned}\right\} (2).$$

& j'obſerve que puiſqu'on a négligé les termes de l'ordre α^2, on peut ſubſtituer dans les termes de l'ordre α, au lieu de p & q, d'autres quantités $'p$ & $'q$, telles que leurs différences d'avec p & q, ſoient de l'ordre α, en ſorte que $'p$ & $'q$ ſeroient conſtans, ſi l'on avoit $\alpha = 0$; je ſuppoſe donc $'p$ & $'q$ tels que l'on ait, $'p - p = \frac{\alpha}{4} q . t$, & $'q - q = \frac{\alpha}{4} . pt$; l'équation (2) donnera

$$y = {}'p . \text{ſin.}\, t + {}'q . \text{coſ.}\, t - \frac{\alpha . 'p}{16} . \text{ſin.}\, 3\, t - \frac{\alpha . 'q}{16} . \text{coſ.}\, 3\, t;$$

de plus, on aura comme précédemment, en faiſant $\frac{\alpha}{4}\, t = x$, $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, & $\frac{\partial q}{\partial x} = p$, d'où l'on tirera l'équation

$$y = fe^{\frac{\alpha}{4}.t} . [\text{fin}.t + \text{cof}.t - \frac{\alpha}{16} . \text{fin}. 3t - \frac{\alpha}{16} . \text{cof}. 3t]$$

$$+ 'fe^{-\frac{\alpha}{4}.t} . [\text{fin}.t - \text{cof}.t - \frac{\alpha}{16} . \text{fin}. 3t + \frac{\alpha}{16} . \text{cof}. 3t]$$

la même que l'équation (σ).

Quoique de cette feconde manière, le calcul foit plus fimple, cependant je préférerai dans la fuite la première qui me paroît plus direćte.

EXEMPLE II.

Soit encore l'équation différentielle

$$\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y = \alpha y^2 . \text{fin}. 3t; \quad (8)$$

en intégrant d'abord celle-ci, $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y = 0$, on aura, $y = p . \text{fin}. t + q . \text{cof}. t$, p & q étant deux conftantes arbitraires dépendantes des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t}$, lorfque $t = 0$.

On fera enfuite $y = p . \text{fin}. t + q . \text{cof}. t + \alpha z$, & l'équation (8) donnera, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} + z = \frac{pq}{2} . \text{cof}.t + \frac{q^2 - p^2}{4} . \text{fin}.t + \frac{p^2 + q^2}{2} . \text{fin}. 3t$$
$$+ \frac{q^2 - p^2}{4} . \text{fin}. 5t - \frac{pq}{2} . \text{cof}. 5t;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$z = \frac{pq.t}{4} . \text{fin}.t + \frac{(p^2 - q^2).t}{8} . \text{cof}.t - \frac{p^2 + q^2}{16} . \text{fin}. 3t$$
$$+ \frac{p^2 - q^2}{96} . \text{fin}. 5t + \frac{pq}{48} . \text{cof}. 5t;$$

partant,

$$\left.\begin{array}{l} y = [p + \frac{\alpha pq}{4} . t] . \text{fin}.t + [q + \alpha . \frac{p^2 - q^2}{8} . t] . \text{cof}. t \\ \quad - \alpha . \frac{p^2 + q^2}{16} . \text{fin}. 3t + \alpha . \frac{p^2 - q^2}{96} . \text{fin}. 5t \\ \quad + \frac{\alpha pq}{48} . \text{cof}. 5t \end{array}\right\} (9).$$

Si l'on fait présentement dans l'équation (8), $t = T + t_1$, elle deviendra

$$\frac{\partial\partial y}{\partial t_1^2} + y = \alpha y^2 . \text{fin.} 3 (T + t_1),$$

& en l'intégrant on aura,

$$\left.\begin{array}{l} y = [{}'p + \alpha . \frac{{}'p . {}'q}{4} t_1] . \text{fin.} (T + t_1) \\ + [{}'q + \alpha . \frac{{}'p^2 + {}'q^2}{8} t_1] . \text{cof.} (T + t_1) \\ - \alpha . \frac{{}'p^2 + {}'q^2}{16} . \text{fin.} 3 (T + t_1) \\ + \alpha . \frac{{}'p^2 - {}'q^2}{96} . \text{fin.} 5 (T + t_1) \\ + \alpha . \frac{{}'p . {}'q}{48} . \text{cof.} 5 (T + t_1) \end{array}\right\} (10).$$

$'p$ & $'q$ étant deux nouvelles constantes arbitraires dépendantes des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t_1}$, lorsque $t_1 = 0$.

Si l'on avoit $\alpha = 0$, on auroit $'p = p$ & $'q = q$, donc $'p$ & $'q$ ne diffèrent de p & de q que de quantités de l'ordre α; soit donc $'p = p + \delta p$, & $'q = q + \delta q$, on aura, en comparant les équations (9) & (10), & négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\delta p = \alpha . \frac{pq}{4} . T; \quad \delta q = \alpha . \frac{(p^2 - q^2)}{8} . T;$$

d'où l'on voit que p & q sont fonctions de αT; soit $\frac{\alpha T}{8} = x$, & l'on aura comme dans l'*exemple précédent*, $\frac{\partial p}{\partial x} = 2pq$; $\frac{\partial q}{\partial x} = p^2 - q^2$; en multipliant la première de ces équations par $\sqrt{-1}$, & en l'ajoutant & la retranchant successivement de la seconde, on formera les deux suivantes,

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \sqrt{-1} . \frac{\partial p}{\partial x} = p^2 - q^2 + 2pq\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})^2$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \sqrt{-1} . \frac{\partial p}{\partial x} = p^2 - q^2 - 2pq\sqrt{-1} = (p - q\sqrt{-1})^2.$$

Soit $p + q\sqrt{-1} = s'\sqrt{-1}$, & $p - q\sqrt{-1} = s\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{\partial s'}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} - \sqrt{-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$-\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} + \sqrt{-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x};$$

donc $\frac{\partial s'}{\partial x} = -s^2$, & $\frac{\partial s}{\partial x} = (s')^2$; en différentiant cette dernière équation, on aura

$$\frac{\partial\partial s}{\partial x^2} = 2s' \frac{\partial s'}{\partial x} = -2s' \cdot s^2 = -2s^2 \cdot \sqrt{(\frac{\partial s}{\partial x})};$$

donc $(\frac{\partial s}{\partial x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial\partial s}{\partial x} = -2s^2\,\partial s$, & en intégrant,

$\frac{2}{1}(\frac{\partial s}{\partial x})^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3}s^3$, a étant une constante arbitraire; partant, $\frac{\partial s}{(a^3 - s^3)^{2}} = \partial x$, & $h + \int \frac{\partial s}{(a^3 - s^3)^{2}} = x$;

h & a étant arbitraires; de-là on aura s, & par conséquent p & q en x, & restituant au lieu de x sa valeur $\frac{\alpha T}{8}$, on aura les valeurs de ${}'p$ & de ${}'q$, & l'équation (10) donnera, en y supposant $t_1 = 0$,

$$y = {}'p \cdot \text{sin.}\, T + {}'q \cdot \text{cos.}\, T - \alpha \cdot \frac{({}'p^2 + {}'q^2)}{2} \cdot \text{sin.}\, 3T$$
$$+ \alpha \cdot \frac{{}'p^2 - {}'q^2}{96} \cdot \text{sin.}\, 5T$$
$$+ \alpha \cdot \frac{{}'p \cdot {}'q}{48} \cdot \text{cos.}\, 5T;$$

c'est l'expression de y, après le temps quelconque T; toute la difficulté se réduit donc à intégrer la quantité $\frac{\partial s}{(a^3 - s^3)^{2}}$; or elle n'est renfermée dans aucun des cas connus dans lesquels le binome $x^m\,\partial x\,(a + bx^n)^p$ est intégrable; car, pour cela, il faut, comme l'on sait, que $\frac{m+1}{n}$, ou

$\frac{m+1}{n} + p$, soient des nombres entiers, ce qui n'a point lieu pour la quantité, $\partial s.(a^3 - s^3)^{-\frac{2}{3}}$.

EXEMPLE III.

Que l'on propose encore d'intégrer l'équation,

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y - l + \alpha y^2; \quad (11).$$

On intègrera d'abord celle-ci,

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y - l;$$

ce qui donne,

$$y = l + p.\text{fin.}\, t + q.\text{cof.}\, t;$$

p & q étant des constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t}$, lorsque $t = 0$; je fais ensuite,

$$y = l + p.\text{fin.}\, t + q.\text{cof.}\, t + \alpha z;$$

& substituant cette valeur de y dans l'équation (11), elle donne, en négligeant les quantités de l'ordre α^2, & en intégrant,

$$z = -\frac{(2l^2 + p^2 + q^2)}{2} + \frac{q^2 - p^2}{6}.\text{cof.}\, 2t$$
$$+ \frac{pq}{3}.\text{fin.}\, 2t + lpt.\text{cof.}\, t - lqt.\text{fin.}\, t;$$

donc,

$$\left.\begin{array}{l} y = l - \alpha\frac{(2l^2 + p^2 + q^2)}{2} + (p - \alpha lqt).\text{fin.}\, t \\ \quad + (q + \alpha lpt).\text{cof.}\, t; \\ + \alpha.\frac{(q^2 - p^2)}{6}.\text{cof.}\, 2t + \frac{\alpha pq}{3}.\text{fin.}\, 2t \end{array}\right\} (12).$$

Que l'on fasse présentement dans l'équation (11), $t = T + t_1$, T étant supposé constant, elle deviendra,

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t_1^2} + y - l + \alpha y^2;$$

d'où l'on tirera en l'intégrant, & négligeant les quantités

de l'ordre α^2,

$$\left.\begin{aligned} y = l - \frac{\alpha(2l^2 + {}'p^2 + {}'q^2}{2} &+ ({}'p - \alpha l.\,{}'q.t_1).\,\text{fin.}\,(T + t_1) \\ &+ ({}'q + \alpha l.\,{}'p.t_1).\,\text{cof.}\,(T + t_1) \\ &+ \frac{\alpha.({}'q^2 - {}'p^2)}{6}.\,\text{cof.}\,(2T + 2t_1) \\ &+ \frac{\alpha\,{}'p.{}'q}{3}.\,\text{fin.}\,(2T + 2t_1) \end{aligned}\right\} (13).$$

${}'p$ & ${}'q$ étant deux nouvelles conſtantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t_1}$, lorſque $t_1 = 0$.

Préſentement, ſi l'on avoit $\alpha = 0$, on auroit ${}'p = p$, ${}'q = q$; donc, ${}'p$ & ${}'q$, ne diffèrent de p & de q que de quantités de l'ordre α; ſoit donc,

$${}'p = p + \delta p, \;\&\; {}'q = q + \delta q.$$

Si l'on compare les équations (12) & (13), on aura, comme dans l'exemple précédent, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\delta p = -\alpha lT.q, \;\&\; \delta q = \alpha lT.p;$$

d'où l'on voit que p & q ſont fonctions de αlT; ſoit $\alpha lT = x$, & l'on aura,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -q, \;\&\; \frac{\partial q}{\partial x} = p;$$

en intégrant cette équation, on aura,

$$p = e.\,\text{cof.}\,(x + \varpi), \;\&\; q = e.\text{fin.}\,(x + \varpi),$$

e & ϖ étant deux nouvelles conſtantes arbitraires que l'on déterminera au moyen des valeurs de p & de q, lorſque $x = 0$; on aura donc,

$${}'p = e.\text{cof.}\,(\alpha lT + \varpi);\; {}'q = e.\text{fin.}\,(\alpha lT + \varpi),$$

& l'équation (13) donnera, en y ſuppoſant $t_1 = 0$,

$$\begin{aligned} y = l - \frac{\alpha.(2l^2 + e^2)}{2} &+ e.\text{fin.}\,[\,T(1 + \alpha l) + \varpi] \\ &- \frac{\alpha e^2}{6}.\text{cof.}[2\,T(1 + \alpha l) + 2\varpi]; \end{aligned}$$

c'eſt l'expreſſion de y après le temps quelconque T, en négligeant la quantité de l'ordre α^2.

Si l'on veut pouſſer l'approximation juſques aux quantités de l'ordre α^2, on fera,

$$y = l - \frac{\alpha(2l^2 + e^2)}{2} + e.\text{ſin.}\left[t(1 + \alpha l) + \varpi\right] - \frac{\alpha e^2}{6}.\text{coſ.}\left[2t(1 + \alpha l) + \varpi\right] + \alpha^2 z,$$

& l'équation (11) donnera, en négligeant les quantités de l'ordre α^3,

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + z - 2l^3 - e^2 l - \frac{(18el^2 + 5e^3)}{6}\text{ ſin.}\left[t(1 + \alpha l) + \varpi\right] + e^2 l.\text{coſ.}\left[2t(1 + \alpha l) + 2\varpi\right] - \frac{e^3}{6}.\text{ſin.}\left[3t(1 + \alpha l) + 3\varpi\right];$$

partant, en intégrant, & en négligeant les quantités de l'ordre α, on aura,

$$z = 2l^3 + e^2 l - \frac{(18el^2 + 5e^3)}{12} t.\text{coſ.}\left[t(1 + \alpha l) + \varpi\right] + \frac{e^2 l}{3}.\text{coſ.}\left[2t(1 + \alpha l) + 2\varpi\right] - \frac{e^3}{48}.\text{ſin.}\left[3t(1 + \alpha l) + 3\varpi\right],$$

&

$$\left.\begin{aligned} y = {} & l - \alpha l^2 - \frac{\alpha e^2}{2} + 2\alpha^2 l^3 \\ & + \alpha^2 e^2 l + e.\text{ſin.}\left[t(1 + \alpha l) + \varpi\right] \\ & - \alpha^2.\frac{(18el^2 + 5e^3)}{12}.t.\text{coſ.}\left[t(1 + \alpha l) + \varpi\right] \\ & - \left[\frac{\alpha e^2}{6} - \frac{\alpha^2 e^2 l}{3}\right].\text{coſ.}\left[2t(1 + \alpha l) + 2\varpi\right] \\ & - \frac{\alpha^2 e^3}{48}.\text{ſin.}\left[3t(1 + \alpha l) + 3\varpi\right] \end{aligned}\right\} (14).$$

e & ϖ, dépendans des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t}$, lorſque $t = 0$.

Que l'on faſſe préſentement comme ci-deſſus, $t = T + t_1$ dans l'équation (11), & l'on trouvera de la même manière que nous venons de conclure l'équation (14).

$$\left.\begin{array}{l} y = l - \alpha l^2 - \frac{\alpha.{}^1e^2}{2} + 2\alpha^2.l^3 + \alpha^2.{}^1e.{}^2l \\ \qquad + {}^1e.\text{ſin.}\,[(T + t_1)(1 + \alpha l) + {}^1\varpi] \\ - \frac{\alpha^2.(18.{}^1el^2 + 5.{}^1e^3)}{12}.t_1.\text{coſ.}\,[(T + t_1)(1 + \alpha l) + {}^1\varpi] \\ - [\frac{\alpha.{}^1e^2}{6} - \frac{\alpha^2.{}^1e^2.l}{3}].\text{coſ.}\,[(2T + t_1)(1 + \alpha l) + 2.{}^1\varpi] \\ - \frac{\alpha^2.{}^1e^3}{48}.\text{ſin.}\,[(3T + 3t_1)(1 + \alpha l) + 3.{}^1\varpi] \end{array}\right\} (15).$$

${}^1e$ & ${}^1\varpi$ dépendans des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t_1}$, lorſque $t_1 = 0$; or, ſi on négligeoit les quantités de l'ordre α^2, on auroit viſiblement ${}^1e = e$, & ${}^1\varpi = \varpi$; donc, ${}^1e$ ne diffère de e, & ${}^1\varpi$ de ϖ, que de quantités de l'ordre α^2; ſoit donc, ${}^1e = e + \delta e$, & ${}^1\varpi = \varpi + \delta\varpi$; cela poſé, les équations (14) & (15) donnent, en les comparant, & en négligeant les quantités de l'ordre α^3,

$$\delta e.\text{ſin.}\,[t(1 + \alpha l) + \varpi] + e\delta\varpi.\text{coſ.}\,[t(1 + \alpha l) + \varpi]$$
$$= -\frac{\alpha^2}{12}.(18\,el^2 + 5e^3)T.\text{coſ.}\,[t(1 + \alpha l) + \varpi];$$

d'où l'on tire,

$$\delta e = 0, \;\&\; \delta\varpi = -\frac{\alpha^2}{12}.(18\,l^2 + 5e^2).T; \quad (16)$$

partant, e eſt conſtant, & ϖ eſt fonction de

$$-\frac{\alpha^2}{12}.(18\,l^2 + 5e^2).T;$$

en nommant donc $-x$ cette quantité, on aura,

$$\delta\varpi = x.\frac{\partial\varpi}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2}.\frac{\partial\partial\varpi}{\partial x^2} + \text{\&c.}$$

& l'équation (16) donnera en comparant les termes multipliés par x, $\frac{\partial\varpi}{\partial x} = -1$; partant, $\varpi = -x + \theta$, θ étant une nouvelle conſtante arbitraire que l'on déterminera au moyen de la valeur de ϖ, lorſque $x = 0$;

donc,

$$'\varpi = \theta - \frac{\alpha^2}{12}.(12l^2 + 5e^2).T;$$

l'équation (15) deviendra par conséquent en y suppofant $t_1 = 0$,

$$y = l - \alpha l^2 - \frac{\alpha^2 e^2}{2} + 2\alpha^2 l^3$$
$$+ \alpha^2 e^2 l + e.\text{fin.}[T(1 + \alpha l - \tfrac{3}{2}\alpha^2 l^2 - \tfrac{5}{12}\alpha^2 e^2) + \theta]$$
$$- \frac{\alpha e^2}{6}.(1 - 2\alpha l).\text{cof.}[2T(1 + \alpha l - \tfrac{3}{2}\alpha^2 l^2 - \tfrac{5}{12}\alpha^2 e^2) + 2\theta]$$
$$- \frac{\alpha^2 e^3}{48}.\text{fin.}[3T(1 + \alpha l - \tfrac{3}{2}\alpha^2 l^2 - \tfrac{5}{12}\alpha^2 e^2) + 3\theta];$$

c'eft aux quantités près de l'ordre α^3, la valeur de y, après le temps quelconque T; on pourroit, en fuivant ce procédé, continuer auffi loin que l'on voudroit l'approximation.

II.

La méthode de l'*article précédent* confifte, comme l'on voit, à déterminer à chaque approximation les conftantes arbitraires, de manière à faire difparoître les arcs de cercle, lorfque cela eft poffible; mais au lieu de répéter cette opération autant de fois qu'il y a d'approximations, on peut d'abord intégrer l'équation différentielle, en confervant les arcs de cercle, & en pouffant la précifion jufqu'aux quantités de l'ordre auquel on veut s'arrêter; enfuite, on n'aura plus befoin que d'une feule opération pour faire difparoître les arcs de cercle. Développons cette méthode, & pour cela, confidérons l'équation différentielle,

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y - l + \alpha y^2; \ (11).$$

que nous venons d'intégrer.

Comme je ne veux porter la précifion que jufqu'aux quantités de l'ordre α^2 inclufivement, je fais

$$y = z + \alpha z' + \alpha^2 z'',$$

en fubftituant cette valeur de y dans l'équation (11), & comparant

comparant séparément les termes sans α, ceux de l'ordre α, & ceux de l'ordre α^2, j'ai les trois équations suivantes,

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} + z - l = 0,$$

$$\frac{\partial\partial z'}{\partial t^2} + z' + z^2 = 0,$$

$$\frac{\partial\partial z''}{\partial t^2} + z'' + 2zz' = 0;$$

ce qui donne, en les intégrant successivement,

$$z = l + p \text{ sin. } t + q \text{ cos. } t;$$

$$z' = -\tfrac{1}{2}.(2l^2 + p^2 + q^2) - lqt.\text{sin. } t + lpt.\text{cos. } t + \frac{q^2 - p^2}{6}.\text{cos. } 2t + \frac{pq}{3}.\text{sin. } 2t;$$

$$\begin{aligned} z'' = {} & l.[2l^2 + p^2 + q^2] \\ & + \text{sin. } t.[\tfrac{1}{12} qt.(18l^2 + 5p^2 + 5q^2) - \tfrac{1}{2} pl^2 tt] \\ & - \text{cos. } t.[\tfrac{1}{12} pt.(18l^2 + 5p^2 + 5q^2) + \tfrac{1}{2} ql^2 tt] \\ & - \text{sin. } 2t.[\frac{2pql}{3} - l.\frac{(p^2 - q^2)}{3}.t] \\ & + \text{cos. } 2t.[l.\frac{(p^2 - q^2)}{3} + \frac{2pql}{3}.t] \\ & + p.\frac{(3q^2 - p^2)}{48} \text{ sin. } 3t + q.\frac{(q^2 - 3p^2)}{48}.\text{cos. } 3t; \end{aligned}$$

partant

$$\left.\begin{aligned} y = {} & l - \alpha.[\tfrac{1}{2} - \alpha l].[2l^2 + p^2 + q^2] \\ & + \text{sin. } t.[p - \alpha lqt + \frac{\alpha^2 qt}{12}.(18l^2 + 5p^2 + 5q^2) - \frac{\alpha^2 pl^2}{2}.tt] \\ & + \text{cos. } t.[q + \alpha lpt - \frac{\alpha^2 pt}{12}.(18l^2 + 5p^2 + 5q^2) - \frac{\alpha^2 ql^2}{2}.tt] \\ & + \alpha \text{ sin. } 2t.[\frac{pq}{3} - \frac{2\alpha pql}{3} + \frac{\alpha l.(p^2 - q^2)}{3}.t] \\ & + \alpha \text{ cos. } 2t.[\frac{q^2 - p^2}{6} + \frac{\alpha l.(p^2 - q^2)}{3} + \frac{2\alpha pql}{3}.t] \\ & + \frac{\alpha^2 p.(3q^2 - p^2)}{48}.\text{sin. } 3t + \frac{\alpha^2 q.(q^2 - 3p^2)}{48}.\text{cos. } 3t \end{aligned}\right\} (V).$$

p & q étant des constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y, & de $\frac{\partial y}{\partial t}$, lorsque $t = 0$.

Si l'on fait préfentement dans l'équation (11), $t = T + t$, on aura en l'intégrant,

$$\left.\begin{array}{l} y = l - \alpha . [\tfrac{1}{2} - \alpha l] . (2 l^2 + {}'p^2 + {}'q^2) \\ + \text{ fin.} (T + t_{,}) . [{}'p - \alpha l . {}'q t_{,} \\ + \frac{\alpha^2 . {}'q . t_{,}}{12} . (18 l^2 + 5 . {}'p^2 + 5 . {}'q^2) - \frac{\alpha^2}{2} {}'p . l^2 t_{,}^2] \\ + \text{ cof.} (T + t_{,}) . [{}'q + \alpha l . {}'p t_{,} \\ - \frac{\alpha^2 . {}'p . t_{,}}{12} . (18 l^2 + 5 . {}'p^2 + 5 . {}'q^2) - \frac{\alpha^2}{2} {}'q . l^2 t_{,}^2] \\ + \alpha . \text{fin.} 2 (T + t_{,}) . \\ \quad [\frac{{}'p . {}'q}{3} - \frac{2 \alpha . {}'p . {}'q . l}{3} + \frac{\alpha l ({}'p^2 - {}'q^2)}{3} . t_{,}] \\ + \alpha . \text{cof.} 2 (T + t_{,}) . \\ \quad [\frac{{}'q^2 - {}'p^2}{6} + \frac{\alpha l ({}'p^2 - {}'q^2)}{3} + \frac{2 \alpha . {}'p . {}'q . l}{3} . t_{,}] \\ + \frac{\alpha^2 . {}'p . (3 . {}'q^2 - {}'p^2)}{48} . \text{fin.} 3 (T + t_{,}) \\ + \frac{\alpha^2 . {}'q . ({}'q^2 - 3 . {}'p^2)}{48} . \text{cof.} 3 (T + t_{,}) \end{array}\right\} (V').$$

${}'p$ & ${}'q$ étant deux nouvelles conftantes arbitraires dépendantes des valeurs de y, & de $\frac{\partial y}{\partial t_{,}}$, lorfque $t_{,} = 0$.

On peut, fans intégrer une feconde fois, conclure l'équation (V'), de l'équation (V), en changeant dans celle-ci, p en ${}'p$, q en ${}'q$, t en $t_{,}$, excepté fous les finus & les cofinus, où l'on doit écrire $T + t_{,}$, au lieu de t.

Si l'on compare maintenant dans les équations (V) & (V'), les coëfficiens de fin. t, & de cof. t, on aura, en obfervant que $t = T + t_{,}$, les deux équations,

$$\begin{array}{l} {}'p - \alpha l . {}'q . t_{,} + \frac{\alpha^2 . {}'q . t_{,}}{12} . (18 l^2 + 5 . {}'p^2 + 5 . {}'q^2) - \frac{\alpha^2}{2} . {}'p . l^2 t_{,}^2 \\ \quad = p - \alpha (T + t_{,}) . [l q - \frac{\alpha q}{12} . (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2)] \\ \quad\quad - \frac{\alpha^2}{2} . p l^2 . (T + t_{,})^2 ; \end{array}$$

$$ {}^{1}q + \alpha l.{}^{1}p.t_1 - \frac{\alpha^2.{}^{1}q.t_1}{12}.(18l^2 + 5.{}^{1}p^2 + 5.{}^{1}q^2) - \frac{\alpha^2}{2}.{}^{1}q.l^2t_1^2 $$

$$ = q + \alpha(T + t_1).[lp - \frac{\alpha p}{12}.(18l^2 + 5p^2 + 5q^2)] $$

$$ - \frac{\alpha^2}{2}.ql^2.(T + t_1)^2; $$

Je fais dans ces deux équations $t_1 = 0$, & j'obſerve que l'on a,

$$ {}^{1}p = p + T.\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{T^2}{1.2}.\frac{\partial\partial p}{\partial T^2} + \&c. $$

$$ {}^{1}q = q + T.\frac{\partial q}{\partial T} + \frac{T^2}{1.2}.\frac{\partial\partial q}{\partial T^2} + \&c. $$

en ſubſtituant ces valeurs de p & de q, dans les équations précédentes, on aura, en comparant ſéparément les termes multipliés par T, les deux équations ſuivantes,

$$ \frac{\partial p}{\partial T} = -\alpha lq + \frac{\alpha^2 q}{12}.[18l^2 + 5p^2 + 5q^2] $$

$$ \frac{\partial q}{\partial T} = \alpha lp - \frac{\alpha^2 p}{12}.[18l^2 + 5p^2 + 5q^2]. $$

Soit $\alpha lT = x$, & l'on aura

$$ \frac{\partial p}{\partial x} = -q + \frac{\alpha q.(18l^2 + 5p^2 + 5q^2)}{12.l} $$

$$ \frac{\partial q}{\partial x} = p - \frac{\alpha p.(18l^2 + 5p^2 + 5q^2)}{12.l}. $$

Je multiplie la première de ces équations par p, la ſeconde par q, & je les ajoute enſemble, ce qui donne

$$ p\frac{\partial p}{\partial x} + q\frac{\partial q}{\partial x} = 0; $$

donc, $pp + qq = e^2$, e étant conſtant; on aura conſéquemment,

$$ \frac{\partial p}{\partial x} = -q.[1 - \frac{\alpha.(18l^2 + 5e^2)}{12.l}] $$

$$ \frac{\partial q}{\partial x} = p.[1 - \frac{\alpha.(18l^2 + 5e^2)}{12.l}]; $$

d'où je conclus en intégrant,

$$p = e \cdot \text{cof.} [x \cdot (1 - \frac{\alpha \cdot (18 l^2 + 5 e^2)}{12 \cdot l}) + \theta]$$

$$q = e \cdot \text{fin.} [x \cdot (1 - \frac{\alpha \cdot (18 l^2 + 5 e^2)}{12 \cdot l}) + \theta];$$

e & θ étant deux conftantes arbitraires dépendantes des valeurs de p & de q, lorfque $x = 0$; on aura donc,

$$'p = e \cdot \text{cof.} [\alpha T \cdot (l - \frac{\alpha (18 l^2 + 5 e^2)}{12}) + \theta]$$

$$'q = e \cdot \text{fin.} [\alpha T \cdot (l - \frac{\alpha (18 l^2 + 5 e^2)}{12}) + \theta];$$

Ainfi, l'équation (V') donnera, en y fuppofant $t_{,} = 0$,

$$y = l - \alpha \cdot (\tfrac{1}{2} - \alpha l) \cdot (2 l^2 + e^2)$$
$$+ e \,\text{fin.} [\; T(1 + \alpha l - \tfrac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \tfrac{5}{12} \alpha^2 e^2) + \theta \;]$$
$$- \frac{\alpha e^2}{6} \cdot (1 - 2\alpha l) \cdot \text{cof.} [2T(1 + \alpha l - \tfrac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \tfrac{5}{12} \alpha^2 e^2) + 2\theta]$$
$$- \frac{\alpha^2 e^3}{48} \cdot \text{fin.} [3T(1 + \alpha l - \tfrac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \tfrac{5}{12} \alpha^2 e^2) + 3\theta].$$

C'eft aux quantités près de l'ordre α^3, l'expreffion de y, après le temps quelconque T; cette valeur eft précifément la même que celle à laquelle nous fommes arrivés par un autre procédé dans l'*article précédent.*

Prenons encore pour exemple l'équation différentielle

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h^2 y = T + \alpha \cdot [T^{\text{I}} \cdot y + T^{\text{II}} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}] \\ + \alpha^2 \cdot [T^{\text{III}} \cdot y^2 + T^{\text{IV}} \cdot y \frac{\partial y}{\partial t} \\ + T^{\text{V}} \cdot \frac{\partial y^2}{\partial t^2}] \\ + \alpha^3 \cdot [T^{\text{VI}} \cdot y^3 + \&c.] + \&c. \end{aligned}\right\} (x).$$

T, T', &c. étant des fonctions rationelles & entières de finus & de cofinus de cette forme, fin. $\mathfrak{b} t$, cof. $\mathfrak{b} t$.

Soit $y = z + \alpha z^{\text{I}} + \alpha^2 z^{\text{II}} + \&c.$ & l'on aura en comparant féparément les quantités fans α, celles de l'ordre α, celles de l'ordre α^2, &c. les équations différentielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + h^2 . z = T$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} + h^2 . z' = T' z + T'' \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 z''}{\partial t^2} + h^2 . z'' = T' z' + T'' \frac{\partial z'}{\partial t} + T''' . z^2 + T^{\text{IV}} . z \frac{\partial z}{\partial t} + \&c.$$

&c.

Ces équations feront au nombre de $n + 1$, si l'on veut pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre α^n, inclusivement; on les intégrera facilement par les méthodes connues, en conservant les arcs-de-cercle, & l'on pourra, pour plus de simplicité, rejeter des valeurs de z', z'', &c. les termes de la forme $\mathfrak{C}.\,\text{fin.}\,ht$, & $\mathfrak{C}.\,\text{cof.}\,ht$, $\mathfrak{C}$ étant constant; car je suppose que dans la valeur de z' on ait le terme $\mathfrak{C}.\,\text{fin.}\,ht$; comme on peut ajouter à l'intégrale de l'équation différentielle en z' le terme $K.\,\text{fin.}\,ht$, K étant arbitraire, on pourra prendre K égal à $-\mathfrak{C}$; & dans ce cas, le terme fin. ht disparoît. A la vérité, de cette manière, z', z'', &c. ne renferment point de constantes arbitraires; mais comme z en renferme deux, la valeur de y les renfermera pareillement; partant, elle sera complète; on aura ainsi pour y une expression de cette forme,

$$y = \left.\begin{aligned}&\text{fin.}\,ht.\left\{\begin{aligned}&p + t.[K + \alpha.(ap + {}^1aq) \\ &\qquad + \alpha^2.({}^2ap^2 + {}^3apq + {}^4aq^2) \\ &\qquad + \alpha^3.({}^5ap^3 + \&c.) + \&c.] \\ &+ t^2.[{}^1K + \&c.] \\ &+ \&c.\end{aligned}\right. \\ &+ \text{cof.}\,ht.\left\{\begin{aligned}&q + t.[H + \alpha.(bq + {}^1bp) \\ &\qquad + \alpha^2.({}^2bq^2 + {}^3bpq + {}^4bp^2) \\ &\qquad + \alpha^3.({}^5bq^3 + \&c.) + \&c.] \\ &+ t^2.[{}^1H + \&c. \\ &+ \&c.\end{aligned}\right\} + R\end{aligned}\right\} (V'').$$

R étant fonction de t, de sinus & de cosinus.

Présentement, si l'on suppose dans l'équation (x); $l = T + t_1$, on aura en l'intégrant,

$$y = \text{fin.}\, h\,(T + t_1).\left\{\begin{array}{l} p' + t_1.[K + \alpha.(ap' + {}'aq') + \&c.] \\ + t_1^2.[{}'K + \&c.] \\ + \&c. \end{array}\right. \\ + \text{cof.}\, h\,(T + t_1).\left\{\begin{array}{l} q' + t_1.[H + \alpha.(bq' + {}'bp') + \&c.] \\ + t_1^2.[{}'H + \&c.] \\ + \&c. \end{array}\right\} + R' \qquad (V''')$$

p' & q', étant deux constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y, de $\frac{\partial y}{\partial t_1}$, lorsque $t_1 = 0$; R' étant ce que devient R, lorsqu'on y change p en p', q en q', & t en t_1 excepté sous les sinus & les cosinus, où il faut écrire, $T + t_1$, au lieu de t; si l'on compare maintenant les deux valeurs précédentes de y, on aura, en observant que $t = T + t_1$, & égalant séparément les coëfficiens de sin. ht, & de cos. ht.

$$\left.\begin{array}{l} p + (T + t_1).[K + \alpha.(ap + {}'aq) + \&c.] \\ \quad + (T + t_1)^2.[{}'K + \&c.] \\ \quad + \&c. \\ \qquad = p' + t_1.[K + \alpha.(ap' + {}'aq') + \&c.] \\ \qquad\quad + t_1^2.[{}'K + \&c.] \\ \qquad\quad + \&c. \end{array}\right\} (f).$$

$$\left.\begin{array}{l} q + (T + t_1).[H + \alpha.(bq + {}'bp) + \&c.] \\ \quad + (T + t_1)^2.[{}'H + \&c.] \\ \quad + \&c. \\ \qquad = q' + t_1.[H + \alpha.(bq' + {}'bp') + \&c.] \\ \qquad\quad + t_1^2.[{}'H + \&c.] \\ \qquad\quad + \&c. \end{array}\right\} (f').$$

Je fais dans ces deux équations $t_1 = 0$, & j'observe que l'on a

$$p' = p + T\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{T^2}{1.2}\cdot\frac{\partial\partial p}{\partial T^2} + \&c.$$

$$q' = q + T\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{T^2}{1.2}\cdot\frac{\partial\partial q}{\partial T^2} + \&c.$$

Subſtituant ces valeurs de p' & de q', dans les deux équations précédentes, on aura, en comparant ſéparément les termes multipliés par T, les deux ſuivantes;

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial T} = K &+ \alpha.(ap + {}^1aq)\\ &+ \alpha^2.({}^2ap^2 + {}^3apq + {}^4aq^2)\\ &+ \alpha^3.({}^5ap^3 + \&c.) + \&c. \quad (h).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial T} = H &+ \alpha.(bq + {}^1bp)\\ &+ \alpha^2.({}^2bq^2 + {}^3bpq + {}^4bp^2)\\ &+ \alpha^3.({}^5bq^3 + \&c.) + \&c. \quad (h').\end{aligned}$$

il ne s'agit donc plus que d'intégrer ces deux équations; or voici pour cela, la méthode qui m'a paru la plus ſimple.

Soit,

$$\begin{aligned}p = r &+ \alpha.(fr^2 + {}^1frs + {}^2fs^2)\\ &+ \alpha^2.({}^3fr^3 + \&c.) + \&c.\\ q = s &+ \alpha.(gs^2 + {}^1grs + {}^2gr^2)\\ &+ \alpha^2.({}^3gs^3 + \&c.) + \&c.\end{aligned}$$

en différentiant, on aura,

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial r}{\partial T}&.[1 + \alpha.(2fr + {}^1fs) + \&c.]\\ &+ \alpha.\frac{\partial s}{\partial T}.[({}^1fr + 2.{}^2fs) + \&c.]\\ \frac{\partial q}{\partial T} = \frac{\partial s}{\partial T}&.[1 + \alpha.(2gs + {}^1gr) + \&c.]\\ &+ \alpha.\frac{\partial r}{\partial T}.[({}^1gs + 2.{}^2gr) + \&c.]\end{aligned}$$

ſubſtituant, au lieu de p, q, $\frac{\partial p}{\partial T}$, $\frac{\partial q}{\partial T}$, &c. ces valeurs dans les équations (h) & (h'), on aura deux équations de cette forme.

$$\frac{\partial r}{\partial T}.[1 + \alpha.(2fr + {}'fs) + \&c.]$$
$$+ \alpha.\frac{\partial s}{\partial T}.[({}'fr + 2.{}^2fs) + \&c.]$$
$$= K + \alpha.(ar + {}'as) + \alpha^2.(mr^2 + \&c.) + \&c.$$

$$\frac{\partial s}{\partial T}.[1 + \alpha.(2gs + {}'gr) + \&c.]$$
$$+ \alpha.\frac{\partial r}{\partial T}.[({}'gs + 2.{}^2gr) + \&c.]$$
$$= H + \alpha.(bs + {}'br) + \alpha^2.(ns^2 + \&c.) + \&c.$$

Je multiplie la première par le coëfficient de $\frac{\partial s}{\partial T}$ de la seconde, & la seconde par le coëfficient de $\frac{\partial s}{\partial T}$ de la première, & je les retranche l'une de l'autre, ce qui donne une équation de cette forme,

$$\frac{\partial r}{\partial T}.[1 + \alpha(cr + {}'cs) + \&c.] = M + \alpha(er + {}'es) + \&c.$$

en divisant cette équation par $1 + \alpha(cr + {}'cs) + \&c.$ & réduisant le second membre dans une suite ascendante, par rapport à α, en ne portant la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre α^n inclusivement, on aura une équation de cette forme,

$$\frac{\partial r}{\partial T} = M + \alpha.(\beta r + {}'\beta s) + \alpha^2.({}^2\beta r^2 + {}^3\beta rs + {}^4\beta s^2) + \&c.$$

on aura, par un procédé entièrement semblable, une autre équation de cette forme,

$$\frac{\partial s}{\partial T} = N + \alpha.(\lambda s + {}'\lambda.r) + \alpha^2.({}^2\lambda s^2 + {}^3\lambda.rs + {}^4\lambda.r^2) + \&c.$$

M, N, β, ${}'\beta$, ${}^2\beta$, &c. λ, ${}'\lambda$, ${}^2\lambda$, &c. sont fonctions de f, ${}'f$, ${}^2f$, &c. g, ${}'g$, ${}^2g$, &c.

Maintenant, pour n'avoir que deux équations linéaires, je forme les suivantes.

$$^2\beta = 0, \quad ^3\beta = 0, \quad ^4\beta = 0, \; \&c.$$
$$^2\lambda = 0, \quad ^3\lambda = 0, \quad ^4\lambda = 0, \; \&c.$$

au moyen desquelles on déterminera f, ${}'f$, &c. g, ${}'g$, &c. comme

comme on porte la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^n inclusivement, il est aisé de voir que ces équations sont au nombre $(n - 1).(n + 4)$; mais on peut s'assurer aussi très-facilement que le nombre des indéterminées f, $'f$, &c. g, $'g$, &c. est également $(n - 1).(n + 4)$; d'où il suit qu'il y a autant d'inconnues que d'équations; cela posé, on aura,

$$\frac{\partial r}{\partial T} = M + \alpha.(\beta r + {}'\beta s)$$

$$\frac{\partial s}{\partial T} = N + \alpha.(\lambda s + {}'\lambda r)$$

équations très-faciles à intégrer.

Ayant ainsi les valeurs de r & de s, on concluera aisément celles de p & de q, & substituant ces valeurs dans l'équation (V''), & y supposant $t_1 = 0$, on aura, aux quantités près de l'ordre α^{n+1}, la valeur de y, après le temps quelconque T. Telle est, si je ne me trompe, la méthode la plus générale & la plus directe pour intégrer, par approximation, les équations différentielles.

En supposant dans les équations (f) & (f'), $t_1 = 0$, & en y substituant au lieu de p^1, $p + T\frac{\partial p}{\partial T} +$ &c. & au lieu de q^1, $q + T\frac{\partial q}{\partial T} +$ &c. on a simplement comparé les termes multipliés par T, & on a négligé ceux qui le sont par T^2, T^3, &c. ce qui a donné les équations (h) & (h'). Il est en effet visible que les coëfficiens de T, ceux de T^2, &c. doivent être égaux séparément; de-là il suit que les valeurs de p & de q, que donnent les équations (h) & (h), satisfont aux équations qui résulteroient de la comparaison des coëfficiens de T^2, T^3, &c. dans les équations (f) & (f'). Il seroit difficile de le démontrer d'une manière directe; mais on voit que cela doit être. Il arrive ici la même chose que dans l'application du calcul infinitésimal, où l'on néglige les quantités infiniment petites d'un ordre supérieur à celles que l'on compare, bien certain que les équations auxquelles on parvient, satisferoient aux équations résultantes de la comparaison des ordres supérieurs.

III.

Juſqu'ici, je n'ai conſidéré que les équations différentielles à deux variables; celles que j'ai intégrées dans l'*article 1.er* ſont fort ſimples, & par cette raiſon elles étoient propres à faire entendre cette nouvelle méthode; mais les ſuivantes, qui, traitées par les méthodes déjà connues, conduiroient à des calculs impraticables, en feront ſentir l'avantage, par la facilité avec laquelle elle donne leurs intégrales approchées; comme ces équations ſont à peu-près du même genre que celles du mouvement des Planètes, je vais les conſidérer ici avec étendue.

Je ſuppoſe que l'on ait entre les n variables $y, y', y'' \ldots y^{n}$, les n équations,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q^2 . y = 2\alpha q . \left\{ \begin{aligned} &(0) y + 2.(0,1).y'.\cos(q'-q)t \\ &+ 2.\frac{\overline{(0,1)}}{q'}.\frac{\partial y'}{\partial t}.\sin(q'-q)t \\ &+ 2.(0,2).y''.\cos(q''-q)t \\ &+ 2.\frac{\overline{(0,2)}}{q''}.\frac{\partial y''}{\partial t}.\sin(q''-q)t \\ &+ \&c. \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + (q')^2 . y' = 2\alpha q' . \left\{ \begin{aligned} &(1) y' + 2.(1,0).y.\cos(q-q')t \\ &+ 2.\frac{\overline{(1,0)}}{q}.\frac{\partial y}{\partial t}.\sin(q-q')t \\ &+ 2.(1,2).y''.\cos(q''-q')t \\ &+ 2.\frac{\overline{(1,2)}}{q''}.\frac{\partial y''}{\partial t}.\sin(q''-q')t \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} (\Psi).$$

$$\frac{\partial^2 y''}{\partial t^2} + (q'')^2 . y'' = 2\alpha q'' . \left\{ \begin{aligned} &(2) y'' + 2.(2,0).y.\cos(q-q'')t + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned} \right.$$

&c.

$(0), (0,1), \overline{(0,1)}, (0,2), \overline{(0,2)}$, &c. $(1), (1,0)$, &c. (2) &c. étant des coëfficiens conſtans quelconques.

J'intègre d'abord les équations,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q^2 . y = 0, \; \frac{\partial^2 y^1}{\partial t^2} + (q^1)^2 . y^1 = 0, \text{ \&c.}$$

ce qui donne,

$y = h . \text{fin.}\, qt + l . \text{cof.}\, qt;\; y^1 = h^1 . \text{fin.}\, q^1 . t + l^1 . \text{cof.}\, q^1 . t$, &c. h, h^1, &c. l, l^1, &c. étant des conſtantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y, $\frac{\partial y}{\partial t}$, y^1, $\frac{\partial y^1}{\partial t}$, &c. lorſque $t = 0$.

Je fais enſuite,

$$y = h . \text{fin.}\, qt + l . \text{cof.}\, qt + \alpha z;$$
$$y^1 = h^1 . \text{fin.}\, q^1 . t + l^1 . \text{cof.}\, q^1 . t + \alpha z^1; \text{ \&c.}$$

Je ſubſtitue ces valeurs dans les équations (Ψ), en négligeant les quantités de l'ordre α^2; elles donnent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} + q^2 z = {} & 2q . \text{fin.}\, qt . \{(0)\, h + h^1 . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ & \qquad + h^{11} . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \text{\&c.}\} \\ & + 2q . \text{cof.}\, qt . \{(0)\, l + l^1 . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ & \qquad + l^{11} . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \text{\&c.}\} \\ & + [(0,1) + \overline{(0,1)}] . 2q . [h^1 . \text{fin.}\, (2q^1 - q)\, t \\ & \qquad + l^1 . \text{cof.}\, (2q^1 - q)\, t] \\ & + \text{\&c.}\end{aligned}$$

On formera des équations analogues pour z^1, z^{11}, &c. on aura donc en intégrant & ajoutant αz à la valeur précédente de y,

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \{h + \alpha t . \big[(0)\, l + l^1 . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ & \qquad + l^{11} . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \text{\&c.}\big]\} . \text{fin.}\, qt \\ & + \{l - \alpha t . \big[(0)\, h + h^1 . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ & \qquad + h^{11} . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \text{\&c.}\big]\} . \text{cof.}\, qt \\ & + \frac{\alpha q . [(0,1) + \overline{(0,1)}]}{2q^1 . (q - q^1)} . [h^1 . \text{fin.}\, (2q^1 - q)\, t \\ & \qquad + l^1 . \text{cof.}\, (2q^1 - q)\, t] \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}\right\} (\lambda).$$

Si l'on suppose maintenant dans les équations (Ψ), $t = T + t_1$, & qu'on les intègre, on trouvera facilement,

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \{{}^{1}h + \alpha t_1 . [(0).{}^{1}l + {}^{1}l^{\mathrm{I}} . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ & \qquad + {}^{1}l^{\mathrm{II}} . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.]\} \text{ sin. } q(T + t_1) \\ & + \{{}^{1}l - \alpha t_1 . [(0).{}^{1}h + {}^{1}h^{\mathrm{I}} . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ & \qquad + {}^{1}h^{\mathrm{II}} . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.]\} \text{ cos. } q(T + t_1) \\ & + \frac{\alpha q . [(0,1) + \overline{(0,1)}]}{2q^{1}(q - q^{1})} . [{}^{1}h^{\mathrm{I}} \text{ sin. } (2q^{1} - q) . (T + t_1) \\ & \qquad + {}^{1}l^{\mathrm{I}} \text{ cos. } (2q^{1} - q) . (T + t_1)] \\ & + \&c. \end{aligned}\right\} (\lambda^{1}).$$

${}'h$, ${}'l$, ${}'h'$, ${}'l'$, &c. étant des constantes arbitraires dépendantes des valeurs de y, $\frac{\partial y}{\partial t_1}$, y', $\frac{\partial y'}{\partial t_1}$, &c. lorsque $t_1 = 0$; or, si l'on avoit $\alpha = 0$, on auroit ${}'h = h$, ${}'l = l$, ${}'h' = h'$, &c. donc ${}'h$ ne diffère de h, ${}'l$ de l, &c. que de quantités de l'ordre α; soit donc ${}'h = h + \delta h$, ${}'l = l + \delta l$, &c. & l'on aura en comparant les équations (λ), & (λ'), & en négligeant les quantités de l'ordre α^2.

$$\begin{aligned} \delta l = {} & - \alpha T . \{(0)h + h' . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ & \qquad + h'' . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.\} \\ \delta h = {} & \alpha T . \{(0)l + l' . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ & \qquad + l'' . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.\} \end{aligned}$$

Soit $\alpha T = x$; h & l seront, comme l'on voit, fonctions de x, & l'on aura

$$\delta h = x . \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} . \frac{\partial\partial h}{\partial x^2} + \&c.$$

$$\delta l = x . \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} . \frac{\partial\partial l}{\partial x^2} + \&c.$$

donc en comparant les termes multipliés par x, on aura

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= (0)l + l' . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\
&\quad + l'' . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \\
\frac{\partial l}{\partial x} &= -(0)h - h' . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\
&\quad - h'' . [(0,2) - \overline{(0,2)}] - \&c.
\end{aligned}\right.$$

on trouvera de la même manière,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial h'}{\partial x} &= (1)l' + l . [(1,0) - \overline{(1,0)}] \\
&\quad + l'' . [(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c. \\
\frac{\partial l'}{\partial x} &= -(1)h' - h . [(1,0) - \overline{(1,0)}] \\
&\quad - h'' . [(1,2) - \overline{(1,2)}] - \&c. \\
\frac{\partial h''}{\partial x} &= (2)l'' + l . [(2,0) - \overline{(2,0)}] \\
&\quad + l' . [(2,1) - \overline{(2,1)}] + \&c. \\
\frac{\partial l''}{\partial x} &= -(2)h'' - h . [(2,0) - \overline{(2,0)}] \\
&\quad - h' . [(2,1) - \overline{(2,1)}] - \&c.
\end{aligned}\right\} (\Psi).$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'intégrer ces équations, & pour cela on fera, ainsi que M. de la Grange l'a pratiqué dans un cas à peu-près semblable (voyez son excellente Pièce *sur le mouvement des nœuds, & l'inclinaison des orbites des Planètes*).

$$\begin{aligned}
h &= b . \text{sin.} (fx + \varpi), & l &= b . \text{cos.} (fx + \varpi), \\
h' &= b' . \text{sin.} (fx + \varpi), & l' &= b' . \text{cos.} (fx + \varpi), \\
&\&c. & &\&c.
\end{aligned}$$

& l'on aura les n équations

$$\begin{aligned}
fb &= (0)b + b' . [(0,1) - \overline{(0,1)}] + b'' . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \\
fb' &= (1)b' + b . [(1,0) - \overline{(1,0)}] + b'' . [(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c. \\
fb'' &= (2)b'' + b . [(2,0) - \overline{(2,0)}] + b' . [(2,1) - \overline{(2,1)}] + \&c. \\
&\&c.
\end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
0 &= b.[\ (0) - f\ ] + b'.[(0,1) - \overline{(0,1)}] + b''.[(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.\\
0 &= b.[(1,0) - \overline{(1,0)}] + b'.[\ (1) - f\ ] + b''.[(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c.\\
0 &= b.[(2,0) - \overline{(2,0)}] + b'.[(2,1) - \overline{(2,1)}] + b''.[\ (2) - f\ ] + \&c.
\end{aligned}\right\}(>).$$

&c.

de ces équations, on en tirera une en f; les Géomètres ont donné pour cet objet des règles générales (voyez l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes de M. Cramer, & les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1764, p. 292)*; mais comme elles ne me paroissent avoir été jusqu'ici démontrées que par induction, & que d'ailleurs elles sont impraticables, pour peu que le nombre des équations soit considérable; je vais reprendre de nouveau cette matière, & donner quelques procédés plus simples que ceux qui sont déjà connus, pour éliminer entre un nombre quelconque d'équations du premier degré.

I V.

Je suppose que l'on ait entre les n inconnues μ, μ', μ'', &c. les n équations

$$\begin{aligned}
0 &= {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' + {}^1c.\mu'' + \&c.\\
0 &= {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' + {}^2c.\mu'' + \&c.\\
0 &= {}^3a.\mu + {}^3b.\mu' + {}^3c.\mu'' + \&c.
\end{aligned}$$

&c.

Les nombres 1, 2, 3, &c. placés à gauche des lettres a, b, c, &c. étant ce que je nommerai dans la suite *indices* de ces lettres; on déterminera ainsi l'équation de condition qui doit avoir lieu entre les quantités ${}^1a$, ${}^1b$, ${}^1c$, &c. ${}^2a$, ${}^2b$, &c. ${}^3a$, &c. pour que les équations précédentes soient possibles.

Lorsque dans un produit tel que ${}^1d.{}^2c.{}^3b.{}^4a$, dont les indices suivent la loi des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, une lettre telle que b, précède une autre lettre dont elle est précédée dans l'ordre de l'alphabet, j'appelle cela *variation*, &

un terme a d'autant plus de variations que cela peut arriver de plus de manières; par exemple, dans le terme ${}^{1}\partial.{}^{2}c.{}^{3}b.{}^{4}a$, ∂ précède c, b, a, dont il eſt précédé dans l'ordre de l'alphabet, ce qui forme trois variations; c, précède b & a, ce qui donne deux variations, & b précède a, d'où réſulte une variation; ainſi ce terme renferme ſix variations; cela poſé, formez toutes les permutations poſſibles entre toutes les lettres a, b, c, ∂, e, &c. & dans chaque permutation, donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la ſeconde, l'indice 3 à la troiſième, &c. enſuite faites précéder chaque permutation du ſigne $+$ ſi le nombre des variations y eſt nul ou pair, & du ſigne $-$ ſi ce nombre eſt impair; en égalant à zéro la ſomme de tous ces termes, vous aurez l'équation de condition demandée.

Cette règle eſt dûe à M. Cramer, mais elle peut être ſimplifiée par le procédé ſuivant, que M. Bézout a donné dans l'endroit cité des Mémoires de l'Académie.

Écrivez la lettre a, & avec cette lettre & la lettre b, formez toutes les permutations poſſibles, en écrivant d'abord la lettre b, la dernière, enſuite l'avant-dernière, & changeant de ſigne, lorſque b change de place, & vous aurez $+ab - ba$.

Avec ces deux permutations & la lettre c, formez toutes les permutations poſſibles, en écrivant d'abord dans chaque terme la lettre c, la dernière, enſuite l'avant-dernière, & ainſi de ſuite; & changeant de ſigne toutes les fois que c change de place, & vous aurez

$$+abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Combinez de la même manière toutes ces permutations avec la lettre d, & ainſi de ſuite, en employant autant de lettres qu'il y a d'inconnues μ, μ^{1}, &c. cela poſé, donnez dans chaque terme l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la ſeconde, l'indice 3 à la troiſième, &c. en égalant à zéro la ſomme de tous ces termes, vous aurez l'équation de condition demandée.

Cette règle eſt, comme l'on voit, d'un uſage fort commode, & il eſt facile de s'aſſurer qu'elle retombe dans celle de M. Cramer. Cela eſt d'abord évident pour les deux permutations $+ ab - ba$; ſi on les combine préſentement avec la lettre c, il eſt aiſé de voir qu'en écrivant dans ces deux termes la lettre c la dernière, le nombre des variations dans chacun d'eux ne changera pas, auſſi conſervent-ils le même ſigne qu'ils avoient; mais ſi dans ces termes on écrit la lettre c l'avant-dernière, le nombre de leurs variations eſt alors augmenté d'une unité, & ſuivant la règle, ils changent de ſigne; d'où il ſuit généralement que les termes dont le nombre des variations ſera zéro ou pair, auront le ſigne $+$ & les autres le ſigne $-$. D'ailleurs, le nombre des termes dont l'équation de condition eſt formée, eſt, ſuivant les deux méthodes, égal à $1 . 2 . 3 \ldots n$, s'il y a n lettres; & tous ces termes ſont différens les uns des autres; donc l'équation de condition ſera la même dans les deux cas. Nous allons préſentement démontrer la règle de M. Bézout, comme étant la plus ſimple.

Si au lieu de combiner d'abord la lettre a avec la lettre b, enſuite ces deux-ci avec la lettre c, & ainſi de ſuite; c'eſt-à-dire, ſi au lieu de combiner les lettres a, b, c, ∂, e, &c. dans l'ordre a, b, c, ∂, e, &c. on les eût combinées dans l'ordre a, c, b, ∂, e, &c. ou a, ∂, b, c, e, &c. ou a, e, b, c, ∂, &c. ou &c. je dis qu'on auroit toujours eu la même quantité à la différence des ſignes près.

Pour démontrer ce Théorème, nommons en general, *réſultante*, la quantité qui réſulte de l'une quelconque de ces combinaiſons, en ſorte que la *première réſultante* ſoit celle qui vient de la combinaiſon ſuivant l'ordre a, b, c, ∂, e, &c. que la *ſeconde réſultante* ſoit celle qui vient de la combinaiſon, ſuivant l'ordre a, c, b, ∂, e, &c. que la *troiſième réſultante* ſoit celle qui vient de la combinaiſon, ſuivant l'ordre a, ∂, b, c, e, &c. & ainſi de ſuite; cela poſé, il eſt clair que toutes ces réſultantes renferment le même nombre de termes, & préciſément les mêmes, puiſqu'elles renferment tous les termes qui

qui peuvent résulter de la combinaison des n lettres a, b, c, ∂, e, &c. disposées entre elles de toutes les manières possibles; il ne peut donc y avoir de différence entre deux résultantes, que dans les signes de chacun de leurs termes; or, il est visible que la première résultante donne la seconde, si l'on change dans la première b en c, & réciproquement c en b; mais ce changement augmente ou diminue d'une unité le nombre des variations de chaque terme; d'où il suit que dans la seconde résultante, tous les termes dont le nombre des variations est impair, auront le signe $+$, & les autres le signe $-$; partant, cette seconde résultante n'est que la première, prise négativement.

Il est visible pareillement que la seconde résultante donnera le troisième, en y changeant c en ∂, & réciproquement; or, ce changement augmente ou diminue d'une unité le nombre des variations de chaque terme; donc les termes dont le nombre des variations est zéro ou pair dans la troisième résultante, auront le signe $+$, & les autres le signe $-$; de-là on concluera généralement que si l'on nomme R la première résultante, R' la seconde, R'' la troisième, &c. on aura $R' = - R$; $R'' = R$; $R''' = - R$; &c.

Il suit de-là que si dans la première résultante, on change a en b, & réciproquement, ou a en c, & réciproquement, ou a en ∂, & réciproquement, &c. on aura toujours la même résultante, à la différence des signes près; car l'échange de a en b, & de b en a, ne signifie autre chose, sinon qu'au lieu de combiner $+ ab - ba$, avec les lettres c, ∂, e, &c. on combine $- ab + ba$ avec ces mêmes lettres, ce qui donne la première résultante prise en $-$; pareillement, l'échange de a en c, & de c en a, indique qu'au lieu de combiner $+ ac - ca$ avec les lettres b, ∂, e, &c. on combine avec elles $- ac + ca$, ce qui donne la seconde résultante prise en $-$, ou la première prise en $+$, & ainsi de suite.

Il suit encore du théorème précédent, que, si dans la première résultante, on écrit b, ou c, ou ∂, ou &c. par-tout

où eſt a, cette réſultante ſera identiquement nulle; car je ſuppoſe que l'on écrive c au lieu de a, la première réſultante eſt égale, par ce que nous venons de voir à la troiſième, c'eſt-à-dire à celle qui réſulte de la combinaiſon ſuivant l'ordre a, c, b, ∂, e, &c. or, en combinant d'abord les deux lettres a, & c, on $a + ac - ca$; ſi l'on combine ces deux termes avec la lettre b, enſuite ceux-ci avec la lettre ∂, &c. il eſt viſible que la quantité qui en réſultera deviendra identiquement nulle, en écrivant c, au lieu de a, parce qu'alors $ac - ca$, devient identiquement nul.

Je ſuppoſe maintenant que l'on ait les trois équations,

$$0 = {}^1a.\mu + {}^1b.\mu^{\text{I}} + {}^1c.\mu^{\text{II}},$$
$$0 = {}^2a.\mu + {}^2b.\mu^{\text{I}} + {}^2c.\mu^{\text{II}},$$
$$0 = {}^3a.\mu + {}^3b.\mu^{\text{I}} + {}^3c.\mu^{\text{II}};$$

je forme d'abord la réſultante des trois lettres a, b, c, ſuivant l'ordre a, b, c, ce qui donne,

$${}^1a.{}^2b.{}^3c - {}^1a.{}^2c.{}^3b + {}^1c.{}^2a.{}^3b - {}^1b.{}^2a.{}^3c + {}^1b.{}^2c.{}^3a - {}^1c.{}^2b.{}^3a,$$

ou

$${}^1a.[{}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b] + {}^2a.[{}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c] + {}^3a.[{}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b];$$

je multiplie enſuite la première des équations précédentes par ${}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b$, la ſeconde par ${}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c$, la troiſième par ${}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b$, & je les ajoute enſemble, ce qui donne,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mu.[{}^1a.({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a.({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a.({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] \\ & + \mu^{\text{I}}.[{}^1b.({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2b.({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3b.({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] \\ & + \mu^{\text{II}}.[{}^1c.({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2c.({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3c.({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)]; \end{aligned}$$

or, il ſuit de ce que nous venons de voir, que les coëfficiens de μ^{I} & μ^{II}, ſont identiquement nuls, puiſqu'ils ne ſont que la réſultante des trois lettres a, b, c, dans laquelle on écrit b, ou c, par-tout où eſt a; donc, on aura pour l'équation de condition demandée.

$$0 = {}^1a.({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a.({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a.({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b);$$

c'eſt-à-dire, la réſultante de la combinaiſon des trois lettres

a, *b*, *c*, égalée à zéro. On démontreroit la même chose, quel que soit le nombre des équations.

Pour montrer l'analogie de cette matière, avec l'élimination des équations du premier degré, je suppose que l'on ait les trois équations,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}p &= {}^{1}a.\mu + {}^{1}b.\mu' + {}^{1}c.\mu'', \\
{}^{2}p &= {}^{2}a.\mu + {}^{2}b.\mu' + {}^{2}c.\mu'', \\
{}^{3}p &= {}^{3}a.\mu + {}^{3}b.\mu' + {}^{3}c.\mu''.
\end{aligned}
$$

Je multiplie, comme ci-devant, la première par $({}^{2}b.{}^{3}c - {}^{2}c.{}^{3}b)$, la seconde par $({}^{1}c.{}^{3}b - {}^{1}b.{}^{3}c)$, & la troisième par $({}^{1}b.{}^{2}c - {}^{1}c.{}^{2}b)$, je les ajoute ensemble, & j'observe que les coëfficiens de μ', & de μ'', sont identiquement nuls dans l'équation qui en résulte; d'où je conclus,

$$\mu = \frac{{}^{1}p.({}^{2}b.{}^{3}c - {}^{2}c.{}^{3}b) + {}^{2}p.({}^{1}c.{}^{3}b - {}^{1}b.{}^{3}c) + {}^{3}p.({}^{1}b.{}^{2}c - {}^{1}c.{}^{2}b)}{{}^{1}a.({}^{2}b.{}^{3}c + {}^{2}c.{}^{3}b) + {}^{2}a.({}^{1}c.{}^{3}b - {}^{1}b.{}^{3}c) + {}^{3}a.({}^{1}b.{}^{2}c + {}^{1}c.{}^{2}b)};$$

on voit donc que le numérateur de l'expression de μ, se forme du dénominateur, en y changeant *a* en *p*; on aura ensuite μ' ou μ'', en changeant dans l'expression de μ, *a* en *b*, ou en *c*, & réciproquement; mais en changeant dans le dénominateur de μ, *a* en *b*, & réciproquement, on a toujours, par ce qui précède, la même quantité, au signe près; donc la valeur de μ' sera $\frac{K}{-R}$, *R* étant le dénominateur de μ, en ce qui revient au même, la première résultante des trois lettres *a*, *b*, *c*; *K* se formera de $-R$, en y changeant *b* en *p*; partant $-K$, se formera de *R*, en y changeant *b* en *p*; donc $\mu' = \frac{K}{-R} = \frac{-K}{R}$; ainsi l'expression de μ' est réduite au même dénominateur que celle de μ, & les numérateurs de ces deux expressions se forment du dénominateur commun *R*, en y changeant *a* en *p* pour μ, & *b* en *p* pour μ'; on démontreroit de la même manière que l'expression de μ'' a *R* pour dénominateur, & que son numérateur se forme de *R*, en y changeant *c* en *p*,

& cette règle a généralement lieu, quel que soit le nombre des équations.

Voici maintenant un procédé fort simple qui peut considérablement abréger le calcul de l'équation de condition entre les lettres a, b, c, &c.

Je suppose que vous ayez deux équations,

$$0 = {}^1a \cdot \mu + {}^1b \cdot \mu^1; \qquad 0 = {}^2a \cdot \mu + {}^2b \cdot \mu^1,$$

écrivez $+ ab$, & donnez l'indice 1 à la première lettre, & l'indice 2 à la seconde; l'équation de condition demandée, sera $+ {}^1a \cdot {}^2b - {}^1b \cdot {}^2a = 0$.

Je suppose que vous ayez trois équations; écrivez $+ ab$, combinez ce terme avec la lettre c de toutes les manières possibles, en changeant le signe de chaque terme chaque fois que c change de place, vous aurez ainsi $+ abc - acb + cab$; donnez dans chaque terme l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, & vous aurez $+ {}^1a \cdot {}^2b \cdot {}^3c - {}^1a \cdot {}^2c \cdot {}^3b + {}^1c \cdot {}^2a \cdot {}^3b$; cela posé, au lieu de $+ {}^1a \cdot {}^2b \cdot {}^3c$, écrivez $+ ({}^1a \cdot {}^2b - {}^2b \cdot {}^1a) \cdot {}^3c$; au lieu de $- {}^1a \cdot {}^2c \cdot {}^3b$, écrivez $- (a \cdot {}^3b - {}^1b \cdot {}^3a) \cdot {}^2c$; & au lieu de $+ {}^1c \cdot {}^2a \cdot {}^3b$, écrivez $+ ({}^2a \cdot {}^3b - {}^2b \cdot {}^3a) \cdot {}^1c$; l'équation de condition demandée sera

$$0 = ({}^1a \cdot {}^2b - {}^1b \cdot {}^2a) \cdot {}^3c - ({}^1a \cdot {}^3b - {}^1b \cdot {}^3a) \cdot {}^2c + ({}^2a \cdot {}^3b - {}^2b \cdot {}^3a) \cdot {}^1c.$$

Je suppose que vous ayez quatre équations, écrivez $+ abc - acb + cab$, & combinez ces trois termes avec la lettre ∂, en observant 1.° de n'admettre que les termes dans lesquels c précède ∂; 2.° de changer de signe dans chaque terme toutes les fois que ∂ change de place, & vous aurez

$$+ abc\partial - acb\partial + ac\partial b + cab\partial - ca\partial b + c\partial ab;$$

donnez ensuite l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, &c. & vous aurez

$$+ {}^1a \cdot {}^2b \cdot {}^3c \cdot {}^4\partial - {}^1a \cdot {}^2c \cdot {}^3b \cdot {}^4\partial + {}^1a \cdot {}^2c \cdot {}^3\partial \cdot {}^4b + {}^1c \cdot {}^2a \cdot {}^3b \cdot {}^4\partial - {}^1c \cdot {}^2a \cdot {}^3\partial \cdot {}^4b + {}^1c \cdot {}^2\partial \cdot {}^3a \cdot {}^4b;$$

cela posé, au lieu de $+ {}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4\partial$, écrivez

$$+ ({}^1a.{}^2b - {}^1b.{}^2a).({}^3c.{}^4\partial - {}^3\partial.{}^4c),$$

& ainsi des autres termes, & l'équation de condition sera

$$\begin{aligned} 0 = &+ ({}^1a.{}^2b - {}^1b.{}^2a).({}^3c.{}^4\partial - {}^3\partial.{}^4c) - ({}^1a.{}^3b - {}^1b.{}^3a).({}^2c.{}^4\partial - {}^2\partial.{}^4c) \\ &+ ({}^1a.{}^4b - {}^1b.{}^4a).({}^2c.{}^3\partial - {}^2\partial.{}^3c) + ({}^2a.{}^3b - {}^2b.{}^3a).({}^1c.{}^4\partial - {}^1\partial.{}^4c) \\ &- ({}^2a.{}^4b - {}^2b.{}^4a).({}^1c.{}^3\partial - {}^1\partial.{}^3c) + ({}^3a.{}^4b - {}^3b.{}^4a).({}^1c.{}^2\partial - {}^1\partial.{}^2c). \end{aligned}$$

Je suppose que vous ayez cinq équations, écrivez les six termes $+ abcd - acbd +$ &c. relatifs à quatre équations, & combinez-les avec la lettre e de toutes les manières possibles, en observant de changer de signe chaque fois que e change de place; donnez ensuite l'indice 1 à la première lettre de chaque terme, l'indice 2 à la seconde, &c. cela posé, transformez chacun de ces termes dans un autre suivant la méthode que nous venons de prescrire pour les équations à trois & à quatre inconnues; ainsi au lieu du terme $+ {}^1a.{}^2c.{}^3b.{}^4e.{}^5\partial$, écrivez $+ ({}^1a.{}^3b - {}^1b.{}^3a).({}^2c.{}^5\partial - {}^2\partial.{}^5c).{}^4e$; en égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez l'équation de condition demandée.

Lorsqu'on aura six équations, on combinera les termes $+ abc\partial e - abce\partial +$ &c. relatifs à cinq équations avec la lettre f, en observant 1.° de n'admettre que les termes dans lesquels e précède f; 2.° de changer de signe lorsque f change de place; on transformera ensuite, par la règle précédente, chaque terme dans un autre composé du produit des trois facteurs, chacun de deux dimensions & de deux termes, & l'on aura l'équation de condition demandée; il en sera de même pour un nombre quelconque d'équations.

Il est aisé de voir qu'en effectuant les multiplications, les termes qui en résulteroient seroient tous différens les uns des autres, en sorte que par ce procédé on n'a aucun terme inutile; on voit d'ailleurs qu'il abrège considérablement le calcul de l'équation de condition. Il faut présentement la démontrer, & pour cela nommons (R) l'équation de condition

qu'il donne, & *R*, celle qui résulte des méthodes de M.rs Cramer & Bezout; nommons de plus *dérangemens*, les cas dans lesquels *b* précède *a*, où *c* précède *d*, où *e* précède *f*, &c. en sorte qu'il y ait d'autant plus de dérangemens dans un terme, que cela y arrive de plus de manières; cela posé, il est clair, d'après la formation de *(R)*, que cette quantité renferme tous les termes de *R*; car *(R)* renferme 1.° toutes les combinaisons possibles entre *a*, *b*, *c*, &c. dont le nombre des dérangemens est nul; 2.° toutes les combinaisons dont le nombre des dérangemens est 1; 3.° toutes celles dont le nombre des dérangemens est 2, & ainsi de suite; donc *(R)* renferme tous les termes qui peuvent résulter de la combinaison de *n* lettres *a*, *b*, *c*, &c. & par conséquent cette équation renferme les mêmes termes que *R*; d'ailleurs chaque terme de *(R)* a le même signe que son correspondant dans *R*. 1.° Cela est évident pour les termes dont le nombre des dérangemens est zéro, puisqu'ils sont formés de la même manière dans les deux équations; 2.° ceux qui ont un dérangement, ont des signes contraires aux premiers, & cela a pareillement lieu dans *R*, puisqu'en changeant *b* en *a*, & réciproquement, ou *d* en *c*, & réciproquement, ou &c. le nombre des variations augmente ou diminue d'une unité, & partant, le signe de chaque terme est différent; 3.° les termes qui ont deux dérangemens, ont des signes contraires à ceux qui n'en ont qu'un, ce qui a lieu également pour *R*, & ainsi de suite; d'où l'on voit que l'équation *(R)* est identiquement la même que l'équation *R*. On peut aisément déterminer le nombre des termes de l'équation *(R)*; car celui de l'équation *R* étant $1 . 2 . 3 \ldots n$; si *n* est pair, chaque terme de *(R)* sera le produit de $\frac{n}{2}$ facteurs de deux termes, ce qui donnera, après avoir effectué les multiplications $2^{\frac{n}{2}}$ termes; donc, si l'on nomme *q*, le nombre des termes de *(R)*, on aura, après les multiplications, $q . 2^{\frac{n}{2}}$ termes qui, comme nous

l'avons vu, sont tous différens; partant, (R) étant égale à R, on aura $q \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$; donc $q = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2^{\frac{n}{2}}}$; on trouvera par le même raisonnement que si n est impair, on a $q = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2^{\frac{n-1}{2}}}$.

On peut réduire encore de la manière suivante l'équation R en termes composés de facteurs de trois dimensions; pour cela je désigne par (abc) la quantité

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba,$$

& par (ab) la quantité $ab - ba$, & ainsi de suite; par $({}^1a.{}^2b.{}^3c)$, j'indiquerai la quantité (abc), dans les termes de laquelle on donne 1 pour indice à la première lettre, 2 à la seconde, & 3 à la troisième; par $({}^1a.{}^2b)$, je désignerai la quantité (ab), dans les termes de laquelle on donne 1 pour indice à la première lettre, & 2 à la seconde; & ainsi de suite.

Je suppose maintenant que vous ayez trois équations, l'équation de condition sera, $0 = ({}^1a.{}^2b.{}^3c)$.

Je suppose que vous ayez quatre équations; écrivez $+ abc$, & combinez ce terme de toutes les manières possibles avec la lettre ∂, en observant de changer de signe lorsque ∂ change de place, ce qui donne $+ abc\partial - ab\partial c + a\partial bc - \partial abc$; donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, &c. & vous aurez

$$+ {}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4\partial - {}^1a.{}^2b.{}^3\partial.{}^4c + {}^1a.{}^2\partial.{}^3b.{}^4c - {}^1\partial.{}^2a.{}^3b.{}^4c;$$

au lieu du terme $+ {}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4\partial$, écrivez $+ ({}^1a.{}^2b.{}^3c).{}^4\partial$; au lieu de $- {}^1a.{}^2b.{}^3\partial.{}^4c$; écrivez $- ({}^1a.{}^2b.{}^4c).{}^3\partial$, & ainsi de suite, & vous formerez l'équation de condition

$$0 = ({}^1a.{}^2b.{}^3c).{}^4\partial - ({}^1a.{}^2b.{}^4c).{}^3\partial + ({}^1a.{}^3b.{}^4c).{}^2\partial - ({}^2a.{}^3b.{}^4c).{}^1\partial.$$

Je suppose que vous ayez cinq équations, combinez les termes $+ abc\partial - ab\partial c +$ &c. relatifs à quatre équations

avec la lettre e, en obſervant 1.° de n'admettre que les termes dans leſquels ∂ précède e; 2.° de changer de ſigne lorſque e change de place, & vous aurez

$$+\ abc\partial e - ab\partial ce + ab\partial ec + \text{\&c.}$$

donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la ſeconde, &c. & vous aurez

$$+\ {}^{1}a.{}^{2}b.{}^{3}c.{}^{4}\partial.{}^{5}e - {}^{1}a.{}^{2}b.{}^{3}\partial.{}^{4}c.{}^{5}e + {}^{1}a.{}^{2}b.{}^{3}\partial.{}^{4}e.{}^{5}c + \text{\&c.}$$

enſuite, au lieu de $+\,{}^{1}a.{}^{2}b.{}^{3}c.{}^{4}\partial.{}^{5}e$, écrivez $+\,({}^{1}a.{}^{2}b.{}^{3}c).({}^{4}\partial.{}^{5}e)$; au lieu de $-\ {}^{1}a.{}^{2}b.{}^{3}\partial.{}^{4}c.{}^{5}e$, écrivez $-\ ({}^{1}a.{}^{2}b.{}^{4}c).({}^{3}\partial.{}^{5}e)$, & ainſi de ſuite; & en égalant à zéro la ſomme de tous ces termes, vous formerez l'équation de condition demandée.

Je ſuppoſe que vous ayez ſix équations, combinez les termes $+\ abc\partial e$ — &c. relatifs à cinq équations avec la lettre f, en obſervant 1.° de n'admettre que les termes où e précède f; 2.° de changer de ſigne lorſque f change de place; donnez enſuite 1 pour indice à la première lettre, 2 à la ſeconde, &c. & au lieu d'un terme quelconque tel que ${}^{1}a.{}^{2}\partial.{}^{3}b.{}^{4}e.{}^{5}c.{}^{6}f$, écrivez $({}^{1}a.{}^{3}b.{}^{5}c).({}^{2}\partial.{}^{4}e.{}^{6}f)$, & ainſi des autres termes, & en égalant à zéro la ſomme de tous ces termes, vous aurez l'équation de condition demandée.

Si vous avez ſept équations, combinez les termes $+\ abc\partial ef$ — &c. relatifs à ſix équations avec la lettre g, de toutes les manières poſſibles; pour huit équations, combinez les termes relatifs à ſept avec la lettre h, en n'admettant que les termes dans lequel g précède h, & ainſi du reſte.

On décompoſeroit de la même manière l'équation R en termes compoſés de facteurs de 4, de 5, &c. dimenſions.

V.

Je reprends maintenant les équations *(>)* de l'*article III*, & j'obſerve que l'équation de condition qui en réſulte eſt du degré n, par rapport à f; car il eſt aiſé de voir, par l'*article précédent*, qu'elle renfermera le terme

$$[(0)-f].[(1)-f].[(2)-f]\ldots[(n-1)-f],$$

lequel

lequel est du degré n par rapport à f, & ce terme est celui qui renferme la plus haute puissance de f. Soient $f, {}^{1}f, {}^{2}f$, &c. les n racines de cette équation de condition; il est visible que les équations (ψ) de l'*article III* étant linéaires, leur intégrale complète sera

$$
\begin{aligned}
h &= b \,.\,\text{fin.}(fx + \varpi) + {}^{1}b \,.\,\text{fin.}({}^{1}fx + {}^{1}\varpi) \\
&\qquad + {}^{2}b \,.\,\text{fin.}({}^{2}fx + {}^{2}\varpi) + \&c. \\
l &= b \,.\,\text{cof.}(fx + \varpi) + {}^{1}b \,.\,\text{cof.}({}^{1}fx + {}^{1}\varpi) \\
&\qquad + {}^{2}b \,.\,\text{cof.}({}^{2}fx + {}^{2}\varpi) + \&c. \\
h^{1} &= b^{1} .\,\text{fin.}(fx + \varpi) + {}^{1}b^{1} .\,\text{fin.}({}^{1}fx + {}^{1}\varpi) \\
&\qquad + {}^{2}b^{1} .\,\text{fin.}({}^{2}fx + {}^{2}\varpi) + \&c. \\
l^{1} &= b^{1} .\,\text{cof.}(fx + \varpi) + {}^{1}b^{1} .\,\text{cof.}({}^{1}fx + {}^{1}\varpi) + \&c. \\
h^{11} &= b^{11} .\,\text{fin.}(fx + \varpi) + \&c. \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

$b, {}^{1}b, {}^{2}b$, &c. $b^{1}, {}^{1}b^{1}$, &c. b^{11}, &c. $\varpi, {}^{1}\varpi$, &c. étant des constantes arbitraires, telles que b & ϖ, b^{1} & ϖ, b^{11} & ϖ, &c. dépendent de la même manière de f, que ${}^{1}b$ & ${}^{1}\varpi$, ${}^{1}b^{1}$ & ${}^{1}\varpi$, ${}^{1}b^{11}$ & ${}^{1}\varpi$, &c. dépendent de ${}^{1}f$, ou que ${}^{2}b$ & ${}^{2}\varpi$, &c. dépendent de ${}^{2}f$, & ainsi de suite.

Soient H, H^{1}, &c. L, L^{1}, &c. les valeurs de h, h^{1}, &c. l, l^{1}, &c. à l'origine des intégrables que je suppose commencer avec x, on aura,

$$
\left.
\begin{aligned}
H &= b \,.\,\text{fin.}\varpi + {}^{1}b \,.\,\text{fin.}{}^{1}\varpi + {}^{2}b \,.\,\text{fin.}{}^{2}\varpi + \&c. \\
H^{1} &= b^{1} .\,\text{fin.}\varpi + {}^{1}b^{1} .\,\text{fin.}{}^{1}\varpi + {}^{2}b^{1} .\,\text{fin.}{}^{2}\varpi + \&c. \\
&\quad \&c. \\
L &= b \,.\,\text{cof.}\varpi + {}^{1}b \,.\,\text{cof.}{}^{1}\varpi + {}^{2}b \,.\,\text{cof.}{}^{2}\varpi + \&c. \\
L^{1} &= b^{1} .\,\text{cof.}\varpi + {}^{1}b^{1} .\,\text{cof.}{}^{1}\varpi + \&c. \\
&\quad \&c.
\end{aligned}
\right\} (\Gamma).
$$

On aura ainsi $2n$, équations; mais on formera $n - 1$, systèmes d'équations semblables à celui des équations $(>)$ de l'*art. III*, en prenant successivement au lieu de f, b, b^{1}, &c. les quantités ${}^{1}f, {}^{1}b, {}^{1}b^{1}$, &c. ou ${}^{2}f, {}^{2}b, {}^{2}b^{1}$, &c. ou ${}^{3}f$, &c. Si

dans chaque système on élimine f, ${}^{1}f$, ${}^{2}f$, &c. on formera $n.(n - 1)$, équations entre b, b^{1}, &c. ${}^{1}b$, ${}^{1}b^{1}$, &c. ${}^{2}b$, &c. lesquelles étant ajoutées avec les $2n$ précédentes, donneront $nn + n$, équations entre les $nn + n$, indéterminées, ϖ, ${}^{1}\varpi$, &c. b, b^{1}, &c. ${}^{1}b$, ${}^{1}b^{1}$, &c.

En suivant les méthodes ordinaires d'élimination, on tomberoit dans des calculs impraticables; mais M. de la Grange a donné dans la pièce déjà citée, *sur le mouvement des nœuds & l'inclinaison des orbites des Planètes*, une très-belle méthode pour éliminer dans un cas à peu-près semblable; comme elle me paroît être ce qu'on peut trouver de plus simple, je vais l'exposer ici en peu de mots, pour dispenser le lecteur de la chercher ailleurs.

Soit,

$$H_{1} = (0).H + H^{1}.[(0,1) - \overline{(0,1)}]$$
$$+ H^{11}.[(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.$$
$$H_{1}^{1} = (1).H^{1} + H.[(1,0) - \overline{(1,0)}]$$
$$+ H^{11}.[(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c.$$
$$H_{1}^{11} = (2).H^{11} + \&c.$$
&c.

En substituant dans la première de ces équations, au lieu de H, H^{1}, &c. leurs valeurs tirées des équations (Γ), on aura,

$$H_{1} = \text{fin.}\,\varpi.\{(0).b + b^{1}.[(0,1) - \overline{(0,1)}]$$
$$+ b^{11}.[(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.\}$$
$$+ \text{fin.}\,{}^{1}\varpi.\{(0).{}^{1}b + {}^{1}b^{1}.[(0,1) - \overline{(0,1)}]$$
$$+ {}^{1}b^{11}.[(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.\}$$
$$+ \&c.$$

Or, les équations (>) de l'*art. III.* donnent,

$$(0).b + b^{1}.[(0,1) - \overline{(0,1)}] + \&c. = f.b;$$
$$(0).{}^{1}b + {}^{1}b^{1}.[(0,1) - \overline{(0,1)}] + \&c. = f.{}^{1}b;$$
&c.

Donc,

$$H_1 = f.b.\text{fin.}\varpi + {}^1f.{}^1b.\text{fin.}{}^1\varpi + {}^2f.{}^2b.\text{fin.}{}^2\varpi + \&c.$$

& de-là on conclura H_1', H_1'', &c. en marquant d'un, de deux &c. traits à droite, les lettres b, ${}^1b$, &c. de l'expreſſion de H_1.

Soit pareillement,

$$H_2 = (0).H_1 + H_1'.[(0,1) - \overline{(0,1)}] + H_1''.[(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.$$

$$H_2' = (1).H_1' + H_1.[(1,0) - \overline{(1,0)}] + H_1''.[(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c.$$

&c.

& l'on trouvera de la même manière,

$$H_2 = f^2.b.\text{fin.}\varpi + {}^1f^2.{}^1b.\text{fin.}{}^1\varpi + {}^2f^2.{}^2b.\text{fin.}{}^2\varpi + \&c.$$

En continuant d'opérer ainſi, on formera les n, équations,

$$H = b.\text{fin.}\varpi + b.\text{fin.}{}^1\varpi + {}^2b.\text{fin.}{}^2\varpi + \&c.$$

$$H_1 = f.b.\text{fin.}\varpi + {}^1f.{}^1b.\text{fin.}{}^1\varpi + {}^2f.{}^2b.\text{fin.}{}^2\varpi + \&c.$$

$$H_2 = f^2.b.\text{fin.}\varpi + {}^1f^2.{}^1b.\text{fin.}{}^1\varpi + {}^2f^2.{}^2b.\text{fin.}{}^2\varpi + \&c.$$

. . . .

$$H_{n-1} = f^{n-1}.b.\text{fin.}\varpi + {}^1f^{n-1}.{}^1b.\text{fin.}{}^1\varpi + \&c. \ldots\ldots + {}^{n-1}f^{n-1}.{}^{n-1}b.\text{fin.}{}^{n-1}\varpi,$$

Il faut préſentement tirer de ces équations, les valeurs de $b.\text{fin.}\varpi$, ${}^1b.\text{fin.}\varpi$, &c. on peut imaginer pour cela différens moyens; en voici un fort ſimple, dont j'ai déjà fait uſage ailleurs. Je multiplie la première des équations précédentes par ${}^{n-1}f$, & j'en retranche la ſeconde; je multiplie la ſeconde par ${}^{n-1}f$, & j'en retranche la troiſième, & ainſi de ſuite, ce qui donne

$${}^{n-1}f.H - H_1 = b.\text{fin.}\varpi.({}^{n-1}f - f) + {}^1b.\text{fin.}{}^1\varpi.({}^{n-1}f - {}^1f) + \&c. \ldots + {}^{n-2}b.({}^{n-1}f - {}^{n-1}f).\text{fin.}{}^{n-1}\varpi$$

$${}^{n-1}f.H_1 - H_2 = f.b.\text{fin.}\varpi.({}^{n-1}f - f) + {}^1f.{}^1b.\text{fin.}{}^1\varpi.({}^{n-1}f - {}^1f) + \&c. \ldots + {}^{n-2}b.{}^{n-2}f.\text{fin.}{}^{n-2}\varpi.({}^{n-1}f - {}^{n-2}f)$$

&c.

Je multiplie pareillement la première de ces équations par ${}^{n-2}f$, & j'en retranche la seconde; je multiplie la seconde par ${}^{n-2}f$, & j'en retranche la troisième, & ainsi de suite, ce qui donne

$$H.({}^{n-1}f.{}^{n-2}f) - H_1.({}^{n-2}f + {}^{n-1}f)$$
$$+ H_2 = b.\text{sin.}\varpi.({}^{n-1}f - f).({}^{n-2}f - f)$$
$$+ \&c.$$
$$+ {}^{n-3}b.\text{sin.}{}^{n-3}\varpi.({}^{n-1}f - {}^{n-3}f).({}^{n-2}f - {}^{n-3}f);$$
$$H_1.({}^{n-1}f.{}^{n-2}f) - H_2.({}^{n-2}f + {}^{n-1}f)$$
$$+ H_3 = fb.\text{sin.}\varpi.({}^{n-1}f - f).({}^{n-2}f - f)$$
$$+ \&c.$$
$$+ {}^{n-3}f.{}^{n-3}b.\text{sin.}{}^{n-3}\varpi.({}^{n-1}f - {}^{n-3}f).({}^{n-2}f - {}^{n-3}f)$$
&c.

Je multiplie la première de ces équations par ${}^{n-3}f$, & j'en retranche la seconde, & ainsi de suite, ce qui donne

$$H.({}^{n-1}f.{}^{n-2}f.{}^{n-3}f)$$
$$- H_1.({}^{n-1}f.{}^{n-3}f + {}^{n-2}f.{}^{n-3}f + {}^{n-1}f.{}^{n-2}f)$$
$$+ H_2.({}^{n-1}f + {}^{n-2}f + {}^{n-3}f)$$
$$- H_3 = b.\text{sin.}\varpi.({}^{n-1}f - f).({}^{n-2}f - f).({}^{n-3}f - f) + \&c.$$
&c.

De-là il est aisé de voir que si l'on nomme β la somme de toutes les racines ${}^1f, {}^2f, {}^3f$, &c. γ la somme de tous leurs produits deux à deux; λ la somme de leurs produits trois à trois, & ainsi de suite, on aura

$$b.\text{sin.}\varpi = \frac{H_{n-1} - \beta.H_{n-2} + \gamma.H_{n-3} - \lambda.H_{n-4} + \&c.}{(f - {}^1f).(f - {}^2f).(f - {}^3f)\ldots\ldots(f - {}^{n-1}f)}.$$

On aura, ${}^1b.\text{sin.}{}^1\varpi$, ${}^2b.\text{sin.}{}^2\varpi$, &c. en changeant successivement dans cette valeur de $b.\text{sin.}\varpi$, f en ${}^1f$, ${}^2f$, &c. & réciproquement; on aura de la même manière,

$$b^{\mathrm{I}}.\text{sin.}\varpi = \frac{H^{\mathrm{I}}_{n-1} - \beta.H^{\mathrm{I}}_{n-2} + \gamma.H^{\mathrm{I}}_{n-3} - \&c.}{(f - {}^1f).(f - {}^2f), \&c.},$$

$$b^{\mathrm{II}}.\text{sin.}\varpi = \frac{H^{\mathrm{II}}_{n-1} - \&c.}{(f - {}^1f).\&c.}, \&c.$$

& on en conclura ${}^{1}b^{1}$. fin. ${}^{1}\varpi$, ${}^{2}b^{1}$. fin. ${}^{2}\varpi$, &c. ${}^{1}b^{11}$. fin. ${}^{1}\varpi$, ${}^{2}b^{11}$. fin. ${}^{2}\varpi$, &c. en y changeant ſucceſſivement f en ${}^{1}f$, ${}^{2}f$, &c. & réciproquement.

De plus, il eſt aiſé de voir par la nature des équations (Γ), qu'il ſuffit pour avoir b . coſ. ϖ de changer dans l'expreſſion précédente de b . fin. ϖ, H, H', &c. en L, L', &c. déſignant donc par L_{n-1}, L_{n-2}, &c. des fonctions en L, L', &c. pareilles à celles de H_{n-1}, H_{n-2}, &c. en H, H', &c. on aura

$$b \,.\, \text{coſ.}\, \varpi = \frac{L_{n-1} - \mathcal{C}.L_{n-2} + \gamma.L_{n-3} - \&c.}{(f - {}^{1}f).(f - {}^{2}f).\ \&c.},$$

& de-là on conclura facilement ${}^{1}b$. coſ. ${}^{1}\varpi$, ${}^{2}b$. coſ. ${}^{2}\varpi$, &c. b^{1} coſ. ϖ, &c.

Les quantités $\mathcal{C}$, γ, λ, peuvent ſe déterminer aiſément de cette manière; ſoit

$$x^{n} - \theta.x^{n-1} + {}^{1}\theta.x^{n-2} - {}^{2}\theta.x^{n-3} + {}^{3}\theta.x^{n-4} - \&c. = 0$$

l'équation dont les différentes racines ſont f, ${}^{1}f$, ${}^{2}f$, &c. on aura, en diviſant cette équation par $x - f$,

$$x^{n-1} - \mathcal{C}.x^{n-2} + \gamma.x^{n-3} - \lambda.x^{n-4} + \&c. = 0;$$

donc, en multipliant cette dernière équation par $x - f$, & la comparant terme à terme à la première, on aura

$$\mathcal{C} + f = \theta;\ \gamma + \mathcal{C}f = {}^{1}\theta;\ \lambda + f\gamma = {}^{2}\theta;\ \&c.$$

ou

$$\mathcal{C} = \theta - f;\ \gamma = {}^{1}\theta - \mathcal{C}f;\ \lambda = {}^{2}\theta - f\gamma;\ \&c.$$

Quant au produit $(f - {}^{1}f).(f - {}^{2}f)$, &c. on le déterminera facilement, en conſidérant que l'équation

$x^{n} - \theta x^{n-1} + {}^{1}\theta x^{n-2} - \&c. = 0$, peut être miſe ſous cette forme, $(x - f)\,(x - {}^{1}f)\,(x - {}^{2}f)$. &c. $= 0$; en ſorte que $(x - f)\,(x - {}^{1}f)$, &c. $= x^{n} - \theta.x^{n-1} + \&c.$ Soit $x = f + \alpha$, α étant ſuppoſé infiniment petit, & l'on aura, en négligeant les quantités de l'ordre α^{2} & diviſant par α,

$$(f - {}^{1}f).(f - {}^{2}f),\&c. = n.f^{n-1} - (n-1).\theta.f^{n-2} + (n-2).{}^{1}\theta.f^{n-3} - \&c.$$

Maintenant, on aura

$${}^{1}h = b \,.\, \text{fin.}\, \varpi \,.\, \text{cof.}\, \alpha f T + b \,.\, \text{cof.}\, \varpi \,.\, \text{fin.}\, \alpha f T + \&c.$$

$${}^{1}l = b \,.\, \text{cof.}\, \varpi \,.\, \text{cof.}\, \alpha f T - b \,.\, \text{cof.}\, \varpi \,.\, \text{fin.}\, \alpha f T + \&c.$$

Donc, l'équation (λ') de l'*article III* donne, en y ſuppoſant $t_1 = 0$,

$$y = b \,.\, \text{fin.}\, \varpi \,.\, \text{fin.}\, (q + \alpha f) \,.\, T + b \,.\, \text{cof.}\, \varpi \,.\, \text{cof.}\, (q + \alpha f) \,.\, T$$
$$+ {}^{1}b \,.\, \text{fin.}\, {}^{1}\varpi \,.\, \text{fin.}\, (q + \alpha \,.\, {}^{1}f) \,.\, T + {}^{1}b \,.\, \text{cof.}\, {}^{1}\varpi \,.\, \text{cof.}\, (q + \alpha \,.\, {}^{1}f) \,.\, T$$
$$+ \&c.$$
$$+ \frac{\alpha q \,.\, [(0,1) + \overline{(0,1)}]}{2q \,.\, (q - q^1)} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} b^1 \,.\, \text{fin.}\, \varpi \,.\, \text{fin.}\, (2q^1 - q - \alpha f) \,.\, T \\ + b^1 \,.\, \text{cof.}\, \varpi \,.\, \text{cof.}\, (2q^1 - q - \alpha f) \,.\, T \end{array} \right.$$
$$+ \&c.$$

C'eſt la valeur de y, après le temps quelconque T.

Si l'on vouloit porter la préciſion juſqu'aux quantités de l'ordre α^2, on feroit varier les nouvelles conſtantes arbitraires H, H^1, &c. L, L^1, &c. comme nous l'avons fait dans l'*article I.er*

VI.

On pourroit encore étendre aux équations à un nombre quelconque de variables, la méthode que nous avons donnée, *article II*, pour une équation différentielle à deux variables; je ſuppoſe en effet que l'on ait les deux équations,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h^2 \,.\, y = T + \alpha \,.\, \left[T^{\text{I}} \,.\, y + T^{\text{II}} \,.\, \frac{\partial y}{\partial t} + T^{\text{III}} \,.\, y^1 + T^{\text{IV}} \,.\, \frac{\partial y^1}{\partial t}\right]$$
$$+ \alpha^2 \,.\, [T^{\text{V}} \,.\, y^2 + \&c.] + \&c.$$

$$\frac{\partial^2 y^1}{\partial t^2} + (h^1)^2 \,.\, y^1 = S + \alpha \,.\, \left[S^{\text{I}} \,.\, y^1 + S^{\text{II}} \,.\, \frac{\partial y^1}{\partial t} + S^{\text{III}} \,.\, y + S^{\text{IV}} \,.\, \frac{\partial y}{\partial t}\right]$$
$$+ \alpha^2 \,.\, [S^{\text{V}} \,.\, (y^1)^2 + \&c.] + \&c.$$

T, T^1, &c. S, S^1 &c. étant des fonctions quelconques rationnelles & entières de ſinus & de coſinus; on fera,

$$y = z + \alpha z^{\text{I}} + \alpha^2 z^{\text{II}} + \&c.$$
$$y^1 = u + \alpha u^{\text{I}} + \alpha^2 u^{\text{II}} + \&c.$$

& l'on trouvera pour y & pour y^1 deux expreſſions de cette forme,

$$y = \text{fin}.\,h\,t.\left\{\begin{array}{l} p + t.[K + \alpha\,(a.p + {}^{1}a.q + {}^{2}a.{}^{1}p + {}^{3}a.{}^{1}q) + \&c.] \\ + t^{2}.\ \&c. \\ + \&c. \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} + R.$$
$$+ \text{cof}.\,h\,t.\left\{\begin{array}{l} q + t.[H + \alpha\,(b.q + {}^{1}b.p + {}^{2}b.{}^{1}q + {}^{3}b.{}^{1}p) + \&c.] \\ + \&c. \end{array}\right.$$

$$y^{1} = \text{fin}.\,h^{1}.t.\left\{\begin{array}{l} {}^{1}p + t.[M + \alpha\,(c.{}^{1}p + {}^{1}c.{}^{1}q + {}^{2}c.p + {}^{3}c.q) + \&e.] \\ + \&c. \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} + {}^{1}R.$$
$$+ \text{cof}.\,h^{1}.t.\left\{\begin{array}{l} {}^{1}q + t.[N + \alpha\,(e.{}^{1}q + {}^{1}e.{}^{1}p + {}^{2}e.p + {}^{3}e.p) + \&c.] \\ + \&c. \end{array}\right.$$

p, q, ${}^{1}p$ & ${}^{1}q$ étant les quatre conftantes arbitraires des valeurs de y, y^{1}, $\frac{\partial y}{\partial t}$, & $\frac{\partial y^{1}}{\partial t}$, lorfque $t = 0$; de-là on tirera par la méthode de l'*article cité*, les quatre équations,

$$\frac{\partial p}{\partial T} = K + \alpha.(a.p + {}^{1}a.q + {}^{2}a.{}^{1}p + {}^{3}a.{}^{1}q) + \alpha^{2}.({}^{4}a.p^{2} + \&c.) + \&c.$$
$$\frac{\partial q}{\partial T} = H + \alpha.(b.q + {}^{1}b.p + {}^{2}b.{}^{1}q + {}^{3}b.{}^{1}p) + \alpha^{2}.({}^{4}b.q^{2} + \&c.) + \&c.$$
$$\frac{\partial.{}^{1}p}{\partial T} = M + \alpha.(c.{}^{1}p + {}^{1}c.{}^{1}q + {}^{2}c.p + {}^{3}c.q) + \&c.$$
$$\frac{\partial.{}^{1}q}{\partial T} = N + \alpha.(e.{}^{1}q + {}^{1}e.{}^{1}p + {}^{2}e.q + {}^{3}c.p) + \&c.$$

Pour intégrer ces équations, on fera,

$$p = r + \alpha.(f.r + {}^{1}f.s + {}^{2}f.{}^{1}r + {}^{3}f.{}^{1}s)$$
$$\qquad + \alpha.({}^{4}f.r + \&c.) + \&c.$$
$$q = s + \alpha.(g.s + \&c.) + \&c.$$
$${}^{1}p = {}^{1}r + \alpha.(m.{}^{1}r + \&c.) + \&c.$$
$${}^{1}q = {}^{1}s + \&c.$$

En fubftituant ces valeurs de p, q, ${}^{1}p$, ${}^{1}q$, dans les quatre équations précédentes, on formera par la méthode du même article, quatre équations linéaires entre r, s, ${}^{1}r$, & ${}^{1}s$; d'où l'on aura, comme dans l'*article cité*, les valeurs de y, & y^{1}, après le temps quelconque T, aux quantités près de l'ordre α^{n+1}.

VII.

La méthode précédente d'intégrer par approximation les équations différentielles, en faisant varier les constantes arbitraires des intégrales approchées, est, si je ne me trompe, très-féconde dans l'analyse; pour en donner un usage fort étendu, je suppose que l'on ait une équation différentielle, d'un ordre quelconque, entre z, t, p, q, &c. ∂t, étant supposé constant, & p, q, &c. étant des quantités qui croissent fort lentement; on intègrera d'abord cette équation, en regardant p & q comme constans; je suppose que l'intégrale soit $z = \varphi\,(t, p, q, \&c.\ a, b, \&c.)$; a, b, &c. étant des constantes arbitraires dépendantes des valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}$, &c. à l'origine de l'intégrale que je fixe lorsque $t = h$. Cette valeur de z pourra être employée, sans erreur sensible, pour une valeur de t, fort grande; car les variations de p, q, &c. étant supposées de l'ordre α, si l'on regarde α comme infiniment petit, il faut supposer à t une valeur infinie, pour que les quantités qu'on néglige, en regardant p, q, &c. comme constans, puissent devenir sensibles; mais lorsque t est infini, ces quantités peuvent être finies; ainsi le problème qu'il s'agit de résoudre, est d'avoir une expression de z, telle que les quantités de l'ordre α, qu'on y néglige, ne puissent devenir finies, après une valeur de t infiniment grande.

Pour cela, je suppose $t = h + T$, T étant extrêmement grand, mais tel cependant que dans cet intervalle, les valeurs de p, q, &c. soient encore peu sensibles; on peut faire usage de l'expression $z = \varphi\,(t, p, q, \&c.\ a, b, \&c.)$, depuis $t = h$, jusqu'à $t = h + T$. Si l'on vouloit avoir la valeur de z, pour un intervalle plus considérable; par exemple, lorsque $t = h + T + t_{\prime}$, on auroit $z = \varphi\,(h + T + t_{\prime}, p', q', \&c.\ a', b', \&c.)$; p', q', &c. a', b', &c. étant ce que deviennent p, q, &c. a, b, &c. après l'intervalle T; cette nouvelle valeur de z peut être employée sans erreur sensible,

depuis

depuis $t_1 = 0$, jusqu'à $t_1 = T'$, T' étant tel que dans cet intervalle, les variations de p, q, &c. soient encore fort petites; en continuant d'opérer ainsi, & prenant les valeurs de z, 1.° depuis $t = h$, jusqu'à $t = h + T$; 2.° depuis $t = h + T$, jusqu'à $t = h + T + T'$; 3.° depuis $t = h + T + T'$, jusqu'à $t = h + T + T' + T''$, &c. on aura l'expression de z, pour une valeur quelconque de t; mais il faut, à chaque opération, déterminer les nouvelles constantes arbitraires a', b', &c. a'', b'', &c. qu'elle introduit; or, de la même manière que les constantes arbitraires a, b, &c. se déterminent au moyen des valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}$, &c. lorsque $t = h$; de même, les constantes arbitraires a', b', &c. doivent se déterminer au moyen de ces valeurs, lorsque $t = h + T$; soit donc,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varphi^{I}.(t, p, q, \text{\&c. } a, b, \text{\&c.}),$$

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \varphi^{II}.(t, p, q, \text{\&c. } a, b, \text{\&c.}),$$

&c.

On aura, à la fin de l'intervalle compris entre $t = h$, & $t = h + T$;

$$z = \varphi.(h + T, p, q, \text{\&c. } a, b, \text{\&c.}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varphi^{I}.(h + T, p, q, \text{\&c. } a, b, \text{\&c.}),$$

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \varphi^{II}.(h + T, p, q, \text{\&c. } a, b, \text{\&c.}),$$

&c.

& au commencement de l'intervalle compris entre $t = h + T$, & $t = h + T + T'$,

$$z = \varphi.(h + T, p^{I}, q^{I}, \text{\&c. } a^{I}, b^{I}, \text{\&c.}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varphi^{I}.(h + T, p^{I}, q^{I}, \text{\&c. } a^{I}, b^{I}, \text{\&c.}),$$

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \varphi^{II}.(h + T, p^{I}, q^{I}, \text{\&c. } a^{I}, b^{I}, \text{\&c.}).$$

&c.

Ces valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial t}$, &c. sont les mêmes à la fin du premier intervalle, qu'au commencement du second; on aura donc les équations,

$$\left.\begin{array}{l} \varphi.(h + T, p, q, \&c.\ a, b, \&c.) \\ = \varphi.(h + T, p', q', \&c.\ a', b', \&c.); \\ \varphi'.(h + T, p, q, \&c.\ a, b, \&c.) \\ = \varphi'.(h + T, p', q', \&c.\ a', b', \&c.); \\ \&c. \end{array}\right\} (\sigma).$$

Si p, q, &c. étoient invariables, on auroit $a = a'$, $b = b'$, &c. soit donc $p' = p + \delta p$, $q' = q + \delta q$, &c. δp, δq, &c. étant des quantités extrêmement petites de l'ordre α; soit de plus, $a' = a + \delta a$, $b' = b + \delta b$, &c. δa, δb, &c. seront de l'ordre δp, δq, &c. les équations (σ) donneront, cela posé, en négligeant les quantités de l'ordre δp^2.

$$0 = \delta p.\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \delta q.\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right) + \&c.$$
$$+ \delta a.\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right) + \delta b.\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right) + \&c.$$
$$0 = \delta p.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial p \partial t}\right) + \delta q.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial q \partial t}\right) + \&c.$$
$$+ \delta a.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial a \partial t}\right) + \delta b.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial b \partial t}\right) + \&c.$$
$$0 = \delta p.\left(\frac{\partial^3 z}{\partial p \partial t^2}\right) + \&c.$$
&c.

Les quantités $\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)$, &c. $\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)$, &c. représentent les coëfficiens de ∂p, ∂q, &c. ∂a, &c. dans la différentiation de z en y faisant varier p, q, &c. a, &c.

Maintenant, si l'on différentie les équations précédentes, en négligeant les quantités de l'ordre α^2, & observant que $\partial.\delta p = \partial p$, $\partial \delta q = \partial q$, &c. $\partial \delta a = \partial a$, &c. la première donnera

$$o = \frac{\partial p}{\partial t}.\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \frac{\partial q}{\partial t}.\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right) + \&c.$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial t}.\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right) + \frac{\partial b}{\partial t}.\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right) + \&c.$$
$$+ \delta p.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial p\partial t}\right) + \delta q.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial q\partial t}\right) + \&c.$$
$$+ \delta a.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial a\partial t}\right) + \&c.$$

Mais on a

$$o = \delta p.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial p\partial t}\right) + \delta q.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial q\partial t}\right) + \&c.$$

Donc,

$$o = \frac{\partial p}{\partial t}.\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \frac{\partial q}{\partial t}.\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right) + \&c.$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial t}.\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right) + \frac{\partial b}{\partial t}.\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right) + \&c.$$

On trouvera de la même manière,

$$o = \frac{\partial p}{\partial t}.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial p\partial t}\right) + \frac{\partial q}{\partial t}.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial q\partial t}\right) + \&c.$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial t}.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial a\partial t}\right) + \frac{\partial b}{\partial t}.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial b\partial t}\right) + \&c.$$

& ainſi de ſuite; on formera autant de ces équations qu'il y a d'arbitraires a, b, &c. & en les intégrant, on aura les valeurs de ces conſtantes arbitraires. On peut obſerver que dans ces équations la ſuppoſition de α infiniment petit, permet de ſuppoſer t infiniment grand, ce qui ſimplifie le calcul dans un grand nombre de circonſtances.

On peut parvenir encore à ces mêmes équations de la manière ſuivante.

Je ſuppoſe que l'équation $z = \varphi(t, p, q, \&c.\ a, b, \&c.)$, au lieu d'être l'intégrale approchée de l'équation différentielle propoſée, en ſoit l'intégrale complète, il eſt viſible que a, b, &c. ne ſeront plus conſtans, mais qu'ils varieront avec p, q, &c. dans un rapport qu'il s'agit de déterminer. Je ſuppoſe donc, comme ci-deſſus, que lorſque p, q, &c. croiſſent depuis l'origine de l'intégrale des quantités δp, δq, &c, a, b, &c. croiſſent des quantités δa, δb, &c; δp, δq, &c. δa, δb, &c.

étant extrêmement petits; on aura, comme l'on fait, en négligeant les quantités de l'ordre δ^2,

$$z = \varphi(t,p,q,\&c.\ a,b,\&c.) + \delta p.\left(\frac{\partial.\varphi(t,p,q,\&c.\ a,b,\&c.)}{\partial p}\right) + \delta q.\left(\frac{\partial.\varphi(t,p,q,\&c.\ a,b,\&c.)}{\partial q}\right) + \&c. + \delta a.\left(\frac{\partial.\varphi(t,p,\&c.)}{\partial a}\right) + \&c.$$

p, q, &c. a, b, &c. étant les valeurs de p, q, &c. a, b, &c. à l'origine de l'intégrale; en regardant conséquemment p, q, &c. a, b, &c. comme constans, on néglige dans l'expression de z, la quantité

$$\delta p.\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \delta q.\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right) + \&c. + \delta a.\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right) + \delta b.\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right) + \&c.$$

Faisant donc en sorte que cette erreur soit nulle, on aura l'équation

$$0 = \delta p.\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \delta q.\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right) + \&c. + \delta a.\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right) + \&c.$$

la même que nous avons trouvée précédemment. En raisonnant sur les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}$, &c. comme nous venons de le faire sur celle de z, nous aurons les autres équations.

EXEMPLE.

Je suppose que l'on veuille intégrer l'équation différentielle $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + p^2 z = 0$; p étant une quantité croissante très-lentement, & telle que l'on ait $p = m.\text{cof.}(\alpha t + \varepsilon)$, α étant extrêmement petit; j'intègre d'abord cette équation en supposant p constant, ce qui donne $z = a.\text{fin.}pt + b.\text{cof.}pt$; & l'on a, par ce qui précède, les deux équations

$$0 = (\partial a - bt\partial p).\text{fin.}pt + (\partial b + at\partial p).\text{cof.}pt$$

$$0 = (a\partial p + p\partial a - pbt\partial p).\text{cof.}pt - (b\partial p + p\partial b + pat\partial p).\text{fin.}pt.$$

La supposition de t extrêmement grand, fait disparoître le terme $a\partial p.\text{cof.}pt$ devant $-\ pat\partial p.\text{fin.}pt$; il peut donc

être négligé ainsi que le terme $-b\partial p.\text{fin}.pt$; on aura ainsi les deux équations

$$o = (\partial a - bt\partial p).\text{fin}.pt + (\partial p + at\partial p).\text{cof}.pt$$
$$o = (\partial a - bt\partial p).\text{cof}.pt - (\partial b + at\partial p).\text{fin}.pt;$$

Je multiplie la première par fin.pt, & la seconde par cof.pt, & je les ajoute, ce qui donne, $o = \partial a - bt\partial p$; je multiplie ensuite la seconde par fin. pt, & je la retranche de la première multipliée par cof. pt, ce qui donne

$o = \partial b + at\partial p$; soit $t\partial p = \partial s$, on aura

$$o = \partial a - b\partial s, \qquad o = \partial b + a\partial s;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$a = f.\text{fin}.(s + \varpi), \quad b = f.\text{cof}.(s + \varpi),$$

f & ϖ étant deux constantes arbitraires; donc

$$z = f.\text{fin}.(s+\varpi).\text{fin}.pt + f.\text{cof}.(s+\varpi).\text{cof}.pt = f.\text{cof}.(pt - s - \varpi);$$

or,

$$s = \int.t\partial p = pt - \int p\partial t = pt - \frac{m}{\alpha}.\text{fin}.(\alpha t + \epsilon);$$

donc,

$$z = f.\text{cof}.\left[-\varpi + \frac{m}{\alpha}\text{fin}.(\alpha t + \epsilon)\right],$$

c'est l'expression de z, en négligeant les quantités de l'ordre α qui restent toujours fort petites, quel que soit le temps t.

VIII.

Application de la méthode précédente à la théorie des Planètes.

La partie la plus délicate de cette importante théorie, est la détermination des inégalités séculaires du mouvement des Planètes, & malgré les savantes recherches des premiers Géomètres de ce siècle, sur cet objet, il faut convenir qu'elle laisse beaucoup à desirer encore.

M. de la Grange est le premier qui ait envisagé cette

matière sous son véritable point de vue, dans sa belle pièce *sur les inégalités des Satellites de Jupiter*, & dans sa *théorie de Jupiter & de Saturne;* la méthode qu'il a employée pour cela est un chef-d'œuvre d'analyse, & l'excellent Mémoire qu'il vient de donner, *sur les variations du mouvement des nœuds des Planètes & de l'inclinaison de leurs orbites*, renferme la théorie la plus générale & la plus simple de ces variations; mais toutes les autres inégalités séculaires, & sur-tout celle du moyen mouvement & de la moyenne distance, n'avoient point encore été déterminées avec l'exactitude & la généralité qu'on peut desirer, au moins jusqu'au moment où je donnai sur cet objet, mes recherches, dans lesquelles j'ai prouvé que les moyens mouvemens des Planètes & leurs moyennes distances au Soleil, sont invariables. *(Voyez le tome VII des Savans étrangers)* Je me propose ici de considérer toutes les inégalités, tant périodiques que séculaires, du mouvement de ces corps; on verra avec quelle facilité la méthode précédente donne ces inégalités, & j'ose me flatter que cette discussion intéressera les Géomètres par sa généralité, & surtout par l'exactitude des résultats.

Du mouvement d'un point sollicité par des forces quelconques.

Je suppose ici toutes les parties d'un corps réunies à son centre de gravité; pour en déterminer la position dans l'espace, je prends, sur un plan fixe, deux droites perpendiculaires entre elles, & qui se croisent dans un point que je nomme S; l'une sera ce que j'appelle *axe des x*, & l'autre, *axe des y;* soit de plus z la distance du corps à ce plan, sa position sera déterminée par les trois coordonnées x, y & z; cela posé, si l'on réduit toutes les forces dont il est animé, à trois autres parallèles aux axes des x, des y & des z; que l'on nomme ψ la première, ψ' la seconde & ψ'' la troisième; on aura, en prenant l'élément ∂t, du temps, pour constant, & supposant que les forces ψ, ψ' & ψ'', tendent à augmenter les x, les y

& les z, $\partial\partial x = \psi \,.\partial t^2$; (1)

$\partial\partial y = \psi' \,.\partial t^2$; (2)

$\partial\partial z = \psi'' .\partial t^2$; (3)

maintenant, par l'origine S des x & des y, je mène au point de projection du corps sur le plan fixe, une droite que je représente par r, & que dans la suite je nommerai *rayon vecteur;* je nomme ensuite φ l'angle formé par cette droite & par l'axe des x, & s la tangente de la latitude du corps vu du point S; on aura,

$$x = r.\text{cos.}\,\varphi;\ y = r.\text{sin.}\,\varphi;\ \&\ z = rs;$$

partant,

$$\partial\partial x = \partial\partial r.\text{cos.}\varphi - 2\partial r\partial\varphi.\text{sin.}\varphi - r\partial\partial\varphi.\text{sin.}\varphi - r\partial\varphi^2.\text{cos.}\varphi,$$

$$\partial\partial y = \partial\partial r.\text{sin.}\varphi + 2\partial r\partial\varphi.\text{cos.}\varphi + r\partial\partial\varphi.\text{cos.}\varphi - r\partial\varphi^3.\text{sin.}\varphi,$$

$$\partial\partial z = r\partial\partial s + 2\partial s\partial r + s\partial\partial r.$$

Or, si l'on suppose que l'axe des x soit infiniment près de la droite r, on aura $\varphi = 0$, sin. $\varphi = 0$, & cos. $\varphi = 1$; partant, $\partial\partial x = \partial\partial r - r\partial\varphi^2$; $\partial\partial y = r\partial\partial\varphi + 2\partial r\partial\varphi$; les équations (1), (2) & (3) deviendront conséquemment,

$$\partial\partial r - r\partial\varphi^2 - \psi\,\partial t^2 = 0;\ (4)$$

$$r\partial\partial\varphi + 2\partial r\partial\varphi - \psi'\partial t^2 = 0;\ (5)$$

$$\partial\partial s + \frac{2\partial s\partial r}{r} + s\,\frac{\partial\partial r}{r} - \frac{\psi''}{r}.\partial t^2 = 0;\ (6)$$

mais il faut observer qu'alors la force ψ, est parallèle à r, & tend à l'augmenter, & que la force ψ' est perpendiculaire à cette droite, & tend à augmenter l'angle φ; or, comme les équations précédentes ne renferment que les différentielles de cet angle, on peut en fixer où l'on voudra, l'origine sur le plan fixe.

Si l'on multiplie l'équation (5) par r, & qu'on l'intègre, on aura $\frac{r^2\partial\varphi}{\partial t} = c + \int\psi'.r\partial t$; c étant une constante arbitraire; donc,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{c + \int\psi'.r\partial t}{r^2};\ (7)$$

l'équation (4) deviendra, en y ſubſtituant cette valeur de $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$,

$$\frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{[c + \int \psi^{\text{I}} . r \partial t]^2}{r^3} - \psi = 0; \quad (8)$$

& ſi dans l'équation (6) on ſubſtitue, au lieu de $\partial\partial r$, ſa valeur tirée de l'équation (8), on aura

$$\frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s \partial r}{\partial t^2} + \frac{s . [c + \int \psi^{\text{I}} . r\partial t]^2}{r^4} + \frac{s\psi - \psi^{\text{II}}}{r} = 0; \quad (9)$$

au moyen des équations (7), (8) & (9), on déterminera le mouvement du corps dans l'eſpace.

Je ſuppoſe qu'au lieu de ∂t, on veuille prendre $\partial\varphi$ pour conſtant, on mettra l'équation (5) ſous cette forme,

$$r \frac{\partial\varphi}{\partial t} . \partial . \frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2\partial r . \frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2} = \psi^{\text{I}} . \partial\varphi;$$

ſi l'on multiplie cette équation par $2r^3$, le premier membre devient intégrable, & l'on a $r^4 . \frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2} = h^2 + 2\int r^3 \psi^{\text{I}} . \partial\varphi$, h étant une conſtante arbitraire; donc $\partial t = \frac{r^2 \partial\varphi}{\sqrt{(h^2 + 2\int r^3 \psi^{\text{I}} . \partial\varphi)}}$; enſuite l'équation (4) donne $\partial . (\frac{\partial r}{\partial t}) - r \frac{\partial\varphi^2}{\partial t} = \psi \partial t$; en ſubſtituant, au lieu de ∂t, ſa valeur, & faiſant $\frac{1}{r} = u$, on aura

$$\frac{\partial\partial u}{\partial\varphi^2} + u + \frac{\frac{\psi}{u^2} + \frac{1}{u^3} . \psi^{\text{I}} . \frac{\partial u}{\partial\varphi}}{h^2 + 2\int \frac{\psi^{\text{I}} . \partial\varphi}{u^3}} = 0.$$

L'équation (6) donnera, par un procédé ſemblable, en y faiſant $\frac{1}{r} = u$, & en y ſubſtituant, au lieu de $\partial\partial u$, ſa valeur tirée de l'équation précédente.,

$$\frac{\partial\partial s}{\partial\varphi^2} + s + \frac{s\psi - \psi^{\text{II}} + \psi^{\text{I}} . \frac{\partial s}{\partial\varphi}}{u^3 . [h^2 + 2\int \frac{\psi^{\text{I}} . \partial\varphi}{u^3}]} = 0.$$

IX.

IX.

Du mouvement des Planètes autour du Soleil, en négligeant leur action les unes sur les autres.

Je suppose un nombre indéfini de Planètes P, P^{I}, P^{II}, &c. circulantes autour du Soleil, & que l'on néglige leur action les unes sur les autres; soit S la masse du Soleil, & concevons cet astre immobile au point S; si l'on transporte en sens contraire à la Planète P son action sur le Soleil, elle sera sollicitée vers S par une force égale à $\frac{S+P}{r^2(1+ss)}$, d'où l'on tire

$$\psi' = 0, \ \psi = -\frac{(S+P).u^2}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}, \ \& \ \psi'' = -\frac{(S+P).su^2}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}};$$

on aura ainsi les trois équations,

$$\partial t = \frac{r^2 \partial \varphi}{h}; \ \frac{\partial\partial u}{\partial \varphi^2} + u - \frac{(S+P)}{h^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} = 0; \ \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} + s = 0;$$

$\frac{r^2 \partial \varphi}{2}$ étant le petit secteur décrit par le rayon vecteur r, durant l'élément du temps ∂t, la première de ces trois équations nous apprend que les aires décrites par les rayons vecteurs sont proportionelles aux temps; la troisième équation donne en l'intégrant, $s = \alpha\gamma \,.\, \text{fin.}(\varphi + \varpi)$, $\alpha\gamma$ & ϖ étant deux constantes arbitraires; & la seconde donne

$$u = \frac{S+P}{h^2(1+\alpha^2\gamma^2)} . \sqrt{(1+ss)} + m \,.\, \text{cof.}(\varphi + \varepsilon);$$

m & ε étant constans & arbitraires. L'expression de s montre que l'orbite est dans un plan invariable, dont la tangente d'inclinaison au plan fixe est $\alpha\gamma$, ce qui d'ailleurs est visible. Je suppose donc que le plan fixe soit celui de cette orbite, on aura $s = 0$, & $\alpha\gamma = 0$; donc, $u = \frac{S+P}{h^2} + m.\text{cof.}(\varphi + \varepsilon)$; & $r = \frac{1}{\frac{S+P}{h^2} + m.\text{cof.}(\varphi+\varepsilon)}$;

mais si l'on nomme a le demi-grand axe d'une ellipse, $\alpha e . a$ son excentricité, r le rayon vecteur mené d'un des foyers à la courbe, $\varphi + \varepsilon$ l'angle compris entre le rayon vecteur & la plus grande des deux parties du grand axe divisé inégalement par le foyer, on a, comme l'on sait, $r = \frac{a.(1 - \alpha^2 e^2)}{1 - \alpha e . \text{cos}.(\varphi + \varepsilon)}$; d'où en comparant cette expression de r à la précédente, on aura $m = - \frac{- \alpha e}{a.(1 - \alpha^2 e^2)}$, & $\frac{h^2}{P + S} = a.(1 - \alpha^2 e^2)$; partant $h = \sqrt{[(S + P).a.(1 - \alpha^2 e^2)]}$.

Si l'on reprend l'équation $\partial t = \frac{r^2 \partial \varphi}{h}$, en nommant T le temps d'une révolution entière de P, & E la surface de l'ellipse que décrit cette Planète, on aura $T = \frac{2E}{h}$; mais si l'on désigne par π le rapport de la demi-circonférence au rayon, on a $E = a^2 \pi . \sqrt{(1 - \alpha^2 . e^2)}$; donc, si dans l'expression de T, on substitue au lieu de E & de h leurs valeurs, on aura $T = \frac{2\pi . a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S + P)}}$.

En négligeant P par rapport à S, on a $T = \frac{2\pi . a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S)}}$; & en marquant d'un, de deux, &c. traits relativement à P', P'', &c. les quantités T & a, on aura $T' = \frac{2\pi . (a')^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S)}}$; $T'' = \frac{2\pi . (a'')^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S)}}$, &c. Donc $T^2 : (T')^2 : (T'')^2 :$ &c. $:: a^3 : (a')^3 : (a'')^3 :$ &c.

Soit nt, le moyen mouvement de P autour du Soleil; en sorte que l'on ait φ égal à nt, plus à une fonction de quantités périodiques, on aura $nT = 360^d = 2\pi$; donc, puisque $T = \frac{2\pi . a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S + P)}}$, on aura $nn = \frac{S + P}{a^3}$, & $h = \sqrt{[(S + P) a . (1 - \alpha^2 . e^2)]} = n a^2 . (1 - \alpha^2 . e^2)^{\frac{1}{2}}$;

partant,

$$\partial\varphi = \frac{h\partial t}{r^2} = \frac{n\partial t}{(1-\alpha^2.e^2)^{\frac{3}{2}}}.[1-\alpha e.\,\text{cos.}\,(\varphi+\varepsilon)]^2.$$

Pour déterminer φ en t, je ſuppoſe l'origine des angles φ, & nt, à l'aphélie, en ſorte que la Planète parte de ce point au premier inſtant de ſon mouvement, on aura $\varepsilon = 0$; ſoit $\varphi = nt + \alpha z + \alpha^2.z^1 +$ &c. on aura, en réduiſant cof. $(\varphi+\varepsilon)$, ou, cof. $(nt+\alpha z+\alpha^2 z^1+\&c.)$, & $\frac{1}{(1-\alpha^2.e^2)^{\frac{3}{2}}}$, en ſuites aſcendantes par rapport à α,

$$\partial\varphi = n\partial t + \alpha\partial z + \alpha^2\partial z^1 + \&c.$$

$$= n\partial t.\left\{\begin{array}{l} 1 - 2\alpha e\,\text{cof.}\,nt + 2\alpha^2.e^2 + \&c. \\ \qquad + 2\alpha^2.ez.\,\text{fin.}\;nt \\ \qquad + \frac{\alpha^2.e^2}{2}.\,\text{cof.}\,2\,nt \end{array}\right.$$

De-là je conclus, en comparant enſemble les termes de l'ordre α, ceux de l'ordre α^2, &c. $\partial z = -2en\partial t.\,\text{cof.}\,nt$;

$\partial z^1 = n\partial t.[2e^2 + 2ez.\text{fin.}\,nt + \frac{e^2}{2}.\text{cof.}\,2nt]$; &c.

en intégrant ces équations, & faiſant enſorte que z, z^1, &c. ſoient nuls avec t, on aura

$$z = -2.e.\text{fin.}\,nt;\; z^1 = \tfrac{5}{4}e^2.\text{fin.}\,2nt;\;\&c.$$

donc

$$\varphi = nt - 2\alpha e.\text{fin.}\,nt + \tfrac{5}{4}\alpha^2 e^2.\text{fin.}\,2nt + \&c.$$

Pour déterminer préſentement r en t, j'obſerve que l'équation $\partial t = \frac{r^2\partial\varphi}{h}$, donne

$$r = \sqrt{\left(\frac{h\partial t}{\partial\varphi}\right)} = \frac{a[1-\alpha^2 e^2]^{\frac{1}{4}}}{[1-2\alpha e.\text{cof.}\,nt+\frac{5}{2}\alpha^2 e^2.\text{cof.}\,2nt+\&c.]^{\frac{1}{2}}};$$

d'où je conclus

$$r = a.[1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} + \alpha e.\text{cof.}\,nt - \frac{\alpha^2 e^2}{2}.\text{cof.}\,2nt + \&c.].$$

Si, lorſque $t = 0$, la Planète au lieu d'être à ſon aphélie, étoit plus avancée de la quantité ε; en nommant θ, l'anomalie

moyenne correſpondante à l'anomalie vraie ϵ, on a, par ce qui précède,

$$\epsilon = \theta - 2\alpha e . \sin. \theta + \tfrac{5}{4} . \alpha^2 e^2 . \sin. 2\theta + \&c.$$

$$\& \ \varphi = \theta + nt - 2\alpha e . \sin. (nt + \theta) + \tfrac{5}{4}\alpha^2 e^2 . \sin. 2(nt + \theta) + \&c.$$

& ſi la ligne fixe d'où l'on commence à compter l'angle φ, au lieu d'être ſur la ligne des apſides, eſt moins avancée que l'aphélie d'un certain angle I, en ſorte que I ſoit la longitude de l'aphélie, on a

$$\varphi = I + \theta + nt - 2\alpha e . \sin. (nt + \theta) + \tfrac{5}{4}\alpha^2 e^2 . \sin. (2nt + 2\theta) + \&c.$$

$$\& \ r = a . \left[1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} + \alpha e . \operatorname{cof.} (nt + \theta) - \frac{\alpha^2 e^2}{2} . \operatorname{cof.} (2nt + 2\theta) + \&c.\right]$$

Je ſuppoſe maintenant que l'on veuille rapporter le mouvement de la Planète à un autre plan très-peu incliné à celui de ſon orbite, & paſſant par le centre du Soleil; je nomme ${}'\varphi$ & ${}'r$, la longitude de la Planète & ſon rayon vecteur dans l'orbite réelle, & φ & r, ces quantités dans l'orbite projetée; les expreſſions que nous venons de trouver pour φ & r, ſe rapportant à l'orbite réelle, ſont les valeurs de ${}'\varphi$ & de ${}'r$; il faut préſentement en conclure φ & r en t.

Pour cela, je fixe l'origine de φ & de ${}'\varphi$ ſur la ligne des nœuds; on a ${}'r \operatorname{cof.} {}'\varphi = r . \operatorname{cof.} \varphi$: de plus, ${}'r = r\sqrt{(1 + ss)}$, & nous avons trouvé précédemment $s = \alpha\gamma . \sin. \varphi$; ſoit $\varphi = {}'\varphi + q$, q étant néceſſairement fort petit; l'équation ${}'r . \operatorname{cof.} {}'\varphi = r . \operatorname{cof.} \varphi$, donnera $\sqrt{(1 + ss)} . \operatorname{cof.} {}'\varphi = \operatorname{cof.} ({}'\varphi + q)$; donc en négligeant le quarré de q & la quatrième puiſſance de s, on aura $q . \sin. {}'\varphi = -\tfrac{1}{2} ss . \operatorname{cof.} {}'\varphi$; on peut ſuppoſer dans cette équation, ${}'\varphi = \varphi$, & en y ſubſtituant au lieu de $\sin. \varphi$, ſa valeur $\frac{s}{\alpha\gamma}$, on aura

$$q = -\tfrac{1}{2}\alpha\gamma s . \operatorname{cof.} \varphi = -\tfrac{1}{4}\alpha^2\gamma^2 . \sin. 2\varphi:$$

Si l'on néglige les quantités de l'ordre α^3, on peut supposer dans cette équation $\varphi = nt + \varpi$, ϖ étant la distance moyenne de la Planète à son nœud, lorsque $t = 0$; donc

$$\varphi = {}^1\varphi - \frac{1}{4}\alpha^2\gamma^2 . \text{fin.}(2nt + 2\varpi)$$
$$= I + \theta + nt - 2\alpha e . \text{fin.}(nt + \theta) + \&c.$$
$$- \frac{1}{4}\alpha^2\gamma^2 . \text{fin.}(2nt + 2\varpi);$$

I exprime ici la distance entre l'aphélie de la Planète & le nœud de son orbite; soit L la projection de cet angle, ou, ce qui revient au même, la distance entre le nœud & la projection de l'aphélie, on aura par ce qu'on vient de voir, $I = L + \frac{1}{4}\alpha^2\gamma^2 . \text{fin.}\, 2L$; supposons ensuite qu'au lieu de fixer l'origine de φ sur la ligne des nœuds, on la fixe sur une droite moins avancée de l'angle H, en sorte que la longitude du nœud soit H, on aura

$$\varphi = H + L + \frac{1}{4}\alpha^2\gamma^2 . \text{fin.}\, 2L$$
$$+ \theta + nt - 2\alpha e . \text{fin.}(nt + \theta) + \&c.$$

Je fais pour abréger,

$$H + L + \frac{1}{4}\alpha^2\gamma^2 . \text{fin.}\, 2L = A.$$

Maintenant l'équation ${}^1r = r . \sqrt{(1 + ss)}$ donne $r = {}^1r - \frac{1}{4}a . \alpha^3\gamma^2 + \frac{1}{4}a . \alpha^2\gamma^2 . \text{cof.}(2nt + 2\varpi) + \&c.$ ensuite l'équation $s = \alpha\gamma . \text{fin.}\,\varphi$, donne

$$s = \alpha\gamma . \text{fin.}(nt + \varpi) + \&c;$$

donc on aura pour déterminer le mouvement de la Planète sur le plan fixe, les trois équations,

$$\varphi = A + \theta + nt - 2\alpha e . \text{fin.}(nt + \theta)$$
$$+ \frac{5}{4}\alpha^2 e^2 . \text{fin.}(2nt + 2\theta) + \&c.$$
$$- \frac{1}{4}\alpha^2\gamma^2 . \text{fin.}(2nt + 2\varpi);$$

$$r = a . [1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} - \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} + \alpha e . \text{cof.}(nt + \theta)$$
$$- \frac{\alpha^2 e^2}{2} . \text{cof.}(2nt + 2\theta) + \&c.$$
$$+ \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} . \text{cof.}(2nt + 2\varpi)]$$

$$s = \alpha\gamma . \text{fin.}(nt + \varpi) + \&c.$$

a étant le demi-grand axe de l'ellipſe décrite par la Planète, ou, ce qui revient au même, ſa moyenne diſtance au Soleil; e, ſon excentricité; γ, la tangente de ſon inclinaiſon ſur le plan fixe; A étant la longitude de la projection de l'aphélie, augmentée de $\frac{1}{4}\alpha^2\gamma^2 \cdot \text{ſin.}\ 2L$; L étant égale à la longitude de cette projection, moins celle du nœud; θ & ϖ étant les moyennes diſtances de la Planète à ſon aphélie & à ſon nœud, lorſque $t = 0$.

Si l'on vouloit avoir les valeurs de $r^{\text{I}}, \varphi^{\text{I}}, s^{\text{I}}; r^{\text{II}}, \varphi^{\text{II}}, s^{\text{II}}$, &c. relatives aux Planètes $P^{\text{I}}, P^{\text{II}}$, &c. il ſuffiroit de marquer d'un trait, de deux traits, &c. les lettres a, e, θ, γ, A, ϖ, n.

X.

Du mouvement des Planètes autour du Soleil, en ayant égard à leur action les unes ſur les autres.

Je reprends les équations (7), (8) & (9) de l'*art. VIII*,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c + \int\psi^{\text{I}} \cdot r\partial t}{r^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{(c + \int\psi^{\text{I}} \cdot r\partial t)^2}{r^3} - \psi = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + 2\frac{\partial s\,\partial r}{\partial t^2} + \frac{s \cdot (c + \int\psi^{\text{I}} \cdot r\partial t)^2}{r^4} + \frac{s\psi - \psi^{\text{II}}}{r} = 0; (9)$$

Au moyen deſquelles il faut déterminer le mouvement de la Planète P; pour cela, il eſt néceſſaire de connoître les forces ψ, ψ^{I}, ψ^{II}, dont elle eſt animée; or, cette Planète eſt d'abord attirée vers le Soleil par une force égale à $\frac{S}{r^2(1+ss)}$; de plus, elle attire le Soleil avec une force égale à $\frac{P}{r^2(1+ss)}$; & puiſque nous cherchons le mouvement relatif de la Planète autour du Soleil, il faut conſidérer cet aſtre comme immobile, & tranſporter à la Planète en ſens contraire, la force $\frac{P}{r^2(1+ss)}$; ainſi cette Planète ſera attirée vers S par une force égale à

$\frac{S + P}{r^2(1+ss)}$; en la décompoſant en deux, l'une parallèle au rayon vecteur, & tendante à éloigner P de S, & l'autre perpendiculaire au plan fixe, & tendante à élever la Planète au-deſſus de ce plan, on aura, pour la première, $\frac{-(S+P)}{r^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}}$; & pour la ſeconde, $\frac{-(S+P).s}{r^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}}$.

Imaginons enſuite une autre Planète P', pour laquelle nous nommerons φ', r' & s', ce que nous avons nommé φ, r & s pour P; ſoit $'v$ la diſtance de P à P'; P' attirera P avec une force égale à $\frac{P'}{'v^2}$; il faut décompoſer cette force en deux, l'une perpendiculaire au plan fixe, & l'autre parallèle à la projection de la droite $'v$ ſur ce plan; or, la première eſt égale à $\frac{r'.s' - r.s}{'v^3}.P'$, & la ſeconde eſt égale à $\frac{v_{,}.P'}{'v^3}$, en nommant $v_{,}$ la projection de v'; ſi l'on décompoſe cette dernière force en deux autres, l'une parallèle, & l'autre perpendiculaire à r, on trouvera pour la première, $\frac{[r'.\text{coſ.}(\varphi'-\varphi)-r]}{'v^3}.P'$; & pour la ſeconde, $\frac{r'.\text{ſin.}(\varphi'-\varphi)}{'v^3}.P'$.

La Planète P' attire le Soleil avec une force égale à $\frac{P'}{(r')^2.(1+s'.s')}$; il faut donc tranſporter cette force en ſens contraire à la Planète P; & ſi après l'avoir ainſi tranſportée, on la décompoſe en trois, l'une perpendiculaire au plan fixe, l'autre parallèle à r, & la troiſième parallèle au plan fixe & perpendiculaire à r, on trouvera pour la première $-\frac{P'.s'}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}$; pour la ſeconde, $-\frac{P'.\text{coſ.}(\varphi'-\varphi)}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}$; & pour la troiſième, $-\frac{P'.\text{ſin.}(\varphi'-\varphi)}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}$.

Si l'on marque de deux traits, de trois traits, &c. les lettres marquées d'un trait dans l'expression des forces précédentes, on aura les forces résultantes de l'action de tant d'autres Planètes, P'', P''', P^{IV}, &c. qu'on voudra; rassemblant donc toutes ces forces, on aura

$$\psi = -\frac{S+P}{r^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + \frac{P'.[r'.\text{cos.}(\varphi'-\varphi)-r]}{{}'v^3} - \frac{P'.\text{cos.}(\varphi'-\varphi)}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \frac{P''.[r''.\text{cos.}(\varphi''-\varphi)-r]}{{}''v^3} - \frac{P''.\text{cos.}(\varphi''-\varphi)}{(r'')^2.(1+s''.s'')^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \text{\&c.}$$

$$\psi' = P'.\text{fin.}(\varphi'-\varphi).\left[\frac{r'}{{}'v^3} - \frac{1}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}\right] + P''.\text{\&c.}$$

$$\psi'' = -\frac{(S+P).s}{r^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + \frac{P'.(r'.s'-rs)}{{}'v^3} - \frac{P's'}{(r')^2.(1-s'.s')^{\frac{3}{2}}} + P''.\text{\&c.}$$

partant, on aura

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c+\int\left\{\begin{matrix}P'.r\,dt.\text{fin.}(\varphi'-\varphi).\left[\frac{r'}{{}'v^3} - \frac{1}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}\right]\\ + P''.\text{\&c.}\end{matrix}\right\}}{r^2}\right\}(10).$$

$$\left.\begin{matrix}0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{\left\{c+\int\left\{\begin{matrix}P'.rdt.\text{fin.}(\varphi'-\varphi).\left[\frac{r'}{{}'v^3} - \frac{1}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}\right]\\ + P''.\text{\&c.}\end{matrix}\right\}\right\}^2}{r^3}\\ + \frac{S+P}{r^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + P'.\frac{[r-r'.\text{cos.}(\varphi'-\varphi)]}{{}'v^3} + \frac{P'.\text{cos.}(\varphi'-\varphi)}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}} + P''.\text{\&c.}\end{matrix}\right\}(11).$$

$$\left.\begin{matrix}0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s\partial r}{r\partial t^2} + \frac{s}{r^4}\left\{c+\int\left\{\begin{matrix}[P'.r\,dt.\text{fin.}(\varphi'-\varphi).(\frac{r'}{{}'v^3} - \frac{1}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}})]\\ + P''.\text{\&c.}\end{matrix}\right\}\right\}^2\\ + \frac{P'}{r}.[s'-s.\text{cos.}(\varphi'-\varphi)].\left[\frac{1}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{{}'v^3}\right] + \frac{P''}{r}.\text{\&c.}\end{matrix}\right\}(12).$$

XI.

X I.

Les Obſervations nous ont appris que les Planètes ſe meuvent dans des orbites preſque circulaires & peu inclinées les unes aux autres, & que les perturbations que ces corps éprouvent en vertu de leur action réciproque, ſont preſque inſenſibles, puiſque leurs mouvemens ſont à très-peu près les mêmes que ſi le Soleil ſeul agiſſoit ſur elles. Il faut donc que leurs maſſes ſoient extrêmement petites relativement à celle du Soleil ; ainſi nommant $\delta\mu$, $\delta\mu'$, $\delta\mu''$, &c. les rapports des maſſes de P, P', P'', &c. à celles du Soleil, je conſidérerai ces quantités comme infiniment petites, & je négligerai leurs quarrés & leurs puiſſances ſupérieures, en ſorte que dans les expreſſions de φ, r, s, je n'aurai égard qu'aux termes de l'ordre $\delta\mu$, ce qui donne pour ces variables, des expreſſions de cette forme,

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= M + M'.\delta\mu' + M''.\delta\mu'' + \&c. \\ r &= N + N'.\delta\mu' + N''.\delta\mu'' + \&c. \\ s &= Q + Q'.\delta\mu' + Q''.\delta\mu'' + \&c. \end{aligned}\right\} (>).$$

On peut ſuppoſer $\delta\mu'' = 0$, $\delta\mu''' = 0$, &c. & déterminer dans cette ſuppoſition M', N', Q' ; car M'', N'', Q'', M''', &c. peuvent s'en déduire aiſément en y changeant les quantités relatives à la planète P', dans celles qui ſont relatives aux planètes P'', P''', &c. Cela poſé ;

Si l'on avoit $\delta\mu' = 0$, ou, ce qui revient au même, $P' = 0$, les équations (10), (11) & (12) ſe changeroient dans celles-ci ;

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c}{r^2} \; ; (13).$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{S + P}{r^2 (1 + ss)^{\frac{3}{2}}} \; ; (14).$$

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s \partial r}{r \partial t^2} + \frac{c^2 s}{r^4} \; ; (15).$$

Ces équations ſont celles qui auroient lieu, ſi les Planètes

n'agiſſoient point les unes ſur les autres; leurs intégrales ſont donc par l'*art. IX;*

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = A + \theta + nt - 2\alpha e \cdot \text{ſin.}(nt + \theta) \\ \qquad + \frac{5}{4}\alpha^2 e^2 \cdot \text{ſin.}(2nt + 2\theta) + \&c. \\ \qquad - \frac{1}{4}\alpha^2 \gamma^2 \cdot \text{ſin.}(2nt + 2\varpi) \\ r = a \cdot [1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} - \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} + \alpha e \cdot \text{coſ.}(nt + \theta) \\ \qquad - \frac{\alpha^2 e^2}{2} \cdot \text{coſ.}(2nt + 2\theta) + \&c. \\ \qquad + \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} \cdot \text{coſ.}(2nt + 2\varpi)] \\ s = \alpha\gamma \cdot \text{ſin.}(nt + \varpi) + \&c. \end{array}\right\} (\sigma).$$

α étant très-petit.

Ces trois valeurs de φ, r & s, ſemblent renfermer ſept conſtantes arbitraires A, e, θ, a, n, γ, ϖ, quoiqu'il ne puiſſe y en avoir que ſix, le mouvement du corps P étant déterminé par trois équations différentielles du ſecond ordre; mais il faut obſerver qu'il exiſte (*art. IX*) entre n & a, une relation exprimée par cette équation, $nn = \frac{S+P}{a^3}$, ce qui réduit les deux arbitraires n & a, à une ſeule; de plus, quoique la conſtante arbitraire c, de l'équation (13) ne paroiſſe pas entrer dans les valeurs de φ, r & s, elle y eſt cependant implicitement renfermée en vertu d'une équation qui exiſte entre c, a, e, & γ; en effet, puiſque l'on a, $r^2 \partial\varphi = c\partial t$, ſi l'on nomme T, le temps d'une révolution entière de P, on aura $cT = \int r^2 \partial\varphi$; mais il eſt viſible que $\int r^2 \partial\varphi$, eſt égal au double de la ſurface de l'orbite projetée de la Planète; or cette ſurface eſt à celle de l'orbite réelle, comme le rayon eſt au coſinus de l'inclinaiſon de l'orbite ſur le plan fixe; donc, ſi l'on nomme $'E$, la ſurface de l'orbite projetée, on aura en portant la préciſion juſqu'aux quantités de l'ordre α^2,

$$'E = a^2\pi \cdot (1 - \alpha^2 e^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + \alpha^2\gamma^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2\pi \times [1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma^2] = \tfrac{1}{2}cT;$$

mais par l'*art. IX*, $T = \frac{2\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(P+S)}}$;

donc

$$c = \sqrt{[a \cdot (S+P)]} \cdot (1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma^2)$$
$$= na^2 \cdot [1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma^2]$$

Les expressions précédentes de φ, r & s, satisfont aux équations (10), (11) & (12), lorsqu'on y suppose $\delta\mu' = 0$, $\delta\mu'' = 0$, &c. Ce sont par conséquent les valeurs de M, N & Q des équations ($>$). Pour déterminer présentement M', N' & Q', il faut différencier les équations (13), (14) & (15) par rapport à δ, & leur ajouter les termes multipliés par P', dans les équations (10), (11) & (12), ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l} \partial \cdot \frac{\delta\varphi}{\partial t} = \frac{\delta c}{r^2} - \frac{2c\delta r}{r^3} + \frac{P'}{r^2} \times \\ \int r\,dt \cdot \text{fin.}(\varphi' - \varphi) \cdot \left[\frac{r'}{'\upsilon^3} - \frac{1}{(r')^2 \cdot (1 + s's')^{\frac{3}{2}}}\right] \end{array}\right\} (16).$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \frac{\partial\partial \cdot \delta r}{\partial t^2} - \frac{2c\delta c}{r^3} + \frac{3c^2\delta r}{r^4} - \frac{2 \cdot (S+P) \cdot \delta r}{r^3(1+ss)^{\frac{3}{2}}} \\ - \frac{3(S+P) \cdot s\delta s}{r^2(1+ss)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2cP'}{r^3} \cdot \int r\partial t \cdot \text{fin.}(\varphi' - \varphi) \times \\ \left[\frac{r'}{'\upsilon^3} - \frac{1}{(r')^2 \cdot (1+s' \cdot s')^{\frac{3}{2}}}\right] + \frac{P'}{'\upsilon^3} \times \\ [r - r' \cdot \text{cof.}(\varphi' - \varphi)] + \frac{P' \cdot \text{cof.}(\varphi' - \varphi)}{(r')^2 \cdot (1+s' \cdot s')^{\frac{3}{2}}}. \end{array}\right\} (17).$$

$$\left.\begin{aligned} o = & \frac{\partial\partial.\delta s}{\partial t^2} + \frac{2\partial r.\partial\delta s}{r.\partial t^2} + \frac{2\partial s.\partial\delta r}{r.\partial t^2} \\ & + \frac{c^2\delta s}{r^4} + \frac{2sc\delta c}{r^4} - \frac{4c^2 s\delta r}{r^5} \\ & + \frac{2cP's}{r^4}.\int r\partial t.\text{sin.}(\varphi' - \varphi).\left[\frac{r'}{{}'v^3} - \frac{1}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}\right] \\ & + \frac{P'}{r}.[s' - s.\text{cos.}(\varphi' - \varphi)].\left[\frac{1}{(r')^2.(1+s'.s)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{{}'v^3}\right] \end{aligned}\right\}(18).$$

Il faut présentement tirer de ces équations, les valeurs de δc, $\delta\varphi$, δr & δs.

X I I.

α étant ici fort petit, je n'aurai égard qu'aux quantités de l'ordre α^2, & parmi les termes de cet ordre, je ne considérerai que ceux qui peuvent produire dans la valeur de $\delta\varphi$, des quantités de la forme $\delta\mu'.\alpha^2.htt$, d'où résulteroit une équation séculaire dans le moyen mouvement de la Planète; ces termes méritent conséquemment une attention particulière : or il est aisé de voir à l'inspection des équations (16) & (17), que si dans le développement de

$$r\partial t.\text{sin.}(\varphi' - \varphi).\left[\frac{r'}{{}'v^3} - \frac{1}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}}\right],$$

il y avoit un terme tout constant, il en produiroit un dans la valeur de δr, de la forme $\delta\mu'.ft$, & dans la valeur de $\delta\varphi$, un de la forme $\delta\mu'.gtt$; il faut donc dans le développement de cette quantité, porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^2; mais on peut n'avoir aucun égard aux termes de cet ordre, qui seroient multipliés par des sinus ou des cosinus.

Il est aisé de voir pareillement qu'il est inutile d'avoir égard aux termes de l'ordre α^2, dans le développement de

$$\frac{P'}{{}'v^3}.[r - r'.\text{cos.}(\varphi' - \varphi)] + \frac{P'.\text{cos.}(\varphi' - \varphi)}{(r')^2.(1+s'.s')^{\frac{3}{2}}};$$

soit donc

$$\delta\varphi = \delta\mu^{1}.[x + \alpha x^{1} + \alpha^{2}\beta.nntt],$$
$$\delta r = a\delta\mu^{1}.[y + \alpha y^{1} + \alpha^{2}\lambda.nt],$$
$$\delta s = \alpha z.\delta\mu^{1}.$$

On ſubſtituera ces valeurs dans les équations (16), (17) & (18), en obſervant 1.° de ſubſtituer par-tout, au lieu de φ, r, s; φ^{1}, r^{1}, s^{1}, leurs valeurs tirées des équations (σ) de l'*article précédent;* ce qui eſt évidemment permis, puiſqu'on néglige ici les termes de l'ordre $(\delta\mu^{1})^{2}$; 2.° au lieu de P^{1}, de ſubſtituer $\delta\mu^{1}.a^{3}.nn$; car en négligeant les quantités de l'ordre $\delta\mu$, on a $\frac{S}{a^{3}} = nn$, & $\delta\mu^{1} = \frac{P^{1}}{S}$; 3.° au lieu de c, d'écrire $n.a^{2}.(1 - \frac{1}{2}\alpha^{2}.e^{2} - \frac{1}{2}\alpha^{2}.\gamma^{2})$; on comparera enſuite ſéparément les termes ſans α, ceux de l'ordre α, ceux de l'ordre α^{2}; l'équation (16) en donnera donc trois autres entre x, x^{1} & β; l'équation (17) en donnera trois entre y, y^{1} & λ; & l'équation (18) en donnera une en z.

Les ſubſtitutions précédentes n'ont de difficultés que celles qui peuvent venir du développement de $\frac{1}{{}^{1}v^{3}}$; il ne ſera donc pas inutile de faire quelques remarques à ce ſujet.

XIII.

${}^{1}v$ exprimant la diſtance de P à P^{1}, on a, comme il eſt facile de s'en aſſurer,

$${}^{1}v^{2} = r^{2} - 2rr^{1}.\text{coſ.}(\varphi^{1} - \varphi) + (r^{1})^{2} + (r^{1}.s^{1} - rs)^{2};$$

donc

$$\frac{1}{{}^{1}v^{3}} = \frac{1}{[r^{2} + (r^{1})^{2} + (r^{1}.s^{1} - rs)^{2}]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{2rr^{1}.\text{coſ.}(\varphi^{1} - \varphi)}{r^{2} + (r^{1})^{2} + (r^{1}.s^{1} - rs)^{2}}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit, pour abréger, $\frac{2rr^{1}}{r^{2} + (r^{1})^{2} + (r^{1}.s^{1} - rs)^{2}} = q$, on aura (*Voyez la première pièce de M. Euler ſur Jupiter & Saturne, ou le premier volume du Calcul intégral de cet illuſtre Auteur*).

$$\frac{1}{\left(1+\frac{(a^1)^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot[1-q\cdot\text{cof.}\,(\varphi^1-\varphi)]^{\mu}}=b+b_1\cdot\text{cof.}\,(\varphi^1-\varphi)$$

$$+b_2\cdot\text{cof.}\,2(\varphi^1-\varphi)+b_3\cdot\text{cof.}\,3(\varphi^1-\varphi)+\&c.$$

$$b=\frac{1}{\left(1+\frac{(a^1)^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left\{\begin{array}{l}1+\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\mu+1}{2}\cdot q^2\\+\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\mu+2}{4}\cdot\frac{\mu+3}{4}\cdot q^4\\+\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\mu+2}{4}\cdot\frac{\mu+3}{4}\cdot\frac{\mu+4}{6}\cdot\frac{\mu+5}{6}\cdot q^6+\&c.\end{array}\right.$$

$$b_1=\frac{\mu q}{\left(1+\frac{(a^1)^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left\{\begin{array}{l}1+\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\mu+2}{4}\cdot q^2\\+\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\mu+2}{4}\cdot\frac{\mu+3}{4}\cdot\frac{\mu+4}{6}\cdot q^4\\+\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\mu+2}{4}\cdot\frac{\mu+3}{4}\cdot\frac{\mu+4}{6}\cdot\frac{\mu+5}{6}\cdot\frac{\mu+6}{8}\cdot q^6+\&c.\end{array}\right.$$

Ayant ainsi b & b_1, on aura b_2, b_3, &c. au moyen des équations suivantes,

$$\left.\begin{array}{l}b_2=\frac{2\mu b\cdot q-2b_1}{(\mu-2)\cdot q}\\b_3=\frac{(\mu+1)b_1\cdot q-4b_2}{(\mu-3)\cdot q}\\b_4=\frac{(\mu+2)b_2\cdot q-6b_3}{(\mu-4)\cdot q}\\b_5=\frac{(\mu+3)b_3\cdot q-8b_4}{(\mu-5)\cdot q}\end{array}\right\}(Z);$$

& généralement,

$$b_s=\frac{(\mu+s-2)\cdot b_{s-2}\cdot q-2(s-1)b_{s-1}}{(\mu-s)\cdot q}:$$

les quantités b, b_1, b_2, &c. sont fonctions de la variable q; & puisque nous avons besoin de porter dans certains cas la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^2, & que les variations de q sont de l'ordre α, il faut réduire b, b_1, &c. en suites ascendantes par rapport à α: soit donc $q=h+\alpha h'$, h étant constant & égal à $\frac{2aa^1}{a^2+(a^1)^2}$, on aura

$$b = (b) + \alpha h' \cdot \left(\frac{\partial b}{\partial q}\right) + \frac{\alpha^2 \cdot (h')^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\partial \partial b}{\partial q^2}\right) + \&c.$$

$(b), \left(\frac{\partial b}{\partial q}\right), \left(\frac{\partial \partial b}{\partial q^2}\right)$, &c. étant ce que deviennent $b, \frac{\partial b}{\partial q}, \frac{\partial \partial b}{\partial q^2}$, &c. lorſqu'on y ſubſtitue h, au lieu de q, on aura pareillement

$$b_1 = (b_1) + \alpha h' \cdot \left(\frac{\partial b}{\partial q}\right) + \frac{\alpha^2 \cdot (h')^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\partial \partial b_1}{\partial q^2}\right) + \&c.$$

$$b_2 = (b_2) + \alpha h' \cdot \left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right) + \&c.$$

&c.

Il ne s'agit donc plus que d'avoir les valeurs de $\frac{\partial b}{\partial q}, \frac{\partial \partial b}{\partial q^2}$, &c. $\frac{\partial b_1}{\partial q}$, &c. or l'équation

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{(a')^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot [1 - q \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi)]^{\mu}} = b + b_1 \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi) + b_2 \cdot \text{coſ.}\, 2(\varphi' - \varphi) + \&c.$$

donne en la différenciant par rapport à q,

$$\frac{\mu \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi)}{\left(1 + \frac{(a')^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot [1 - q \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi)]^{\mu} \cdot [1 - q \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi)]} = \frac{\partial b}{\partial q} + \frac{\partial b_1}{\partial q} \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi) + \&c.$$

partant,

$$\mu \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi) \cdot [b + b_1 \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi) + b_2 \cdot \text{coſ.}\, 2 \cdot (\varphi' - \varphi) + \&c.]$$
$$= [1 - q \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi)] \cdot \left[\frac{\partial b}{\partial q} + \frac{\partial b_1}{\partial q} \cdot \text{coſ.}(\varphi' - \varphi) + \frac{\partial b_2}{\partial q} \cdot \text{coſ.}\, 2 \cdot (\varphi' - \varphi) + \&c.\right]$$

De-là en faiſant les multiplications & réduiſant les produits de coſinus en coſinus, on aura, en comparant ſéparément les coëfficiens conſtans, ceux des coſinus de l'angle $\varphi' - \varphi$, & de ſes multiples,

$$2 \cdot \frac{\partial b}{\partial q} = \mu b_1 + q \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q},$$

$$2 \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q} = 2\left(\mu b + q \cdot \frac{\partial b}{\partial q}\right) + \mu b_2 + q \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q},$$

$$2 \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q} = \mu b_1 + q \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q} + \mu b_3 + q \cdot \frac{\partial b_3}{\partial q},$$

$$2 \cdot \frac{\partial b_3}{\partial q} = \mu b_2 + q \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q} + \mu b_4 + q \cdot \frac{\partial b_4}{\partial q},$$

&c.

Au moyen de ces équations & des équations (/), on aura $\frac{\partial b_2}{\partial q}$, $\frac{\partial b_3}{\partial q}$, &c. lorsqu'on connoîtra $\frac{\partial b}{\partial q}$, & $\frac{\partial b_1}{\partial q}$; or on a par ce qui précède, $b_2 = \frac{-2b_1 + 2\mu b q}{(\mu - 2) q}$; partant,

$$\mu b_2 + q \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q} = -\frac{2\mu b_1}{(\mu - 2) q} + \frac{2\mu\mu b}{\mu - 2} - \frac{2 \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q}}{\mu - 2} + \frac{2 b_1}{(\mu - 2) \cdot q} + \frac{2\mu q \cdot \frac{\partial b}{\partial q}}{\mu - 2};$$

on aura donc les deux équations

$$\frac{2\partial b}{\partial q} = \mu b_1 + q \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q};$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial q} = 2\mu b - \frac{b_1}{q} + 2q \cdot \frac{\partial b}{\partial q};$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\partial b}{\partial q} = \frac{b_1 \cdot (\mu - 1) + 2\mu b q}{2(1 - qq)},$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial q} = \frac{2\mu b q + b_1 \cdot (\mu qq - 1)}{q(1 - qq)};$$

ayant ainsi déterminé $\frac{\partial b}{\partial q}$, $\frac{\partial b_1}{\partial q}$, $\frac{\partial b_2}{\partial q}$, &c. en b, b_1, b_2, &c. on en conclura facilement par la différentiation, les valeurs de $\frac{\partial\partial b}{\partial q^2}$, $\frac{\partial\partial b_1}{\partial q^2}$, &c. & en changeant q en h, on aura $(b), (b_1), (b_2)$, &c. $\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right), \left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right)$, &c. $\left(\frac{\partial\partial b}{\partial q^2}\right)$, &c. soit $\frac{a'}{a} = i$, ce qui donne $h = \frac{2i}{1 - ii}$, on aura, cela posé, dans le cas de $\mu = \frac{3}{2}$,

$$b = \frac{1}{(1 + ii)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(\frac{2i}{1 + ii}\right)^2 \\ + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8^2}\right) \cdot \left(\frac{2i}{1 + ii}\right)^4 \\ + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{12^2}\right) \cdot \left(\frac{2i}{1 + ii}\right)^6 + \&c. \end{array} \right. \quad (b')$$

$$b_1 = \frac{3i}{(1+ii)^{\frac{5}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left[1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right].\left(\frac{2i}{1+ii}\right)^2 \\ + \left[1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right].\left[1 + \frac{3}{4(5^2-1)}\right].\left(\frac{2i}{1+ii}\right)^4 \\ + \left[1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right].\left[1 + \frac{3}{4(5^2-1)}\right].\left[1 + \frac{3}{4(7^2-1)}\right].\left(\frac{2i}{1+ii}\right)^6 + \&c. \end{array} \right.$$

$$(b) = \frac{2.(b_1).(1+ii) - 6.(b).i}{i}; \quad (b_3) = \frac{4.(b_2).(1+ii) - 5.(b_1).i}{3i};$$

$$(b_4) = \frac{6.(b_3).(1+ii) - 7.(b_2).i}{5i}; \quad (b_5) = \frac{8.(b_4).(1+ii) - 9.(b_3).i}{7i}; \&c.$$

la loi de ces termes eſt trop viſible pour les continuer plus loin ; on aura enſuite,

$$\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right) = \frac{(b_1).(1+ii)^2}{4.(1-ii)^2} + \frac{3(b)i.(1+ii)^2}{(1-ii)^2};$$

$$\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) = \frac{3(b).(1+ii)^2}{(1-ii)^2} - \frac{(b_1).(1+ii).(1-4ii+i^4)}{2i.(1-ii)^2};$$

$$\left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right) = \frac{6(b).(1+ii).(1-ii+i^4)}{i.(1-ii)^2} - \frac{(b_1).(1+ii)^2.(4-9ii+14i^4)}{2i^2.(1-ii)^2};$$

& les équations (f) donnent en les différentiant,

$$\left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right) = \frac{4.\left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right).(1+ii)}{3i} - \frac{2.(b_2).(1+ii)^2}{3i^2} - \frac{5}{3}.\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right),$$

$$\left(\frac{\partial b_4}{\partial q}\right) = \frac{6.\left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right).(1+ii)}{5i} - \frac{3.(b_3).(1+ii)^2}{5i^2} - \frac{7}{5}.\left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right),$$

$$\left(\frac{\partial b_5}{\partial q}\right) = \frac{8.\left(\frac{\partial b_4}{\partial q}\right).(1+ii)}{7i} - \frac{4.(b_4).(1+ii)^2}{7i^2} - \frac{9}{7}.\left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right),$$

&c.

la loi de ces termes eſt trop viſible pour les continuer plus loin; enfin on aura

$$\left(\frac{\partial\partial b}{\partial q^2}\right) = \frac{3.(b).(3i^4+26i^2+3).(1+ii)^2}{4.(1-ii)^4} - \frac{(b_1).(1-18ii+i^4).(1+ii)^3}{8i.(1-ii)^4},$$

$$\left(\frac{\partial\partial b_1}{\partial q^2}\right) = \frac{(b_1).[60i^4 - 15i^2.(1+ii)^2 + 2.(1+ii)^4].(1+ii)^2}{4i^2.(1-ii)^4}$$

$$- \frac{3.(b).(1+ii)^3.(1-18i^2+i^4)}{2i.(1-ii)^4},$$

$$\left(\frac{\partial\partial b_2}{\partial q^2}\right) = \frac{3.(b).[-60i^4 + 47i^2.(1+ii)^2 - 6.(1+ii)^4].(1+ii)^2}{2i^2.(1-ii)^4}$$

$$+ \frac{(b_1).[220.i^4 - 99.i^2.(1+ii)^2 + 12.(1+ii)^4].(1+ii)^3}{4i^3.(1-ii)^4}.$$

X I V.

Il faut préfentement développer les différens termes des équations (16), (17) & (18) de l'*article XI*, & pour faciliter ce calcul, il ne fera pas inutile d'avoir fous les yeux les formules fuivantes,

$$\text{fin. } a.\text{cof. } b = \tfrac{1}{2}.\text{fin. }(a+b) + \tfrac{1}{2}.\text{fin.}(a-b),$$
$$\text{fin. } a.\text{fin. } b = \tfrac{1}{2}.\text{cof. }(a-b) - \tfrac{1}{2}.\text{cof.}(a+b),$$
$$\text{cof. } a.\text{cof. } b = \tfrac{1}{2}.\text{cof. }(a+b) + \tfrac{1}{2}.\text{cof.}(a-b),$$
$$\text{fin.}(z+\alpha) = \text{fin.} z + \alpha.\text{cof.} z - \frac{\alpha^2}{1.2}.\text{fin.} z - \&c.$$
$$\text{cof.}(z+\alpha) = \text{cof.} z - \alpha.\text{fin.} z - \frac{\alpha^2}{1.2}.\text{cof.} z + \&c.$$

on trouvera, cela pofé, en portant la précifion jufqu'aux quantités de l'ordre α^2, & ne confervant parmi les termes de cet ordre, que ceux d'où peut réfulter une équation féculaire dans le moyen mouvement de la Planète P.

$$\frac{arr'}{[r^2 + (r')^2 + (r's' - rs)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{i}{(1+ii)^{\frac{1}{2}}}.\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{\alpha e.(ii-2)}{1+ii}.\text{cof.}(nt+\theta) \\ - \frac{\alpha^2 ee'}{2}.\frac{(2-11.i^2+2.i^4)}{(1+ii)^2}.\text{cof.}(n't - nt + \theta' - \theta) \\ + \frac{\alpha e'.(1-2ii)}{1+ii}.\text{cof.}(n't+\theta') \\ + \frac{3}{2}.\frac{\alpha^2 i\gamma\gamma'}{1+ii}.\text{cof.}(n't - nt + \varpi' - \varpi); \end{array}\right.$$

on aura enfuite, $h = \frac{2i}{1+ii}$,

$$\alpha h' = \frac{2i}{1+ii} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \alpha e \cdot \frac{(ii-1)}{1+ii} \cdot \text{cof.}\,(nt+\theta) \\ -\frac{1}{2}\alpha^2 e e' \cdot \frac{(1-6.ii+i^4)}{(1+ii)^2} \cdot \text{cof.}\,(n't-nt+\theta'-\theta) \\ +\alpha e' \cdot \frac{(1-ii)}{1+ii} \cdot \text{cof.}\,(n't+\theta') \\ +\frac{\alpha^2 \gamma \gamma' . i}{1+ii} \cdot \text{cof.}\,(n't-nt+\varpi'-\varpi); \end{array} \right.$$

partant,

$$\frac{\alpha^2 (h')^2}{2} = -\frac{2\alpha^2 e e' . i^2 (1-ii)^2}{(1+ii)^4} \cdot \text{cof.}\,(n't-nt+\theta'-\theta);$$

De-là, on conclura, en faisant pour abréger,

$A' - A + \theta' - \theta = B$, $A' - A = V$, &
$A' - A + \theta' - \theta - \varpi' + \varpi = U$,

$$\frac{\alpha r r' . \text{fin.}\,(\varphi'-\varphi)}{{}^{2}v^{2}} = i \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \cdot \text{fin.}\,(n't-nt+B) \\ +\frac{1}{2} \cdot [(b_1) - (b_3)] \cdot \text{fin.}\,2(n't-nt+B) \\ +\frac{1}{2} \cdot [(b_2) - (b_4)] \cdot \text{fin.}\,3(n't-nt+B) \\ + \&c. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} +2\alpha e . i . \text{fin.}\,(nt+\theta) \\ -2\alpha e' . i . \text{fin.}\,(n't+\theta') \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \cdot \text{cof.}\,(n't-nt+B) \\ +\frac{2}{2} \cdot [(b_1) - (b_3)] \cdot \text{cof.}\,2(n't-nt+B) \\ +\frac{3}{2} \cdot [(b_2) - (b_4)] \cdot \text{cof.}\,3(n't-nt+B) \\ + \&c. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} +\frac{\alpha e i . (ii-2)}{1+ii} \cdot \text{cof.}\,(nt+\theta) \\ +\frac{\alpha e' i . (1-2ii)}{1+ii} \cdot \text{cof.}\,(n't+\theta') \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \cdot \text{fin.}\,(n't-nt+B) \\ +\frac{1}{2} \cdot [(b_1) - (b_3)] \cdot \text{fin.}\,2(n't-nt+B) \\ + \&c. \end{array} \right.$$

$$+\frac{2ii.(ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \alpha e \cdot \text{cof.}\,(nt+\theta) \\ -\alpha e' \cdot \text{cof.}\,(n't+\theta') \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial b_2}{\partial q})] \cdot \text{fin.}\,(n't-nt+B) \\ +\frac{1}{2} \cdot [(\frac{\partial b_1}{\partial q}) - (\frac{\partial b_3}{\partial q})] \cdot \text{fin.}\,2(n't-nt+B) \\ + \&c. \end{array} \right.$$

$$+\frac{15.i^3}{4(1+ii)^2} \cdot \alpha^2 e e' \cdot \text{fin.}\,V \cdot [(b) - \frac{1}{2}(b_2)]$$

$$+\frac{3}{4}\alpha^2 \gamma \gamma' \cdot \frac{ii}{1+ii} \cdot \text{fin.}\,U \cdot [(b) - \frac{1}{2}(b_2)]$$

$$- 2a^2 ee^1 . \frac{ii.(1 - 3i^2 + i^4)}{(1 + ii)^3} . \text{fin.} V . [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial b_2}{\partial q})]$$

$$+ \frac{a^2 \gamma\gamma^1 . i^3}{(1 + ii)^2} . \text{fin.} U . [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial b_2}{\partial q})]$$

$$- \frac{a^2 ee^1 i^3 . (1 - ii)^2}{(1 + ii)^4} . \text{fin.} V . [(\frac{\partial\partial b}{\partial q^2}) - \frac{1}{2} . (\frac{\partial\partial b_2}{\partial q^2})].$$

Soit

$$\frac{15 i^3}{4(1 + ii)^2} . [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] - \frac{2ii.(1 - 3i^2 + i^4)}{(1 + ii)^3} . [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial b_2}{\partial q})]$$

$$- \frac{i^3 . (1 - ii)^2}{(1 + ii)^4} . [(\frac{\partial\partial b}{\partial q^2}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial\partial b_2}{\partial q^2})] = K,$$

$$\frac{3ii}{4(1 + ii)} . [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] + \frac{i^3}{(1 + ii)^2} . [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2} . (\frac{\partial b_2}{\partial q})] = L,$$

$$C = i . [(b) - \frac{1}{2}(b_2)]$$

$$^1C = 2i . [\frac{1}{2}(b_1) - \frac{1}{2}(b_3)]$$

$$^2C = 3i . [\frac{1}{2}(b_2) - \frac{1}{2}(b_4)]$$

&c.

$$D = \frac{i.(ii - 2)}{2.(1 + ii)} . [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] + \frac{ii.(ii - 1)}{(1 + ii)^2} . [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2} . (\frac{\partial b_2}{\partial q})]$$

$$^1D = \frac{i.(ii - 2)}{2.(1 + ii)} . [\frac{1}{2}(b_1) - \frac{1}{2}(b_3)] + \frac{ii.(ii - 1)}{(1 + ii)^2} . [\frac{1}{2}(\frac{\partial b_1}{\partial q}) - \frac{1}{2} . (\frac{\partial b_1}{\partial q})]$$

$$^2D = \frac{i.(ii - 2)}{2(1 + ii)} . [\frac{1}{2}(b_2) - \frac{1}{2}(b_4)] + \frac{ii.(ii - 1)}{(1 + ii)^2} . [\frac{1}{2}(\frac{\partial b_2}{\partial q}) - \frac{1}{2} . (\frac{\partial b_4}{\partial q})]$$

&c.

$$E = \frac{ii.(ii - 1)}{(1 + ii)^2} . [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial b_2}{\partial q})] - \frac{i.(1 - 2ii)}{2(1 + ii)} . [(b) - \frac{1}{2} . (b_2)]$$

$$^1E = \frac{ii.(ii - 1)}{(1 + ii)^2} . [\frac{1}{2}(\frac{\partial b_1}{\partial q}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial b_3}{\partial q})] - \frac{i.(1 - 2ii)}{2.(1 + ii)} . [\frac{1}{2}(b_1) - \frac{1}{2} . (b_3)]$$

&c.

On aura

$$\int \frac{arr^1 \partial t . \text{fin.}(\phi^1 - \phi)}{{}^1v^3} = \frac{1}{n - n^1} . \left\{ \begin{array}{l} C . \text{cof.}(n^1 t - nt + B) + \frac{1}{4} . {}^1C . \text{cof.} 2(n^1 t - nt + B) \\ + \frac{1}{9} . {}^2C . \text{cof.} 3(n^1 t - nt + B) + \&c. \end{array} \right.$$

$$-\alpha e.\left\{\begin{array}{l}
\quad\;\; \frac{C+D}{n'}.\text{cof.}(n't+B+\theta) \\
+\frac{D-C}{n'-2n}.\text{cof.}(n't-2nt+B-\theta) \\
+\frac{{}^{1}D+{}^{1}C}{2n'-n}.\text{cof.}(2n't-nt+2B+\theta) \\
+\frac{{}^{1}D-{}^{1}C}{2n'-3n}.\text{cof.}(2n't-3nt+2B-\theta) \\
+\frac{{}^{2}D+{}^{2}C}{3n'-2n}.\text{cof.}(3n't-2nt+3B+\theta) \\
+\frac{{}^{2}D-{}^{2}C}{3n'-4n}.\text{cof.}(3n't-4nt+3B-\theta) \\
+\ \&c.
\end{array}\right.$$

$$+\alpha e'.\left\{\begin{array}{l}
\quad\;\; \frac{E+C}{2n'-n}.\text{cof.}(2n't-nt+B+\theta') \\
+\frac{C-E}{n}.\text{cof.}(nt-B+\theta') \\
+\frac{{}^{1}E+{}^{1}C}{3n'-2n}.\text{cof.}(3n't-2nt+2B+\theta') \\
+\frac{{}^{1}E-{}^{1}C}{n'-2n}.\text{cof.}(n't-2nt+2B-\theta') \\
+\frac{{}^{2}E+{}^{2}C}{4n'-3n}.\text{cof.}(4n't-3nt+3B+\theta') \\
+\frac{{}^{2}E-{}^{2}C}{2n'-3n}.\text{cof.}(2n't-3nt+3B-\theta') \\
+\ \&c.
\end{array}\right.$$

$$+\alpha^2 ee'.Kt.\text{fin.}V+\alpha^2\gamma\gamma'.Lt.\text{fin.}U;$$

foit encore,

$$(b)-\frac{i.(b_1)}{2}=F,$$

$$(b_1)-i.[(b)+\tfrac{1}{2}(b_2)]={}^{1}F,$$

$$2(b_2)-2i.[\tfrac{1}{2}(b_1)+\tfrac{1}{2}(b_3)]={}^{2}F,$$

$$3(b_3)-3i.[\tfrac{1}{2}(b_2)+\tfrac{1}{2}(b_4)]={}^{3}F,$$

&c.

$$\frac{(ii-2)}{2(1+ii)}\cdot(b)+\frac{i.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right)+\frac{3i}{2(1+ii)}\cdot\left(\frac{b_1}{2}\right)$$
$$-\frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left(\frac{\partial b_1}{2\partial q}\right)=G,$$

$$\frac{(ii-2)}{2(1+ii)}\cdot(b_1)+\frac{i.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right)+\frac{3i}{2(1+ii)}\times$$
$$\cdot\left[(b)+\tfrac{1}{2}(b_2)\right]-\frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right)\right]={}^{1}G,$$

$$\frac{(ii-2)}{2(1+ii)}\cdot(b_2)+\frac{i.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right)+\frac{3i}{2(1+ii)}\times$$
$$\cdot\left[\tfrac{1}{2}(b_1)+\tfrac{1}{2}(b_3)\right]-\frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right)\right]={}^{2}G,$$

&c.

$$\frac{3ii}{2(1+ii)}\cdot(b)+\frac{i.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right)+\frac{i.(1-2ii)}{2.(1+ii)}\cdot\left(\frac{b_1}{2}\right)$$
$$-\frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left(\frac{\partial b_1}{2\partial q}\right)=H,$$

$$\frac{3ii}{2(1+ii)}\cdot(b_1)+\frac{i.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right)+\frac{i.(1-2ii)}{2(1+ii)}\times$$
$$\cdot\left[(b)+\tfrac{1}{2}(b_2)\right]-\frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right)\right]={}^{1}H,$$

$$\frac{3ii}{2(1+ii)}\cdot(b_2)+\frac{i.(ii-1)}{i.(1+ii)^2}\cdot\left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right)+\frac{i.(1-2ii)}{2(1+ii)}\times$$
$$\cdot\left[\tfrac{1}{2}(b_1)+\tfrac{1}{2}(b_3)\right]-\frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right)\right]={}^{2}H,$$

&c.

on trouvera

$$\frac{a^2.[r-r^1.\text{cof.}(\varphi^1-\varphi)]}{{}^{1}\varrho^3}=F+{}^{1}F.\text{cof.}\ (n^1t-nt+B)$$
$$+\tfrac{1}{2}.{}^{2}F.\text{cof.}\,2.(n^1t-nt+B)$$
$$+\tfrac{1}{3}.{}^{3}F.\text{cof.}\,3.(n^1t-nt+B)$$
$$+\ \&c.$$

$$+\,ae:\begin{cases}2\,G.\text{cof.}(nt+\theta)\\ +\ ({}^{1}G+{}^{1}F).\text{cof.}(n^1t+B+\theta)\\ +\ ({}^{1}G-{}^{1}F).\text{cof.}(n^1t-2nt+B-\theta)\\ +\ ({}^{2}G+{}^{2}F).\text{cof.}(2n^1t-nt+2B+\theta)\\ +\ ({}^{2}G-{}^{2}F).\text{cof.}(2n^1t-3nt+2B-\theta)\\ +\ \&c.\end{cases}$$

$$- \alpha e' \begin{cases} 2H.\text{cof.}(n't + \theta') \\ + ({}^1H + {}^1F).\text{cof.}(2n't - nt + B + \theta') \\ + ({}^1H - {}^1F).\text{cof.}(nt - B + \theta') \\ + ({}^2H + {}^2F).\text{cof.}(3n't - 2nt + 2B + \theta') \\ + ({}^2H - {}^2F).\text{cof.}(n't - 2nt + 2B - \theta') \\ + \&c. \end{cases}$$

On trouvera pareillement

$$-\int \frac{ar\partial t.\text{fin.}(\varphi' - \varphi)}{(r')^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{ii.(n' - n)}.\text{cof.}(n't - nt + B)$$
$$- \alpha e\left[\frac{1}{2ii(n' - 2n)}.\text{cof.}(n't - 2nt + B - \theta)\right.$$
$$\left. - \frac{3}{2ii.n'}.\text{cof.}(n't + B + \theta)\right]$$
$$- \frac{2\alpha e'}{ii(2n' - n)}.\text{cof.}(2n't - nt + B + \theta');$$

$$\frac{a^2.\text{cof.}(\varphi' - \varphi)}{(r')^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{ii}.\text{cof.}(n't - nt + B)$$
$$- \frac{\alpha e}{ii}.\begin{Bmatrix} \text{cof.}(n't - 2nt + B - \theta) \\ - \text{cof.}(n't + B + \theta) \end{Bmatrix}$$
$$- \frac{2\alpha e'}{ii}.\text{cof.}(2n't - nt + B + \theta').$$

On aura enfin

$$a^2.[s' - s.\text{cof.}(\varphi' - \varphi)].\left[\frac{1}{(r')^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{{}^3v^3}\right]$$

$$= \frac{\alpha\gamma' i}{2}.\begin{cases} \left[\frac{2}{i^3} - 2(b)\right].\text{fin.}(n't + \varpi') \\ \quad - (b_1).[\text{fin.}(2n't - nt + B + \varpi') \\ \qquad + \text{fin.}(nt - B + \varpi')] \\ \quad - (b_2).[\text{fin.}(3n't - 2nt + 2B + \varpi') \\ \qquad - \text{fin.}(n't - 2nt + 2B - \varpi')] \\ \quad - (b_3).[\text{fin.}(4n't - 3nt + 3B + \varpi') \\ \qquad - \text{fin.}(2n't - 3nt + 3B - \varpi')] \\ \quad - \&c. \end{cases}$$

$$+\frac{\alpha\gamma i}{4}\cdot\left\{\begin{array}{l} 2(b_{,}).\text{fin.}(nt+\varpi) \\ +[2(b_{,})+(b_{2})-\frac{2}{i^3}].[\text{fin.}(n't+B+\varpi) \\ \qquad -\text{fin.}(n't-2nt+B-\varpi)] \\ \quad +[(b_{,})+(b_{3})].[\text{fin.}(2n't-nt+2B+\varpi) \\ \qquad -\text{fin.}(2n't-3nt+2B-\varpi)] \\ +\&c. \end{array}\right.$$

X V.

L'Équation (17) de l'*article XI,* donne en y subſtituant, au lieu de δr, $a\delta\mu'.y$, & en négligeant les quantités de l'ordre α.

$$o=\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}-\frac{2c\delta c}{a^4\delta\mu'}+y.\left[\frac{3c^2}{a^4}-\frac{2(S+P)}{a^3}\right]$$

$$+\frac{2c}{a^2}.\frac{nn}{n'-n}.\left\{\begin{array}{l}(C-\frac{1}{ii}).\text{cof.}(n't-nt+B) \\ +\frac{1}{4}.{}^{1}C.\text{cof.}2(n't-nt+B) \\ +\frac{1}{9}.{}^{2}C.\text{cof.}3(n't-nt+B) \\ +\&c.\end{array}\right.$$

$$+nn\left\{\begin{array}{l}F+({}^{1}F+\frac{1}{ii}).\text{cof.}(n't-nt+B) \\ +\frac{1}{2}.{}^{2}F.\text{cof.}2(n't-nt+B) \\ +\frac{1}{3}.{}^{3}F.\text{cof.}3(n't-nt+B) \\ +\&c.\end{array}\right.$$

or, on a par l'*article XI,* aux quantités près de l'ordre α^2, $\frac{c}{a^2}=n$, enſuite, $nn=\frac{S+P}{a^3}$; donc

$$\begin{array}{l}o=\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}-\frac{2n\delta c}{a^2\delta\mu'}+n^2y+nn. \\ \quad +nnF\end{array}\left\{\begin{array}{l}[{}^{1}F+\frac{1}{ii}+\frac{2n}{n'-n}.(C-\frac{1}{ii})].\text{cof.}(n't-nt+B) \\ +[\frac{1}{2}.{}^{2}F+\frac{2n}{n'-n}.\frac{1}{4}.{}^{1}C].\text{cof.}2(n't-nt+B) \\ +[\frac{1}{3}.{}^{3}F+\frac{2n}{n'-n}.\frac{1}{9}.{}^{2}C].\text{cof.}3(n't-nt+B) \\ +\&c.\end{array}\right.$$

d'où

d'où l'on tire en intégrant,

$$y = -F + \frac{2\delta c}{a^2 n \delta\mu'} + \frac{nn}{(n'-n)^2 - nn} \cdot [{}^1F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n'-n} \cdot (C - \frac{1}{ii})] . \text{cos.} (n't - nt + B)$$
$$+ \frac{nn}{(2n'-2n)^2 - nn} \cdot [\tfrac{1}{2} . {}^2F + \frac{2n}{n'-n} . \tfrac{1}{4} . {}^1C] . \text{cos.}\, 2\, (n't - nt + B)$$
$$+ \frac{nn}{(3n'-3n)^2 - nn} \cdot [\tfrac{1}{3} . {}^3F + \frac{2n}{n'-n} . \tfrac{1}{9} . {}^2C] . \text{cos.}\, 3\, (n't - nt + B)$$
$$+ \&c.$$

Il eſt inutile d'ajouter ici des conſtantes arbitraires, parce qu'elles ſont déja renfermées dans la première valeur de r, que la ſuppoſition de $\delta\mu' = 0$, nous a donnée *art. IX.*

Si l'on ſubſtitue cette valeur de y, dans l'équation (16) de l'*article XI;* on aura en y ſuppoſant $\delta\varphi = x . \delta\mu'$, & négligeant les quantités de l'ordre α.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{3\delta c}{a^2 . \delta\mu'} + 2nF - [\frac{nn}{n'-n} . (C - \frac{1}{ii}) + \frac{2n^3}{(n'-n)^2 - nn} \times$$
$$[{}^1F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n'-n} . (C - \frac{1}{ii})]] . \text{cos.} (n't - nt + B)$$
$$- [\tfrac{1}{4} . \frac{nn}{n'-n} . {}^1C + \frac{2n^3}{(2n'-2n)^2 - nn} . (\tfrac{1}{2} . {}^2F + \frac{2n}{n'-n} . \tfrac{1}{4} . {}^1C)] . \text{cos.}\, 2 . (n't - nt + B)$$
$$- [\tfrac{1}{9} . \frac{nn}{n'-n} . {}^2C + \frac{2n^3}{(3n'-3n)^2 - nn} . (\tfrac{1}{3} . {}^3F + \frac{2n}{n'-n} . \tfrac{1}{9} . {}^2C)] . \text{cos.}\, 3 . (n't - nt + B)$$
$$- \&c.$$

Que l'on détermine préſentement δc, de manière que $\frac{\partial x}{\partial t}$, ne renferme point de terme conſtant, & qu'ainſi nt repréſente le moyen mouvement de la Planète, on aura

$0 = -\frac{3\delta c}{a^2 \delta\mu'} + 2nF$; partant $\frac{\delta c}{a^2 \delta\mu'} = \frac{2}{3} nF$; donc

$$y = \tfrac{1}{3}F + \frac{nn}{(n'-n)^2 - nn} . [{}^1F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n'-n} . (C - \frac{1}{ii})] . \text{cos.} (n't - nt + B) + \&c.$$

telles ſont les valeurs de $\frac{\delta r}{a\delta\mu'}$, & de $\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t}$, aux quantités près de l'ordre α. Déterminons préſentement ces valeurs aux quantités près de l'ordre α^2.

X V I.

Pour cela on ſubſtituera dans l'équation (17) de l'*article XI*, au lieu de r, $a\delta\mu' . (y + \alpha y')$; on négligera les quantités de l'ordre α^2, & on obſervera que, par la nature de y, les termes ſans α doivent ſe détruire réciproquement; de cette manière, en faiſant pour abréger,

$$I = -\frac{3nn}{(n'-n)^2 - nn} . \left[{}^{1}F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n'-n} . \left(C - \frac{1}{ii}\right)\right]$$
$$+ \frac{2n}{n'} . \left[C + D - \frac{3}{2ii}\right] - \frac{3n}{n'-n} . \left(C - \frac{1}{ii}\right) + {}^{1}G \pm {}^{1}F + \frac{1}{ii}$$

$${}^{1}I = -\frac{3nn}{(n'-n)^2 - nn} . \left[{}^{1}F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n'-n} . \left(C - \frac{1}{ii}\right)\right]$$
$$+ \frac{2n}{n' - 2n} . \left[D - C + \frac{1}{2ii}\right] - \frac{3n}{n'-n} . \left(C - \frac{1}{ii}\right) + {}^{1}G - {}^{1}F - \frac{1}{ii}$$

$${}^{2}I = -\frac{3nn}{(2n'-2n)^2 - nn} . \left[\tfrac{1}{2} . {}^{2}F + \frac{2n}{n'-n} . \tfrac{1}{4} . {}^{1}C\right]$$
$$+ \frac{2n}{2n' - n} . ({}^{1}D + {}^{1}C) - \frac{3n}{n'-n} . \tfrac{1}{4} . {}^{1}C + {}^{2}G + {}^{2}F$$

$${}^{3}I = -\frac{3nn}{(2n'-2n)^2 - nn} . \left[\tfrac{1}{2} . {}^{2}F + \frac{2n}{n'-n} . \tfrac{1}{4} . {}^{1}C\right]$$
$$+ \frac{2n}{2n' - 3n} . ({}^{1}D - {}^{1}C) - \frac{3n}{n'-n} . \tfrac{1}{4} . {}^{1}C + {}^{2}G - {}^{2}F$$

$${}^{4}I = -\frac{3nn}{(3n'-3n)^2 - nn} . \left[\tfrac{1}{3} . {}^{3}F + \frac{2n}{n'-n} . \tfrac{1}{9} . {}^{2}C\right]$$
$$+ \frac{2n}{3n' - 2n} . ({}^{2}D + {}^{2}C) - \frac{3n}{n'-n} . \tfrac{1}{9} . {}^{2}C + {}^{3}G + {}^{3}F$$

$${}^{5}I = -\frac{3nn}{(3n'-3n)^2 - nn} . \left[\tfrac{1}{3} . {}^{3}F + \frac{2n}{n'-n} . \tfrac{1}{9} . {}^{2}C\right]$$
$$+ \frac{2n}{3n' - 4n} . ({}^{2}D - {}^{2}C) - \frac{3n}{n'-n} . \tfrac{1}{9} . {}^{2}C + {}^{3}G - {}^{3}F$$

&c.

$${}^{1}L = \frac{2n}{2n'-n} . \left[E + C - \frac{2}{ii}\right] + {}^{1}H + {}^{1}F \pm \frac{2}{ii}$$
$${}^{2}L = 2 . (C - E) + {}^{1}H - {}^{1}F$$
$${}^{3}L = \frac{2n}{3n' - 2n} . [{}^{1}E + {}^{1}C] + {}^{2}H + {}^{2}F$$
$${}^{4}L = \frac{2n}{n' - 2n} . [{}^{1}E - {}^{1}C] \pm {}^{2}H - {}^{2}F$$

&c.

on aura l'équation ſuivante

$$0 = \frac{\partial\partial y^{\mathrm{I}}}{\partial t^2} + nny^{\mathrm{I}} + 2n^2 e.(F + G).\text{coſ.}(nt + \theta)$$
$$- n^2.{}^2Le^{\mathrm{I}}.\text{coſ.}(nt - B + \theta^{\mathrm{I}})$$
$$+ nne.I.\text{coſ.}(n^{\mathrm{I}}t + B + \theta)$$
$$+ nne.{}^1I.\text{coſ.}(n^{\mathrm{I}}t - 2nt + B - \theta)$$
$$+ nne.{}^2I.\text{coſ.}(2n^{\mathrm{I}}t - nt + 2B + \theta)$$
$$+ nne.{}^3I.\text{coſ.}(2n^{\mathrm{I}}t - 3nt + 2B - \theta)$$
$$+ nne.{}^4I.\text{coſ.}(3n^{\mathrm{I}}t - 2nt + 3B + \theta)$$
$$+ nne.{}^5I.\text{coſ.}(3n^{\mathrm{I}}t - 4nt + 3B - \theta)$$
$$+ \text{\&c.}$$
$$- 2nne^{\mathrm{I}}.H.\text{coſ.}(n^{\mathrm{I}}t + \theta^{\mathrm{I}})$$
$$- nne^{\mathrm{I}}.{}^1L.\text{coſ.}(2n^{\mathrm{I}}t - nt + B + \theta^{\mathrm{I}})$$
$$- nne^{\mathrm{I}}.{}^3L.\text{coſ.}(3n^{\mathrm{I}}t - 2nt + 2B + \theta^{\mathrm{I}})$$
$$- nne^{\mathrm{I}}.{}^4L.\text{coſ.}(n^{\mathrm{I}}t - 2nt + 2B - \theta^{\mathrm{I}})$$
$$- \text{\&c.}$$

d'où en intégrant, on aura

$$y^{\mathrm{I}} = -(F + G).ent.\text{ſin.}(nt + \theta)$$
$$+ \tfrac{1}{2}.{}^2Le^{\mathrm{I}}.nt.\text{ſin.}(nt - B + \theta^{\mathrm{I}})$$
$$+ \frac{nne.I}{(n^{\mathrm{I}})^2 - nn}.\text{coſ.}(n^{\mathrm{I}}t + B + \theta)$$
$$+ \frac{nne.{}^1I}{(n^{\mathrm{I}} - 2n)^2 - nn}.\text{coſ.}(n^{\mathrm{I}}t - 2nt + B - \theta)$$
$$+ \frac{nne.{}^2I}{(2n^{\mathrm{I}} - n)^2 - nn}.\text{coſ.}(2n^{\mathrm{I}}t - nt + 2B + \theta)$$
$$+ \frac{nne.{}^3I}{(2n^{\mathrm{I}} - 3n)^2 - nn}.\text{coſ.}(2n^{\mathrm{I}}t - 3nt + 2B - \theta)$$
$$+ \text{\&c.}$$

$$- \frac{2nn.e'.H}{(n')^2 - nn} . \text{cos.}(n't + \theta')$$
$$- \frac{nne'.{}^1L}{(2n'-n)^2 - nn} . \text{cos.}(2n't - nt + B + \theta')$$
$$- \frac{nne'.{}^3L}{(3n'-2n)^2 - nn} . \text{cos.}(3n't - 2nt + 2B + \theta')$$
$$- \frac{nne'.{}^4L}{(n'-2n)^2 - nn} . \text{cos.}(n't - 2nt + 2B - \theta')$$
$$- \text{\&c.}$$

Maintenant, si l'on substitue au lieu de $\delta\varphi$, $\delta\mu'.(x + \alpha x')$, dans l'équation (16) de l'*article XI*; que l'on néglige les quantités de l'ordre α^2, & que l'on considère que par la nature de x, tous les termes sans α disparoissent d'eux-mêmes, on aura, en faisant pour abréger,

$$M = \frac{3nn}{(n'-n)^2 - nn} . [\ {}^1F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n'-n}.(C - \frac{1}{ii})] - \frac{2nn.I}{(n')^2 - n^2}$$
$$- \frac{n}{n'} .(C + D - \frac{3}{2ii}) + \frac{n}{n'-n}.(C - \frac{1}{ii})$$

$${}^1M = \frac{3nn}{(n'-n)^2 - nn} . [\ {}^1F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n'-n}.(C - \frac{1}{ii})] - \frac{2nn.{}^1I}{(n'-2n)^2 - nn}$$
$$- \frac{n}{n'-2n} .(D - C + \frac{1}{2ii}) + \frac{n}{n'-n}.(C - \frac{1}{ii})$$

$${}^2M = \frac{3nn}{(2n'-2n)^2 - nn} . [\ \tfrac{1}{2}\ .\ {}^2F + \frac{2n}{n'-n}.\tfrac{1}{4}.{}^1C] - \frac{2nn.{}^2I}{(2n'-n)^2 - nn}$$
$$- \frac{n}{2n'-n} .({}^1D + {}^1C) + \frac{n}{n'-n}.\tfrac{1}{4}.{}^1C$$

$${}^3M = \frac{3nn}{(2n'-2n)^2 - nn} . [\ \tfrac{1}{2}\ .\ {}^2F + \frac{2n}{n'-n}.\tfrac{1}{4}.{}^1C] - \frac{2nn.{}^3I}{(2n'-3n)^2 - nn}$$
$$- \frac{n}{2n'-3n} .({}^1D - {}^1C) + \frac{n}{n'-n}.\tfrac{1}{4}.{}^1C$$

&c.

$$N = \frac{2nn.{}^2L}{(2n'-n)^2 - nn} + \frac{n}{2n'-n}.(E + C - \frac{2}{ii})$$
$${}^1N = C - E$$
$${}^2N = \frac{2nn.{}^3L}{(3n'-2n)^2 - nn} + \frac{n}{3n'-2n}.({}^1E + {}^1C)$$
$${}^3N = \frac{2nn.{}^4L}{(n'-2n)^2 - nn} + \frac{n}{n'-2n}.({}^1E - {}^1C)$$

&c.

on aura

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \tfrac{2}{3} nFe.\text{cof.}(nt + \theta) + 2ne.(F + G).nt.\text{fin.}(nt + \theta)$$
$$- {}^{2}Le'nnt.\text{fin.}(nt - B + \theta') + \frac{4n^{3}.{}'.H}{(n')^{2} - n^{2}}\,\text{cof.}(n't + \theta')$$
$$+ en.\,M.\text{cof.}(\;n't + B + \theta)$$
$$+ en.{}^{1}M.\text{cof.}(\;n't - 2nt + B - \theta)$$
$$+ en.{}^{2}M.\text{cof.}(2n't - nt + 2B + \theta)$$
$$+ en.{}^{3}M.\text{cof.}(2n't - 3nt + 2B - \theta)$$
$$+ \&c.$$
$$+ e'n.\,N.\text{cof.}(2n't - nt + B + \theta')$$
$$+ e'n.{}^{1}N.\text{cof.}(\;n't + \theta' - B)$$
$$+ e'n.{}^{2}N.\text{cof.}(3n't - 2nt + 2B + \theta')$$
$$+ e'n.{}^{3}N.\text{cof.}(\;n't - 2nt + 2B - \theta')$$
$$+ \&c.$$

Enfin, ſi dans l'équation (18) de l'*article XI*, on ſubſtitue, au lieu de δs, $\alpha \zeta \delta \mu'$, que l'on néglige les quantités de l'ordre α^{2}, & que l'on faſſe pour abréger,

$${}^{1}P = -\frac{n.(n' + n)}{(n' - n)^{2} - nn}.\left[{}^{1}F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n' - n}.\left(C - \frac{1}{ii}\right)\right]$$
$$- \frac{n}{n' - n}.\left(C - \frac{1}{ii}\right) + \frac{i}{4}.\left[2(b) + (b_{2}) - \frac{2}{i^{3}}\right];$$
$${}^{2}P = \frac{n.(3n - n')}{(n' - n)^{2} - nn}.\left[{}^{1}F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n' - n}.\left(C - \frac{1}{ii}\right)\right]$$
$$+ \frac{n}{n' - n}.\left(C - \frac{1}{ii}\right) - \frac{i}{4}.\left[2(b) + (b_{2}) - \frac{2}{i^{3}}\right];$$
$${}^{3}P = -\frac{2nn'}{(2n' - 2n)^{2} - nn}.\left[\tfrac{1}{2}.{}^{1}F + \frac{2n}{n' - n}.\tfrac{1}{4}.{}^{1}C\right]$$
$$- \frac{n}{n' - n}.\tfrac{1}{4}.{}^{1}C + \frac{i}{4}\left[(b_{1}) + (b_{3})\right];$$
$${}^{4}P = \frac{n(4n - 2n')}{(2n' - 2n)^{2} - nn}.\left[\tfrac{1}{2}.{}^{2}F + \frac{2n}{n' - n}.\tfrac{1}{4}.{}^{1}C\right]$$
$$+ \frac{n}{n' - n}.\tfrac{1}{4}.{}^{1}C - \frac{i}{4}\left[(b_{1}) + (b_{3})\right],$$

&c.

On trouvera, cela posé,

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + n^2 z &+ nn\gamma . {}^1P . \text{fin.}(\,n't + B + \varpi) \\
&+ nn\gamma . {}^2P . \text{fin.}(\,n't - 2nt + B - \varpi) \\
&+ nn\gamma . {}^3P . \text{fin.}(2n't - nt + 2B + \varpi) \\
&+ nn\gamma . {}^4P . \text{fin.}(2n't - 3nt + 2B - \varpi) \\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{nn\gamma^2 . i}{2} . (b_1) . \text{fin.}(nt + \varpi) \\
&+ \tfrac{1}{2} nn\gamma^2 . i . \left[\frac{2}{i^3} - 2\,(b)\right] . \text{fin.}(n't + \varpi) \\
&- \frac{nni\gamma^2}{2} . (b_1) . \text{fin.}(\,nt - B + \varpi') \\
&- \frac{nn\gamma^2 . i}{2} . (b_1) . \text{fin.}(2n't - nt + B + \varpi') \\
&- \frac{nni\gamma^2 (b_2)}{2} . [\text{fin.}(3n't - 2nt + 2B + \varpi') \\
&\qquad\qquad - \text{fin.}(n't - 2nt + 2B - \varpi')] \\
&- \frac{nni . \gamma^2 (b_3)}{2} . [\text{fin.}(4n't - 3nt + 2B + \varpi') \\
&\qquad\qquad - \text{fin.}(2n't - 3nt + 3B - \varpi')] \\
&- \&c.
\end{aligned}
$$

d'où en intégrant, on aura

$$
\begin{aligned}
z = &\frac{\gamma i . (b_1)}{4} . nt . \text{cof.}(nt + \varpi) \\
&- \frac{i\gamma^2}{4} (b_1) . nt . \text{cof.}(nt - B + \varpi') \\
&+ \frac{nn}{(n')^2 - n^2} . \gamma . {}^1P . \text{fin.}(n't + B + \varpi) \\
&+ \frac{nn}{(n' - 2n)^2 - nn} . \gamma . {}^2P . \text{fin.}(n't - 2nt + B - \varpi) \\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

XVII.

Ayant ainsi les valeurs de δr, $\frac{\partial . \delta\varphi}{\partial t}$, & δs, aux quantités près de l'ordre α^2, il nous reste à déterminer les

termes de l'ordre α^2, & proportionnels à t, dans les expreſſions de $\frac{\partial \delta \varphi}{\partial t}$, & δr, parce que de-là dépend, comme nous l'avons déjà obſervé, l'équation ſéculaire du moyen mouvement de la Planète; or, ſi dans l'équation (17) de l'*art. XI*, on ſubſtitue au lieu de δr, $a \delta \mu^{\text{I}} . (y + \alpha y^{\text{I}} + \alpha^2 . \lambda n t)$, au lieu de δs, ſa valeur trouvée dans l'article précédent, & que l'on ne conſerve que les termes de l'ordre α^2, proportionnels à t; il eſt clair d'abord que les termes ſans α, & ceux de l'ordre α diſparoîtront d'eux-mêmes en vertu des valeurs précédentes de y, & de y^{I}; de plus, on trouvera par un calcul fort ſimple,

$$\begin{aligned}\lambda = &\ e e^{\text{I}} . \text{ſin.}\, V . [2 K - \tfrac{3}{2} . {}^2 L] \\ &+ \gamma \gamma^{\text{I}} . \text{ſin.}\, U . [2 L - \tfrac{3}{8} . i . (b_1)];\end{aligned}$$

enſuite l'équation (16) de l'*art. XI*, donne en y ſubſtituant au lieu de $\delta \varphi$, $\delta \mu^{\text{I}} . (x + \alpha x^{\text{I}} + \alpha^2 \text{ϐ} . n n t t)$, & ne conſervant parmi les termes de l'ordre α^2, que ceux qui ſont proportionnels à t,

$$\begin{aligned}\text{ϐ} = &\ e e^{\text{I}} . \text{ſin.}\, V . [\tfrac{3}{4} . {}^2 L - \tfrac{3}{2} K] \\ &+ \gamma \gamma^{\text{I}} . \text{ſin.}\, U . [\tfrac{3}{8} . i (b_1) - \tfrac{3}{2} . L];\end{aligned}$$

il eſt viſible que le terme $\alpha^2 \delta \mu^{\text{I}} . \text{ϐ} n n t t$, donne l'équation ſéculaire du moyen mouvement de la Planète, & comme cette inégalité eſt la plus eſſentielle à déterminer, il ne ſera pas inutile de chercher à la mettre ſous la forme la plus ſimple dont elle eſt ſuſceptible.

Pour cela, j'obſerve que l'on a par l'*art. XIV*,

$$L = \frac{3 i i}{4(1 + i i)} . [(b) - \tfrac{1}{2}(b_2)] + \frac{i^3}{(1 + i i)^2} . [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \tfrac{1}{2} . (\frac{\partial b_2}{\partial q})];$$

or, ſi l'on ſubſtitue au lieu de (b_2), $(\frac{\partial b}{\partial q})$, $(\frac{\partial b_2}{\partial q})$, leurs valeurs en (b) & (b_1), trouvées dans l'*art. XIII*, on aura $L = \frac{1}{4} i . (b_1)$; partant $\frac{3}{8} i . (b_1) - \frac{3}{2} . L = 0$; ce qui réduit déjà l'expreſſion de ϐ à celle-ci,

$$\text{ϐ} = e e^{\text{I}} . \text{ſin.}\, V . (\tfrac{3}{4} . {}^2 L - \tfrac{3}{2} . K);$$

de plus on a

$${}^2 L = 2 C - 2 E + {}^3 H - {}^1 F;$$

& en ſubſtituant, au lieu de C, E. $'H$, & $'F$, leurs valeurs en (b) & $(b_{,})$, que l'on tirera facilement des *articles XIII & XIV*, on trouvera

$$^{2}L = 3i(b) - (b_{,}) \cdot (1 + ii);$$

on trouvera de la même manière,

$$K = \tfrac{3}{2}i(b) - \tfrac{1}{2}(b_{,})\ (1 + ii);$$

d'où l'on tire $\mathfrak{C} = 0$, c'eſt-à-dire, que l'équation ſéculaire du moyen mouvement de la Planète eſt nulle, au moins en ne pouſſant l'approximation que juſqu'aux quantités de l'ordre $\alpha^{2}\delta\mu^{1}$. Nous verrons ci-après, qu'elle ſeroit encore nulle, en ayant égard aux termes de l'ordre $\alpha^{3}\delta\mu^{1}$; & comme les quantités des ordres $\alpha^{2}\delta\mu^{1}$ & $\alpha^{3}\delta\mu^{1}$ ſont déjà exceſſivement petites, on peut en conclure que *l'action réciproque des Planètes, les unes ſur les autres, n'a pu ſenſiblement altérer leurs moyens mouvemens, depuis le temps au moins, auquel on a commencé à cultiver l'Aſtronomie, juſqu'à nos jours*; réſultat analogue à celui que j'ai trouvé par une autre méthode dans *les Savans étrangers, année 1773, page 218.*

XVIII.

Reprenons maintenant les valeurs de δr & de δs; en y ajoutant les valeurs de r & de s, trouvées ci-deſſus dans la ſuppoſition de $\delta\mu^{1} = 0$, on aura

$$r = a \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\alpha^{2}e^{2}}{2} - \frac{\alpha^{2}\gamma^{2}}{4} + \alpha e \cdot \text{coſ.}\,(nt + \theta) \\ - \alpha e \cdot (F + G) \cdot \delta\mu^{1} \cdot ent \cdot \text{ſin.}\,(nt + \theta) \\ + \alpha^{2}\delta\mu^{1} \cdot \lambda nt \\ + \frac{\alpha \cdot {}^{2}L}{2} \cdot ent \cdot \delta\mu^{1} \cdot \text{ſin.}\,(nt - B + \theta^{1}) + Y; \end{array} \right.$$

&

$$\begin{array}{l} s = \alpha\gamma \cdot \text{ſin.}\,(nt + \varpi) \\ \qquad + \frac{\alpha\gamma \cdot (b_{,})i}{4} \cdot \delta\mu^{1} \cdot nt \cdot \text{coſ.}\,(nt + \varpi) \\ \qquad - \frac{\alpha\gamma^{1}(b_{,})i}{4} \cdot \delta\mu^{1} \cdot nt \cdot \text{coſ.}\,(nt - B + \varpi^{1}) + Z; \end{array}$$

Y & Z,

Y & Z, étant des quantités périodiques qui ne renferment point d'arcs de cercle : or on a,

$$\text{fin.}\,(nt - B + \theta') = \text{fin.}\,(nt + \theta + \theta' - \theta - B)$$
$$= \text{fin.}\,(nt + \theta - V) = \text{cof.}\,V.\,\text{fin.}\,(nt + \theta)$$
$$- \text{fin.}\,V.\,\text{cof.}\,(nt + \theta),$$

parce que $V = B - \theta' + \theta$ (*art. XIV*); de plus, on trouvera facilement $F + G = -\frac{1}{4}i.(b_1)$; on pourra donc ainsi mettre l'expression de r sous cette forme,

$$r = a. \left\{ \begin{array}{l} 1 + \alpha.\{e + \frac{1}{2}e'.nt.\delta\mu'.\text{fin.}\,V.[(b_1)(1+ii) - 3i(b)]\} \times \\ \text{cof.}\left\{\theta + nt.\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{i}{4}(b_1)\delta\mu' \\ + \frac{1}{2}.\frac{e'}{e}.\text{cof.}\,V.\delta\mu'.[(b_1)(1+ii) - 3i(b)] \end{array}\right\}\right\} \\ + \frac{\alpha^2.e^2}{2} - \frac{\alpha^2.\gamma^2}{4} - \alpha^2.\delta\mu'.nt.ee'.\text{fin.}\,V.[\frac{1}{2}.i(b) - \frac{1}{4}.(b_1).(1+ii)] \\ + \alpha^2.\delta\mu'.nt.\gamma\gamma'.\text{fin.}\,U.\frac{1}{8}.i(b_1) \qquad + Y \end{array} \right\} (F);$$

on aura pareillement en considérant que

$$B - \varpi' + \varpi = U \;(\textit{art. XIV}),$$

$$s = \alpha.[\gamma - \frac{\gamma'}{4}.i.(b_1)\delta\mu'.nt.\text{fin.}\,U] \times$$
$$\text{fin.}[\varpi + nt(1 + \frac{i(b_1)}{4}\delta\mu' - \frac{\gamma'}{\gamma}i.(\frac{b_1}{4})\delta\mu'.\text{cof.}\,U)] + Z.$$

En confidérant les maffes des Planètes, comme étant extrêmement petites par rapport à celle du Soleil, il eft vifible que chacune d'elles décriroit très-fenfiblement une orbite elliptique à chaque révolution, & qu'ainfi leur action réciproque ne pourroit être fenfible, qu'autant qu'elle altéreroit à la longue les élémens de ces ellipfes, c'eft-à-dire, la moyenne diftance de la Planète au Soleil, la pofition de fon aphélie & de fes nœuds, fon excentricité & fon inclinaifon ; or il eft vifible que l'augmentation de l'excentricité après le temps t, fera

$$\tfrac{1}{2}.\alpha e'.nt.\delta\mu'.\text{fin.}\,V.[(b_1)(1 + ii) - 3i(b)],$$

de ſorte qu'après le nombre c de révolutions, l'augmentation de l'équation du centre qui pour les Planètes eſt à très-peu près le double de l'excentricité, ſera

$$\alpha e' . c . 360^d . \delta\mu' . \text{ſin.} V . [(b_1)(1 + ii) - 3i . (b)];$$

il eſt aiſé de voir pareillement que le mouvement direct de l'aphélie ſera

$$c . 360^d . \delta\mu' . \left\{ \frac{i}{4} . (b_1) - \frac{1}{2} . \frac{\alpha e'}{\alpha e} . \text{coſ.} V . [(b_1)(1 + ii) - 3i . (b)] \right\}$$

que la diminution de l'inclinaiſon de l'orbite ſera

$$\frac{\alpha . \gamma' i (b_1) \delta\mu'}{4} . c . 360^d . \text{ſin.} U,$$

& que le mouvement rétrograde des nœuds ſera

$$c . 360^d . \delta\mu' . \left[\frac{i(b_1)}{4} - \frac{\alpha\gamma'}{\alpha\gamma} i . \left(\frac{b_1}{4}\right) . \text{coſ.} U\right].$$

Pour ce qui regarde la variation du grand axe, on peut déja conclure qu'elle eſt nulle, de ce que le moyen mouvement de la Planète reſte conſtamment le même ; car nous avons démontré précédemment que les quarrés des temps des révolutions périodiques ſont comme les cubes des grands axes ; par conſéquent ſi, après pluſieurs ſiècles, les grands axes des orbites devenoient plus ou moins grands, les révolutions deviendroient moins ou plus rapides. Il ſuit de-là que les termes proportionnels au temps qui ſe rencontrent dans l'expreſſion (F) de r, ne ſont dûs qu'aux variations des quantités $\frac{\alpha^2 . e^2}{2}$ & $-\frac{\alpha^2 . \gamma^2}{4}$, qui ſe trouvent dans la valeur de r, lorſqu'on ſuppoſe $\delta\mu' = 0$; c'eſt en effet ce que le calcul confirme ; car la variation de $\frac{\alpha^2 . e^2}{2}$, eſt égale à celle de αe, multipliée par αe, c'eſt-à-dire, égale à

$$- \alpha^2 e e' . nt\delta\mu' . \text{ſin.} V . [\tfrac{3}{2} . i(b) - \tfrac{1}{2}(b_1)(1 + ii)];$$

pareillement la variation de $-\frac{\alpha^2 . \gamma^2}{4}$, eſt

$$+ \tfrac{1}{8} . \alpha^2 \gamma\gamma' . i (b_1) . \delta\mu' . nt . \text{ſin.} U;$$

or, ce ſont-là les termes proportionnels au temps qui ſe

rencontrent dans l'expreſſion de r; donc la quantité a, qui exprime la moyenne diſtance de la Planète au Soleil dans l'orbite réelle, reſte toujours conſtante.

XIX.

Les *articles précédens* donnent les valeurs de r, s, & $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, aux quantités près de l'ordre α^2; & de la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, on peut très-facilement conclure celle de φ; mais ces expreſſions renferment des arcs de cercle, & ne peuvent ſervir conſéquemment que pour un temps limité; il eſt donc eſſentiel de les faire diſparoître, toutes les fois que cela eſt poſſible, & c'eſt ce qu'on peut faire d'une manière extrêmement ſimple, par la méthode expoſée au commencement de ce Mémoire; mais avant que de donner ce calcul, il ne ſera pas inutile de faire quelques remarques ſur le degré de préciſion des approximations précédentes.

J'obſerve d'abord que ſi l'on vouloit obtenir de nouveaux termes proportionnels aux temps, dans les expreſſions de r & de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, il faudroit pouſſer l'approximation juſqu'aux quantités de l'ordre $\alpha^4 \delta \mu^1$; les Géomètres qui auront ſuivi l'analyſe précédente, s'en aſſureront très-aiſément à l'inſpection des équations (16), (17) & (18) de l'*article XI.* De plus, comme Jupiter & Saturne ont des maſſes aſſez conſidérables, pour qu'on puiſſe regarder, par rapport à elles, $\delta \mu^1$ comme de l'ordre α^2, il eſt indiſpenſable alors d'avoir égard aux termes de l'ordre $\delta (\mu^1)^2$; or, en conſidérant les équations (10), (11) & (12) de l'*article X*, on verra facilement que les termes de l'ordre $\delta (\mu^1)^2$, ne peuvent produire aucun terme proportionnel au temps dans la valeur de r, ni dans celle de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, & qu'il faut pour cela porter l'approximation juſqu'aux quantités de l'ordre $\alpha^2 \delta (\mu^1)^2$; d'où il ſuit que généralement, l'équation ſéculaire du moyen mouvement

des Planètes est nulle, au moins aux quantités près de l'ordre $\alpha^4 \delta \mu^1$.

J'observe ensuite que parmi les termes de l'ordre α^2, il ne s'en trouve aucun dans les expressions de r & de s, de la forme $\alpha^2 . K . t . \text{cos.} (nt + q)$, & qu'ainsi les variations trouvées dans l'*article précédent*, pour l'inclinaison & l'excentricité de l'orbite, sont exactes, aux quantités près de l'ordre α^3, & que celles du mouvement des nœuds & des aphélies, le sont aux quantités près de l'ordre α^2, par où l'on voit qu'elles sont fort approchées.

Considérons maintenant un argument tel que

$$\text{cos. } q (n^1 . t - nt + B),$$

q étant un nombre entier quelconque, on verra aisément qu'il faut porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^2, pour en retrouver un pareil; & si l'on considère un argument tel que $\alpha e . \text{cos.} (n^1 . t - 2nt + B - \theta)$, on verra qu'il faut, pour retrouver son pareil, porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^3; de-là, on peut conclure généralement que le même argument ne peut être reproduit que par les quantités des ordres α^2, α^4, α^6, &c. S'il se trouve, pour la première fois, parmi les termes des ordres α^0, α^2, α^4, &c. ou par les quantités des ordres α^3, α^5, α^7, &c. s'il se trouve, pour la première fois, parmi les termes des ordres α, α^3, α^5, &c.

X X.

Je reprends maintenant les équations de l'*article XVIII.*

$$r = a . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\alpha^2 . e^2}{2} - \frac{\alpha^2 . \gamma^2}{4} + \alpha^2 . \delta \mu^1 . \lambda . nt \\ + \alpha e . \text{cos.} (nt + \theta) - \alpha e . (F + G) \delta \mu^1 \times \\ \quad e n t . \text{sin.} (nt + \theta) + \frac{\alpha e^1 . {}^2 L}{2} . nt . \delta \mu^1 \times \\ \quad \text{sin.} (nt - B + \theta^1) + Y. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} s = {} & \alpha \gamma . \text{sin.} (nt + \varpi) \\ & + \frac{\alpha \gamma . i (b_1)}{4} . \delta \mu^1 . nt . \text{cos.} (nt + \varpi) \\ & - \frac{\alpha \gamma^1 . i (b_1)}{4} . \delta \mu^1 . nt . \text{cos.} (nt - B + \varpi^1) + Z; \end{aligned}$$

& j'observe que l'on a pour $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, une équation de cette forme,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = n - 2\alpha e n \,.\, \text{cos.}\,(nt + \theta)$$
$$+ 2\alpha e n \,.\, (F + G) \,.\, nt \,.\, \text{sin.}\,(nt + \theta)$$
$$- {}^{2}L \,.\, \alpha e' \,.\, nnt \,.\, \text{sin.}\,(nt - B + \theta') + X:$$

X, Y & Z, étant des quantités périodiques, ou qui ne renferment point d'arcs de cercle; or si l'on nomme ε, la distance réelle de la Planète P, à son aphélie; B_1, B_1', &c. les angles compris à l'origine du mouvement entre les projections des Planètes P, P', &c. & la ligne fixe d'où l'on commence à compter les longitudes; on aura, en négligeant les quantités de l'ordre α^2, $B_1 = A + \varepsilon$; de plus, on a par l'*art. XIII*, $\theta = \varepsilon + 2\alpha e \,.\, \text{sin.}\, \varepsilon$; donc,

$$\theta = B_1 - A + 2\alpha e \,.\, \text{sin.}\,(B_1 - A):$$

or on a (*art. XIV*), $B = A' - A + \theta' - \theta$; donc,

$$B = B_1' - B_1 + 2\alpha e' \,.\, \text{sin.}\,(B_1' - A') - 2\alpha e \,.\, \text{sin.}\,(B_1 - A):$$

on aura ainsi,

$$\text{cos.}\, q\,(n't - nt + B) = \text{cos.}\, q\,(n't - nt + B_1' - B_1)$$
$$+ \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha e q \,.\, \text{sin.}\,(B_1 - A) \\ - 2\alpha e' q \,.\, \text{sin.}\,(B_1' - A') \end{array} \right\} .\, \text{sin.}\,(n't - nt + B_1' - B_1);$$

on a de plus, en négligeant les quantités de l'ordre α,

$$\text{cos.}\,(nt + \theta) = \text{cos.}\,(nt + B_1 - A) = \text{cos.}\, A \,.\, \text{cos.}\,(nt + B_1)$$
$$+ \text{sin.}\, A \,.\, \text{sin.}\,(nt + B_1)$$
$$\text{sin.}\,(nt + \theta) = \text{sin.}\,(nt + B_1 - A) = \text{cos.}\, A \,.\, \text{sin.}\,(nt + B_1)$$
$$- \text{sin.}\, A \,.\, \text{cos.}\,(nt + B_1)$$
$$\text{sin.}\,(nt - B + \theta') = \text{sin.}\,(nt + B_1 - A') = \text{cos.}\, A' \,.\, \text{sin.}\,(nt + B_1)$$
$$- \text{sin.}\, A' \,.\, \text{cos.}\,(nt + B_1)$$
$$\text{sin.}\, V = \text{sin.}\,(A' - A) = \text{sin.}\, A' \,.\, \text{cos.}\, A - \text{sin.}\, A \,.\, \text{cos.}\, A'.$$

Nommons enſuite C_1, C'_1, &c. les diſtances des nœuds de P, P', &c. à la ligne fixe, à l'origine du mouvement, & nous aurons, en négligeant les quantités de l'ordre α,

$$B_1 - \varpi = C_1,$$

&

$$\text{ſin.}(nt + \varpi) = \text{ſin.}(nt + B_1 - C_1) = \text{coſ.}\, C_1 . \text{ſin.}(nt + B_1) - \text{ſin.}\, C_1 . \text{coſ.}(nt + B_1)$$

$$\text{coſ.}(nt + \varpi) = \text{coſ.}(nt + B_1 - C_1) = \text{coſ.}\, C_1 . \text{coſ.}(nt + B_1) + \text{ſin.}\, C_1 . \text{ſin.}(nt + B_1)$$

$$\text{coſ.}(nt - B + \varpi') = \text{coſ.}(nt + B_1 - C'_1) = \text{coſ.}\, C'_1 . \text{coſ.}(nt + B_1) + \text{ſin.}\, C'_1 . \text{ſin.}(nt + B_1)$$

$$\text{ſin.}\, U = (\text{art. } XIV),\ \text{ſin.}(A' - A + \theta' - \theta - \varpi' + \varpi)$$
$$= \text{ſin.}(B'_1 - \varpi' - B_1 + \varpi) = \text{ſin.}(C'_1 - C_1)$$
$$= \text{ſin.}\, C'_1 . \text{coſ.}\, C_1 - \text{ſin.}\, C_1 . C'_1 ;$$

cela poſé, on verra facilement que les expreſſions précédentes de r, s, & $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, peuvent être miſes ſous cette forme,

$$r = a. \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{4} + \text{coſ.}(nt + B_1) . \left\{ \begin{array}{l} \alpha e . \text{coſ.} A + \alpha e . \text{ſin.} A (F + G) . \delta\mu' . nt \\ - \alpha e' . \text{ſin.} A' . \frac{{}^2L}{2} . nt . \delta\mu' \end{array} \right\} \\ \qquad + \text{ſin.}(nt + B_1) . \left\{ \begin{array}{l} \alpha e . \text{ſin.} A - \alpha e . \text{coſ.} A . (F + G) . \delta\mu' . nt \\ - \alpha e' . \text{coſ.} A' . \frac{{}^2L}{2} . \delta\mu' . nt \end{array} \right\} \\ - \alpha^2 . \delta\mu' . nt . e e' . [\text{ſin.} A' . \text{coſ.} A - \text{ſin.} A . \text{coſ.} A'] . [\tfrac{3}{2} i (b_1) - \tfrac{1}{2} . (b) (1 + ii)] \\ + \alpha^2 . \delta\mu' . nt . \gamma\gamma' . \tfrac{1}{8} i . (b_1) [\text{ſin.} C'_1 . \text{coſ.} C_1 - \text{ſin.} C_1 . \text{coſ.} C'_1] \\ + \&c. \\ \quad + Q + \alpha e . \text{ſin.} A . \delta\mu' . R + \alpha e . \text{coſ.} A . \delta\mu' . {}^1R \\ \quad + \alpha e' . \text{ſin.} A' . \delta\mu' . {}^2R + \alpha e' . \text{coſ.} A' . \delta\mu' . {}^3R \end{array} \right.$$

$$s = \text{ſin.}(nt + B_1) . [\alpha\gamma . \text{coſ.}\, C_1 + \alpha\gamma . \text{ſin.}\, C_1 . \frac{i.(b_1)\delta\mu'}{4} . nt - \alpha\gamma' . \text{ſin.}\, C'_1 . \frac{i.(b_1)\delta\mu'}{4} . nt]$$
$$- \text{coſ.}(nt + B_1) . [\alpha\gamma . \text{ſin.}\, C_1 - \alpha\gamma . \text{coſ.}\, C_1 . \frac{i.(b_1)\delta\mu'}{4} . nt + \alpha\gamma' . \text{coſ.}\, C'_1 . \frac{i.(b_1)\delta\mu'}{4} . nt]$$

$$+ \alpha\gamma \,.\, \text{fin.}\; C_{,} \,.\, {}^{1}S + \alpha\gamma \,.\, \text{cof.}\; C_{,} \,.\, {}^{2}S$$
$$+ \alpha\gamma' \,.\, \text{fin.}\; C'_{,} \,.\, {}^{3}S + \alpha\gamma' \,.\, \text{cof.}\; C'_{,} \,.\, {}^{4}S$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = n - 2n \,.\, \text{cof.}(nt + B_{,}) \,.\, [\alpha e \,.\, \text{cof.} A + \alpha e \,.\, \text{fin.} A \,.\, (F+G) .\, \delta\mu' .\, nt$$
$$- \alpha e' \,.\, \text{fin.}\; A' \,.\, \frac{{}^{2}L}{2} .\, \delta\mu' .\, nt]$$
$$- 2n \,.\, \text{fin.}(nt + B_{,}) \,.\, [\alpha e \,.\, \text{fin.} A - \alpha e \,.\, \text{cof.} A \,.\, (F+G) .\, \delta\mu' .\, nt$$
$$+ \alpha e' \,.\, \text{cof.}\; A' \,.\, \frac{{}^{2}L}{2} .\, \delta\mu' .\, nt]$$
$$+ {}^{1}X + \alpha e \,.\, \text{fin.} A \,.\, {}^{2}X + \alpha e \,.\, \text{cof.} A \,.\, {}^{3}X$$
$$+ \alpha e' \,.\, \text{fin.} A' \,.\, {}^{4}X + \alpha e' \,.\, \text{cof.} A' \,.\, {}^{5}X$$

$Q, R, {}^{1}R$, &c. ${}^{1}S, {}^{2}S$, &c. ${}^{1}X, {}^{2}X$, &c. étant des quantités périodiques qui ne renferment point les conſtantes e, e', &c. A, A', &c. $C_{,}, C'_{,}$, &c. on peut obſerver que A, A', &c. peuvent être ici conſidérées comme exprimant les diſtances des projections des aphélies de P, P', &c. à la ligne fixe, & $C_{,}, C'_{,}$, &c. comme exprimant les diſtances de leurs nœuds à la même ligne.

Préſentement, ſi l'on nomme u le moyen mouvement durant le temps t d'une Planète qui circuleroit autour du Soleil, à une diſtance que je prends pour l'unité, & que l'on faſſe

$$\tfrac{3}{4} \,.\, i \,.\, (b_{,})\, \delta\mu' .\, nt = (0,1) \,.\, u;$$

$$\tfrac{3}{2} \,.\, [(b_{,})(1+ii) - 3i \,.\, (b)]\, \delta\mu' \,.\, nt = (\overline{0,1}) \,.\, u;$$

que l'on repréſente par $(0,2) \,.\, u$, $(\overline{0,2}) \,.\, u$; $(0,3) \,.\, u$, $(\overline{0,3}) \,.\, u$; &c. les mêmes quantités relativement aux Planètes P'', P''', &c. ſoit de plus,

$$\alpha e \,.\, \text{fin.} A = p; \quad \alpha e \,.\, \text{cof.} A = q;$$
$$\alpha e' \,.\, \text{fin.} A' = p'; \quad \alpha e' \,.\, \text{cof.} A' = q';$$
&c. &c.

$$\alpha\gamma \,.\, \text{fin.} C_{,} = h; \quad \alpha\gamma \,.\, \text{cof.} C_{,} = l;$$
$$\alpha\gamma' \,.\, \text{fin.} C'_{,} = h'; \quad \alpha\gamma \,.\, \text{cof.} C'_{,} = l';$$
&c. &c.

on aura $\alpha^2 e^2 = p^2 + q^2$, $\alpha^2 \gamma^2 = h^2 + l^2$, & les trois équations précédentes deviendront,

$$r = a . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{1}{4}.(h^2 + l^2) \\ + \text{fin.}(nt + B_{,})\, [p + (0,1).qu - (\overline{0,1}).q'u] \\ + \text{cof.}(nt + B_{,})\, [q - (0,1).pu + (\overline{0,1}).p'u] \\ + (\overline{0,1}).u.[p'q - pq'] + \frac{1}{2}(0,1)u.[h'l - hl'] \\ \qquad + Q + p.\delta\mu'.R + q.\delta\mu'.{}^{1}R \\ \qquad + p'.\delta\mu'.{}^{2}R + q'.\delta\mu'.{}^{3}R; \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rl} s = & \text{fin.}(nt + B_{,}).[l + (0,1).hu - (0,1).h'u] \\ & \qquad + h.\delta\mu'.{}^{1}S + l.\delta\mu'.{}^{2}S \\ & - \text{cof.}(nt + B_{,}).[h - (0,1).lu + (0,1).l'u] \\ & \qquad + h'.\delta\mu'.{}^{3}S + l'.\delta\mu.{}^{4}S; \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = & n - 2n.\text{fin.}(nt + B_{,}).[p + (0,1).qu - (\overline{0,1}).q'u] \\ & \qquad + {}^{1}X + p.\delta\mu'.{}^{2}X + q.\delta\mu'.{}^{3}X \\ & - 2n.\text{cof.}(nt + B_{,}).[q - (0,1).pu + (\overline{0,1}).p'u] \\ & \qquad + p'.\delta\mu'.{}^{4}X + q'.\delta\mu'.{}^{5}X; \end{array}$$

Pour faire disparoître les arcs de cercle de l'expression de r, je fais, en suivant l'esprit de la méthode exposée au commencement de ce Mémoire,

$$\text{I.} \quad \frac{\partial p}{\partial u} = (0,1).q - (\overline{0,1}).q'$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial q}{\partial u} = -(0,1).p + (\overline{0,1}).p'$$

$$\text{III.} \quad \frac{\partial a}{\partial u} + a.\left[p.\frac{\partial p}{\partial u} + q.\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{1}{2}h.\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{1}{2}l.\frac{\partial l}{\partial u}\right] = a.\left\{ \begin{array}{l} (\overline{0,1}).(p'q - q'p) \\ + \frac{1}{2}(0,1).(h'l - hl') \end{array} \right\};$$

ensuite, pour faire disparoître les arcs de cercle de la valeur de s, je fais

IV.

IV. $\frac{\partial l}{\partial u} = (0,1)\,h - \overline{(0,1)}\,h'$

V. $\frac{\partial h}{\partial u} = (0,1)\,l' - \overline{(0,1)}\,l;$

enfin, pour faire diſparoître les arcs-de-cercle de la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, je fais

$$\frac{\partial p}{\partial u} = (0,1)\,q - \overline{(0,1)}\,q'$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} = -(0,1)\,p + \overline{(0,1)}\,p',$$

équations qui rentrent dans les deux premières.

L'équation III donne, en y ſubſtituant au lieu de $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial q}{\partial u}$, $\frac{\partial h}{\partial u}$, $\frac{\partial l}{\partial u}$, leurs valeurs tirées des équations I, II, IV & V, $\frac{\partial a}{\partial u} = 0$, ce qui indique que la variation de la moyenne diſtance eſt nulle, comme nous l'avons déjà obſervé; on aura donc les quatre équations

$$\frac{\partial p}{\partial u} = q.[(0,1) + (0,2) + (0,3) + \&c.] - \overline{(0,1)}.q' - \overline{(0,2)}.q'' - \overline{(0,3)}q''' - \&c.$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} = -p.[(0,1) + (0,2) + (0,3) + \&c.] + \overline{(0,1)}.p' + \overline{(0,2)}.p'' + \overline{(0,3)}.p''' + \&c.$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = -l.[(0,1) + (0,2) + \&c.] + (0,1).l' + (0,2).l'' + \&c.$$

$$\frac{\partial l}{\partial u} = h.[(0,1) + (0,2) + \&c.] - (0,1).h' - (0,2).h'' - \&c.$$

Maintenant ſi l'on regarde ſucceſſivement les Planètes P', P'', &c. comme troublées par l'action des autres, & que l'on nomme $(1,0)$, $\overline{(1,0)}$, $(1,2)$, $\overline{(1,2)}$, &c. pour P'; $(2,0)$, $\overline{(2,0)}$,

$(2,1)$, $\overline{(2,1)}$, &c. pour P'', &c. des quantités analogues à celles que nous avons nommées, $(0,1)$, $\overline{(0,1)}$, $(0,2)$, $\overline{(0,2)}$, &c. pour P, on aura les équations

$$\frac{\partial p'}{\partial u} = q' \cdot [(1,0) + (1,2) + \&c.] - \overline{(1,0)} \cdot q - (1,2) \cdot q'' - \&c.$$

$$\frac{\partial q'}{\partial u} = - p' \cdot [(1,0) + (1,2) + \&c.] + (1,0) \cdot p + (1,2) \cdot p'' + \&c.$$

$$\frac{\partial h'}{\partial u} = - l' \cdot [(1,0) + \&c.] + (1,0) \cdot l + \&c.$$

$$\frac{\partial l'}{\partial u} = h' \cdot [(1,0) + \&c.] - \&c.$$

&c.

En intégrant ces équations, on aura les valeurs de p, q, h, l, p', q', &c. & en les substituant dans les expressions de r, s & $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, on effacera les arcs-de-cercle qui se rencontrent dans ces expressions.

Il est visible que les équations précédentes sont renfermées dans celles dont nous avons donné l'intégrale *(art. III)*, en sorte qu'il ne peut y avoir aucune difficulté sur cet objet; mais il ne sera pas inutile de faire la remarque suivante.

Pour intégrer les équations précédentes, on y substituera, suivant la méthode de l'*art. III*, au lieu de p, p', &c.

$$b \cdot \text{fin.}\ (fx + \varpi),\ b' \cdot \text{fin.}\ (fx + \varpi),\ \&c.$$

& au lieu de q, q', &c.

$$b \cdot \text{cof.}\ (fx + \varpi),\ b' \cdot \text{cof.}\ (fx + \varpi),\ \&c.$$

& l'on aura les équations,

$$fb = b \cdot [(0,1) + (0,2) + \&c.] - (0,1)\, b' - (0,2)\, b'' - \&c.$$

$$fb' = b' \cdot [(1,0) + (1,2) + \&c.] - (1,0)\, b - (1,2)\, b'' - \&c.$$

$$fb'' = b'' \cdot [(2,0) + (2,1) + \&c.] - (2,0)\, b - (2,0)\, b' - \&c.$$

&c.

Il suffit ici de considérer les équations relatives à p, p', &c. q, q', &c. puisque les valeurs de h, h', &c. l, l', &c. s'en

déduiſent en changeant dans q, q', &c. p, p', &c. les quantités $\overline{(0,1)}, \overline{(0,2)}$, &c. $\overline{(1,0)}$, &c. en $(0,1), 0,2)$, &c. $(1,0)$, &c.

Les équations précédentes en donnent une en f, du degré n, s'il y a n Planètes ; or ſi cette équation renferme des racines imaginaires, il entre néceſſairement des quantités exponentielles dans les valeurs de p, q, &c. & comme ces quantités peuvent aller croiſſantes à l'infini, la ſolution précédente ne peut avoir lieu que pour un temps limité : il ſeroit donc très-important de s'aſſurer ſi l'équation en f, peut renfermer des racines imaginaires, & en quel nombre elles peuvent y exiſter. Cette diſcuſſion me paroît digne de toute l'attention des Géomètres ; je me contenterai ici d'obſerver que, lorſqu'on ne conſidère que deux Planètes, comme on l'a fait juſqu'à préſent dans la théorie de Jupiter & de Saturne, l'équation en f a toujours deux racines réelles ; car on a alors,

$$fb = (0,1)\ b - \overline{(0,1)} \cdot b'$$

$$fb' = (1,0)\ b' - \overline{(1,0)} \cdot b,$$

d'où l'on tire

$$ff - [(1,0) + (0,1)]f = \overline{(1,0)} \cdot \overline{(0,1)} - (1,0) \cdot (0,1),$$

équation dont il eſt viſible que les deux racines ſont toujours réelles.

XXI.

Détermination des Inégalités ſéculaires du Mouvement des Aphélies & des Excentricités de Jupiter & de Saturne.

Il nous reſteroit préſentement à appliquer la théorie précédente aux différentes Planètes ; mais la longueur déjà trop grande de ce Mémoire m'oblige de renvoyer ces applications à un autre temps ; je me bornerai donc ici à déterminer les inégalités ſéculaires de Jupiter & de Saturne, & parmi ces inégalités, je ne conſidérerai que celles du mouvement des aphélies & des excentricités, M. de la Grange ayant traité

dans le plus grand détail, celles qui ſont relatives au mouvement des nœuds & à l'inclinaiſon de leurs orbites : les maſſes de ces deux corps ſont tellement grandes par rapport à celles des autres Planètes, & leur poſition dans le ſyſtème ſolaire eſt telle qu'on peut, ſans craindre aucune erreur ſenſible, conſidérer à part leur action réciproque.

Je reprends l'équation

$$ff - [(1,0) + (0,1)]f = \overline{(1,0)} . \overline{(0,1)} - (1,0) . (0,1).$$

Pour en avoir les racines, il faut connoître (0,1), (1,0), $\overline{(0,1)}$ & $\overline{(1,0)}$; or ſoit P Jupiter, & P' Saturne; que l'on déſigne par mt le moyen mouvement du Soleil, & que l'on faſſe $u = \frac{1}{1000000} . mt$, on aura (*art. XX*),

$$(0,1) = \frac{1000000}{4} . \frac{a^1}{a} . (b_1)\, \delta\mu' . \frac{n}{m}$$

$$\overline{(0,1)} = \frac{1000000}{2} . [(\frac{a^2 + (a')^2}{a^2}) . (b_1) - \frac{3a'}{a} . (b)] . \delta\mu' . \frac{n}{m}$$

$$(1,0) = \frac{1000000}{4} . \frac{a}{a'} . (b_1')\, \delta\mu . \frac{n'}{m}$$

$$\overline{(1,0)} = \frac{1000000}{2} . [(\frac{a^2 + (a')^2}{(a')^2}) . (b_1') - \frac{3a}{a'} . (b')] . \delta\mu . \frac{n'}{m};$$

(b') & (b_1') étant ce que deviennent (b) & (b_1), lorſqu'on y change a en a', & réciproquement; or on trouvera facilement par l'*art. XIII*,

$$(b') = \frac{(a')^3}{a^3} . (b), \ \& \ (b_1') = \frac{(a')^3}{a^3} . (b_1);$$

donc

$$(1,0) = \frac{a'}{a} . \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} . \frac{n'}{n} . (0,1) = (\frac{n'}{n})^{\frac{1}{3}} . \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} . (0,1),$$

à cauſe de $\frac{a'}{a} = (\frac{n'}{n})^{\frac{2}{3}}$; on aura ſemblablement,

$$\overline{(1,0)} = (\frac{n'}{n})^{\frac{1}{3}} . \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} . \overline{(0,1)};$$

de ſorte qu'ayant une fois (0,1) & $\overline{(0,1)}$, on en conclura facilement (1,0) & $\overline{(1,0)}$.

Suivant les Tables de Halley, le mouvement séculaire de Jupiter est de 109262257 secondes, & celui de Saturne est de 4398126 secondes; d'où l'on tire $\frac{n'}{n} = 0,402528$; partant, $\log. \frac{a'}{a} = \log. (\frac{n}{n'})^{\frac{2}{3}} = 0,263469$; ensuite on a (*Voyez les Savans étrangers, année 1773, page 212*),

$$(b) = 0,35292, \qquad (b_1) = 0,51578;$$

de plus, $\delta\mu' = \frac{1}{3021}$; de-là je conclus,

$$(0,1) = 6,6007,$$
$$\overline{(0,1)} = 4,3129;$$

ensuite, $\delta\mu = \frac{1}{1067}$; partant,

$$(1,0) = 13,7988,$$
$$\overline{(1,0)} = 9,0162;$$

on a donc l'équation

$$ff - 20,3995 . f = - 52,1958,$$

dont les deux racines sont

$$f = 17,3998,$$
$$'f = 2,9998;$$

maintenant, si l'on néglige, comme cela est ici permis, les quantités de l'ordre α^2, & que l'on prenne pour plan fixe, celui de l'écliptique, au commencement de 1750, & pour point fixe d'où l'on commence à compter les longitudes, la position de l'équinoxe du printemps à cette époque, l'angle A exprimera la longitude de la projection de l'aphélie de Jupiter, & l'angle A', celle de la projection de l'aphélie de Saturne ; or on a suivant les Tables de Halley, pour le commencement de 1750,

$$A = 6^{f}\ 10^{d}\ 33'\ 46'',$$
$$\alpha e = 0{,}048218,$$
$$A' = 8^{f}\ 29^{d}\ 39'\ 58'',$$
$$\alpha e' = 0{,}057003.$$

Soient H & H' les valeurs de p & de p'; L & L', celles de q & de q' à cette époque, on aura

$$H = \alpha e \,.\, \text{fin.}\, A = -\ 0{,}008842,$$
$$H' = \alpha e' \,.\, \text{fin.}\, A' = -\ 0{,}057002,$$
$$L = \alpha e \,.\, \text{cof.}\, A = -\ 0{,}047400,$$
$$L' = \alpha e' \,.\, \text{cof.}\, A' = -\ 0{,}000663.$$

Mais on a les quatre équations

$$H = b \,.\text{fin.}\, \varpi + {}'b \,.\text{fin.}\, {}'\varpi,$$
$$H' = b' \,.\text{fin.}\, \varpi + {}'b' \,.\text{fin.}\, {}'\varpi,$$
$$L = b \,.\text{cof.}\, \varpi + {}'b' \,.\text{cof.}\, {}'\varpi,$$
$$L' = b' \,.\text{cof.}\, \varpi + {}'b' \,.\text{cof.}\, {}'\varpi;$$

ensuite on a

$$f.\, b = (0,1)\,.\, b - \overline{(0,1)}\,.\, b',$$
$$'f.\,'b = (0,1)\,.\,'b - \overline{(0,1)}\,.\,'b';$$

donc si l'on fait

$$H_{1} = (0,1)\,.\, H - \overline{(0,1)}\,.\, H',$$
$$L_{1} = (0,1)\,.\, L - \overline{(0,1)}\,.\, L';$$

on aura

$$H_{1} = fb\,.\text{fin.}\, \varpi + {}'f.\,'b\,.\text{fin.}\, {}'\varpi,$$
$$L_{1} = fb\,.\text{cof.}\, \varpi + {}'f.\,'b\,.\text{cof.}\, {}'\varpi;$$

or on trouve

$$H_{1} = 0{,}18748, \qquad L_{1} = -\ 0{,}31001.$$

De-là on formera les quatre équations

$$-\ 0{,}008842 = b\,.\text{fin.}\, \varpi + {}'b\,.\text{fin.}\, {}'\varpi,$$
$$0{,}18748 = 17{,}3998\,.\, b\,.\text{fin.}\, \varpi + 2{,}9998\,.\,'b'\text{fin.}\, {}'\varpi,$$

$- 0{,}047400 = b \cdot \text{cof.}\, \varpi + {}'b \cdot \text{cof.}\, {}'\varpi,$

$- 0{,}31001 = 17{,}3998 \cdot b \cdot \text{cof.}\, \varpi + 2{,}9998 \cdot {}'b' \text{cof.}\, {}'\varpi;$

ce qui donne

$b \cdot \text{fin.}\, \varpi = 0{,}014861, \quad b \cdot \text{cof.}\, \varpi = -0{,}011654,$

${}'b \cdot \text{fin.}\, {}'\varpi = -0{,}023703, \quad {}'b \cdot \text{cof.}\, {}'\varpi = -0{,}035746.$

Des deux valeurs de $b \cdot \text{fin.}\, \varpi$ & de $b \cdot \text{cof.}\, \varpi$, je conclus $\varpi = 128^d\, 6'$ & $b = 0{,}018885$; enfuite des deux valeurs de ${}'b \cdot \text{fin.}\, {}'\varpi$, & de ${}'b \cdot \text{cof.}\, {}'\varpi$, je conclus ${}'\varpi = 33^d\, 33'$, & ${}'b = -0{,}042891$; enfin les équations

$fb = (0,1) \cdot b - \overline{(0,1)} \cdot b'; \quad {}'f \cdot {}'b = (0,1) \cdot {}'b - \overline{(0,1)} \cdot {}'b';$

donnent

$b' = -0{,}047286, \quad {}'b' = -0{,}035808.$

Si l'on nomme préfentement x le nombre entier ou fractionnaire d'années écoulées depuis l'origine du mouvement que je fixe au commencement de 1750; on aura

$$fu = 22'',550 \cdot x, \qquad {}'fu = 3'',888 \cdot x;$$

donc

$$p = 0{,}018885 \cdot \text{fin.}\, [22'',550 \cdot x + 128^d\ 6'] - 0{,}042891 \cdot \text{fin.}\, [3'',888 \cdot x + 33^d\ 33'],$$

$$q = 0{,}018885 \cdot \text{cof.}\, [22'',550 \cdot x + 128^d\ 6'] - 0{,}042891 \cdot \text{cof.}\, [3'',888 \cdot x + 33^d\ 33'],$$

$$p' = -0{,}047286 \cdot \text{fin.}\, [22'',550 \cdot x + 128^d\ 6'] - 0{,}035808 \cdot \text{fin.}\, [3'',888 \cdot x + 33^d\ 33'],$$

$$q' = -0{,}047286 \cdot \text{cof.}\, [22'',550 \cdot x + 128^d\ 6'] - 0{,}035808 \cdot \text{cof.}\, [3'',888 \cdot x + 33^d\ 33'];$$

maintenant on a $\alpha^2 e^2 = p^2 + q^2$ & $\alpha e = \sqrt{(p^2 + q^2)}$; d'où l'on conclura

$$\alpha e = \sqrt{[(0{,}018885)^2 + (0{,}042891)^2 - 2 \cdot (0{,}018885) \times (0{,}042891) \cdot \text{cof.}\, (18'',662 \cdot x + 94^d\ 33')]};$$

on aura pareillement

$$\alpha e' = \sqrt{[(0{,}047286)^2 + (0{,}035808)^2 + 2.(0{,}47286) \times (0{,}035808).\text{cof.}(18'',662.x + 94^d\ 33')]};$$

partant la plus grande excentricité de Jupiter sera

$$= 0{,}018885 + 0{,}042891 = 0{,}061776;$$

& la plus petite sera $= 0{,}024006$; de même la plus grande excentricité de Saturne sera 0,083094, & la plus petite sera 0,011478; la période de cette variation est déterminée par l'équation $18'',662.x = 180^d$, ce qui donne $x = 34723$; partant elle est de 34723 années.

Quant au mouvement des aphélies, on se rappellera que A exprime la longitude de la projection de l'aphélie de Jupiter, & que l'on a

$$\text{tang.}A = \frac{p}{q} = \frac{b\,\text{fin.}\,(fu + \varpi) + {}'b.\text{fin.}\,({}'fu + {}'\varpi)}{b\,\text{cof.}\,(fu + \varpi) + {}'b.\text{cof.}\,({}'fu + {}'\varpi)};$$

d'où l'on tirera à cause de $'b > b$,

$$A = m.180^d + {}'fu + {}'\varpi + \frac{b}{{}'b}.\text{fin.}\,[(f - {}'f)u + {}'\varpi - \varpi]$$
$$- \frac{b^2}{2.{}'b^2}.\text{fin.}\,[2(f - {}'f)u - 2\varpi - 2'\varpi]$$
$$+ \frac{b^3}{3.{}'b^3}.\text{fin.}\,[3(f - {}'f)u + 3\varpi - 3'\varpi],$$
$$- \&c.$$

m. étant un nombre entier quelconque. *(Voyez pour la démonstration de cette suite, l'excellente pièce de M. de la Grange, sur le mouvement des nœuds)*; on aura donc

$$A = m.180^d + 33^d 33' - \frac{18885}{42891}.\text{fin.}\,[18'',662.x + 94^d.33']$$
$$+ 3'',888.x \quad - \frac{1}{2}.\left(\frac{18885}{42891}\right)^2.\text{fin.}\,2\,[18'',662.x + 94^d.33']$$
$$- \frac{1}{3}.\left(\frac{18885}{42891}\right)^3.\text{fin.}\,3\,[18''662.x + 94^d.33']$$
$$- \&c.$$

Pour déterminer m, j'observe que l'on a, lorsque $x = 0$,

$A =$

$A = 6^f\ 10^d\ 33'\ 46''$; d'où il eſt aiſé de voir que $m = 1$; partant,

$$A = 213^d\ 33' - \frac{18885}{42981} \cdot \text{ſin.}\,[18'',662\,.x + 84^d\ 33'] + 3'',888.x - \&c.$$

On trouvera pareillement

$$A' = m.180^d + 128^d 6' - \frac{35808}{47286} \cdot \text{ſin.}\,[18'',662\,.x + 94^d 33'] + 22'',550\,.x + \&c.$$

Or, x étant zéro, on a $A' = 8^f\ 29^d\ 39'\ 58''$; on aura donc $m = 1$; partant

$$A' = 308^d\ 6' + 22'',550.x - \frac{35808}{47286} \cdot \text{ſin.}[18'',662.x + 94^d 33'] - \&c.$$

De-là il ſuit que le moyen mouvement de l'aphélie de Jupiter eſt $3'',888\,.x$, & que celui de Saturne eſt $22'',550\,.x$.

On pourroit réduire en degrés, minutes & ſecondes, les coëfficiens de ſinus des valeurs de A & de A', & déterminer par ce moyen ces quantités; mais il paroît beaucoup plus ſimple de faire uſage pour cela des équations, tang. $A = \frac{p}{q}$, & tang. $A' = \frac{p'}{q'}$; ainſi, nous croyons pouvoir nous diſpenſer d'entrer dans aucun détail à ce ſujet.

XXII.

Du mouvement des Planètes dans un milieu réſiſtant.

Cette matière a déjà été ſavamment diſcutée par pluſieurs Géomètres, mais ils ont tous ſuppoſé les variations produites par la réſiſtance du milieu extrêmement petites; & aucun d'eux n'a recherché ce que deviendroient les orbites des Planètes après un temps quelconque extrêmement grand. Comme la méthode expoſée au commencement de ce

Mémoire, donne une ſolution fort ſimple de ce Problème, je vais la préſenter ici en peu de mots.

Je négligerai l'action des Planètes les unes ſur les autres, & je conſidèrerai le Soleil comme immobile, ou tel au moins que l'éther qui l'environne, ſe meuve avec lui; or il eſt démontré que cet éther, s'il exiſte, ne peut être qu'un fluide extrêmement rare, en ſorte que ſa réſiſtance eſt inſenſible dans l'intervalle d'un petit nombre de révolutions. Les Planètes décriroient conſéquemment à chacune de leurs révolutions, à très-peu-près, une ellipſe; après un temps quelconque, elles décriroient encore très-ſenſiblement une orbite elliptique. Si l'effet de la réſiſtance de la matière éthérée eſt remarquable, ce ne peut donc être que parce qu'elle doit altérer à la longue les élémens de cette ellipſe, c'eſt-à-dire, la moyenne diſtance de la Planète au Soleil, ſon moyen mouvement, ſon excentricité & la poſition de ſon aphélie. Je vais ici déterminer ces variations quelques grandes qu'elles ſoient.

Pour cela je ſuppoſerai, conformément à ce qui exiſte dans la Nature, 1.° que la force centrale eſt en raiſon réciproque du quarré de la diſtance; 2.° que la réſiſtance de l'éther eſt proportionelle à ſa denſité, multipliée par le quarré de la vîteſſe de la Planète. Cela poſé, ſoit, comme précédemment, r le rayon vecteur de la Panète, φ l'angle que forme ce rayon vecteur, avec une droite invariable priſe ſur le plan de l'orbite; $S + P$ la ſomme des maſſes du Soleil & de la Planète; ſoit de plus, ∂s l'élément de la courbe; ∂t l'élément du temps; $\frac{\partial s}{\partial t}$ ſera la vîteſſe de la Planète. Repréſentons par $\Gamma.(\frac{1}{r})$, la loi de la denſité de l'éther, aux différentes diſtances du Soleil; $\delta\mu.\Gamma.(\frac{1}{r}).\frac{\partial s^2}{\partial t^2}$, exprimera la réſiſtance que la planète éprouve, $\delta\mu$ étant ici un coëfficient conſtant & extrêmement petit, dépendant du volume de la planète & de la denſité de la matière éthérée, à une diſtance donnée. Si l'on décompoſe maintenant cette réſiſtance en deux, l'une ſuivant le rayon vecteur, & l'autre perpendiculairement à ce rayon,

on aura, pour la première, $-\delta\mu.\Gamma(\frac{1}{r}).\frac{\partial s\partial r}{\partial t^2}$; & pour la seconde, $-\delta\mu.\Gamma.(\frac{1}{r}).\frac{r\partial s\partial\varphi}{\partial t^2}$; de cette manière, les quantités que nous avons nommées ψ & ψ', dans l'*article VIII*, deviendront, en faisant $\frac{1}{r} = u$,

$$\psi = -(S+P).u^2 + \delta\mu.\Gamma.(u).\frac{\partial s\partial u}{u^2.\partial t^2},$$

$$\psi' = -\delta\mu.\Gamma.(u).\frac{\partial s\partial\varphi}{u\partial t^2};$$

mais on peut, en négligeant les quantités de l'ordre $\delta\mu^2$, mettre dans les termes multipliés par $\delta\mu$, au lieu de ∂t, $\frac{r^2.\partial\varphi}{h}$, ou $\frac{\partial\varphi}{hu^2}$ *(art. IX)*, & l'on aura

$$\psi = -(S+P).u^2 + \delta\mu.\Gamma(u).h^2.u^2.\frac{\partial s\partial u}{\partial\varphi^2},$$

$$\psi' = -\delta\mu.\Gamma.(u).h^2.u^3.\frac{\partial s}{\partial\varphi}.$$

l'équation $\frac{\partial\partial u}{\partial\varphi^2} + u + \frac{[\frac{\psi}{u^2} + \frac{1}{u^3}.\psi'.\frac{\partial u}{\partial\varphi}]}{h^2 + 2\int\psi'.\frac{\partial\varphi}{u^3}} = 0$,

trouvée dans l'*article VIII*, deviendra donc, en négligeant les quantités de l'ordre $\delta\mu^2$,

$$0 = \frac{\partial\partial u}{\partial\varphi^2} + u - \frac{S+P}{h^2} - \frac{2(S+P)}{h^2}.\delta\mu.\int\partial s.\Gamma(u); (h),$$

$\partial\varphi$ étant constant, & h étant, par l'*article IX*, égal à $\sqrt{[(S+P).a(1-\alpha^2.e^2)]}$, a étant le demi-grand axe, & αe, l'excentricité de l'ellipse que la Planète décriroit dans l'hypothèse de $\delta\mu = 0$; l'intégrale de l'équation *(h)* est, par le même article, lorsque $\delta\mu = 0$,

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 - \alpha e.\text{cos}.(\varphi+\varepsilon)}{a(1-\alpha^2.e^2)};$$

mais si l'on suppose que $\delta\mu$ n'est pas nul, il faut différentier

l'équation $o = \frac{\partial\partial u}{\partial\varphi^2} + u - \frac{S+P}{h^2}$, par rapport à δ, & y ajouter le terme $- \frac{2.(S+P)}{h^2} . \delta\mu . \int \partial s . \Gamma . (u)$; ce qui donne,

$$o = \frac{\partial\partial . \delta u}{\partial\varphi^2} + \delta u - 2 . \frac{S+P}{h^2} . \delta\mu . \int \partial s . \Gamma (u);$$

or

$\partial s = \sqrt{(r^2 \partial\varphi^2 + \partial r^2)}$, & $\Gamma (u) = \Gamma . [\frac{1 - \alpha e . \text{cos}. (\varphi + \varepsilon)}{a(1 - \alpha^2 . e^2)}]$; de-là on aura, en réduisant en séries,

$$- \frac{2.(S+P)}{h^2} . \delta\mu . \int \partial s . \Gamma (u) = - \delta\mu \times$$
$$[A\varphi + B . \text{fin}. (\varphi + \varepsilon) + C . \text{fin}. 2 (\varphi + \varepsilon) + \&c.];$$

cette série sera d'autant plus convergente que αe sera plus petit; mais αe étant toujours moindre que l'unité, elle convergera dans tous les cas, sur-tout après les intégrations; on aura donc

$$o = \frac{\partial\partial . \delta u}{\partial\varphi^2} + \delta u - \delta\mu . [A\varphi + B . \text{fin}. (\varphi + \varepsilon)$$
$$+ C . \text{fin}. 2 (\varphi + \varepsilon) + \&c.];$$

partant

$$\delta u = \delta\mu . [A\varphi - \frac{B}{2} . \varphi . \text{cof}. (\varphi + \varepsilon)$$
$$- \frac{C}{3} . \text{fin}. 2 (\varphi + \varepsilon) - \&c.];$$

&

$$u = \frac{1}{a(1 - \alpha^2 . e^2)} + \delta\mu . A\varphi - [\frac{\alpha e}{a(1 - \alpha^2 . e^2)} + \delta\mu . \frac{B\varphi}{2}] \times$$
$$\text{cof}. (\varphi + \varepsilon) - \frac{\delta\mu . C}{3} . \text{fin}. 2 (\varphi + \varepsilon) - \&c.$$

d'où il est aisé de conclure que l'aphélie de la Planète est immobile, mais que son grand axe & son excentricité sont

assujettis à des inégalités proportionnelles au temps, durant un grand nombre de révolutions.

Pour faire disparoître les arcs de cercle de l'expression de u, soit $\delta\mu.\varphi = z$, & l'on aura, suivant notre méthode, les deux équations

$$\partial . \frac{1}{a(1-\alpha^2 e^2)} = A.\partial z$$

$$\partial . \frac{\alpha e}{a(1-\alpha^2 e^2)} = \frac{B}{2}.\partial z$$

A & B sont fonctions de a, & de αe; ainsi en intégrant les deux équations précédentes, on aura a & e, en fonction de z.

Je suppose que l'on veuille avoir ces quantités en fonction de t, on substituera dans z, au lieu de φ, sa valeur,

$$nt - 2\alpha e.\text{sin.}(nt + \theta) - \text{\&c.}$$

trouvée *article IX*; on pourra même négliger les quantités périodiques, & l'on aura $\partial z = \delta\mu.n\partial t$; de plus, on a par le même article, $n = \frac{\sqrt{(S+P)}}{a^{\frac{3}{2}}}$; soit donc

$\delta\mu.t.\sqrt{(S+P)} = x$, & l'on aura

$$\frac{\partial.\left[\frac{1}{a(1-\alpha^2 e^2)}\right]}{\partial x} = \frac{A}{a^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial.\left[\frac{\alpha e}{a(1-\alpha^2 e^2)}\right]}{\partial x} = \frac{B}{2a^{\frac{3}{2}}},$$

toute la difficulté se réduit donc à déterminer A & B; or, cela paroît très-difficile en général, ainsi nous nous bornerons au cas dans lequel l'excentricité est fort petite, & nous négligerons son carré & ses puissances supérieures; dans ce cas on aura

$\int \partial s . \Gamma(u) = \int r \partial \varphi . \Gamma(u)$; or, $\Gamma(u) = \Gamma . [\frac{1 - \alpha e . \text{cos}.(\varphi + \varepsilon)}{a}]$

$$= \Gamma . (\frac{1}{a}) - \frac{\alpha e}{a} . \text{cos}. (\varphi + \varepsilon) . \Gamma' (\frac{1}{a})$$

en exprimant $\frac{\partial . \Gamma . (u)}{\partial u}$ par $\Gamma'(u)$; donc

$$\int \partial s . \Gamma . (u) = a . \Gamma . (\frac{1}{a}) . \varphi + \text{sin}. (\varphi + \varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \alpha e a . \Gamma (\frac{1}{a}) \\ - \alpha e . \Gamma' (\frac{1}{a}) \end{array} \right.$$

donc

$$A = \frac{2 . (S + P)}{h^2} a \Gamma . (\frac{1}{a});$$

$$B = \frac{2 . (S + P)}{h^2} \alpha e . [a \Gamma (\frac{1}{a}) - \Gamma' (\frac{1}{a})]$$

mais on a (*article IX*). $\frac{S + P}{h^2} = \frac{1}{a}$; partant

$A = 2 . \Gamma (\frac{1}{a})$; $B = \frac{2 \alpha e}{a} . [a \Gamma (\frac{1}{a}) - \Gamma' (\frac{1}{a})]$

on aura donc les deux équations

$$\frac{\partial . (\frac{1}{a})}{\partial x} = \frac{2 . \Gamma (\frac{1}{a})}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial . (\frac{\alpha e}{a})}{\partial x} = \frac{\alpha e}{a^{\frac{3}{2}}} . [a \Gamma . (\frac{1}{a}) - \Gamma' (\frac{1}{a})]$$

partant

$$\frac{\partial a}{\partial x . \sqrt{a}} = - 2 \Gamma . (\frac{1}{a})$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = - \frac{e}{a^{\frac{3}{2}}} . [a . \Gamma (\frac{1}{a}) + \Gamma' (\frac{1}{a})].$$

Puisque nous supposons e très-petit, il faut que la valeur de e soit telle, qu'elle reste toujours fort petite, sans quoi la solution précédente cesseroit d'avoir lieu après un certain temps; mais elle sera exacte dans tous les cas où l'excentricité va en

décroiſſant: or, je dis que ces cas ſont ceux de la Nature; car s'il exiſte autour du Soleil, un fluide extrêmement rare, ſa denſité doit diminuer à meſure qu'on s'éloigne de cet aſtre; ainſi la fonction $\Gamma(u)$ doit être telle qu'elle augmente avec u; partant $\partial u \Gamma'(u)$ eſt toujours du même ſigne que ∂u; c'eſt-à-dire que $\Gamma'(u)$ eſt une quantité poſitive; ainſi la valeur de $\frac{\partial e}{\partial x}$ eſt négative.

Je ſuppoſe la denſité de l'éther proportionelle à $\frac{1}{r^n}$; on aura $\Gamma(u) = u^m$; donc $\Gamma'.(\frac{1}{a}) = \frac{m}{a^{m-1}}$; on aura ainſi $\partial a . a^{m-\frac{1}{2}} = - 2 \partial x$; partant..............

$a = [f - (2m + 1).x]^{\frac{2}{2m+1}}$, f étant une conſtante arbitraire; de-là je conclus $\frac{\partial e}{e} = - \frac{\partial x . (m+1)}{f-(2m+1).x}$, d'où je tire en intégrant, $e = h.[f - (2m + 1).x]^{\frac{m+1}{2m+1}}$; h étant une ſeconde arbitraire; on déterminera f & h au moyen des valeurs de a & de αe lorſque $x = 0$.

Pour déterminer le moyen mouvement de la Planète, depuis une époque donnée, j'obſerve qu'en nommant y ce moyen mouvement, on auroit

$$y = A + nt = A + \frac{\sqrt{(S+P)}}{a^{\frac{3}{2}}} . t = A + \frac{x}{a^{\frac{3}{2}} . \delta\mu},$$

ſi a étoit conſtant; A eſt une conſtante arbitraire qui exprime la valeur de y, lorſque $x = 0$; maintenant on aura, par la méthode de l'*article VII*, en faiſant varier a,

$$0 = \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\frac{3}{2} x \frac{\partial a}{\partial x}}{a^{\frac{5}{2}} . \delta\mu};$$

en intégrant,

$$o = A - H + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}.\delta\mu} - \int\frac{\partial x}{a^{\frac{1}{2}}.\delta\mu} = A - H + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}.\delta\mu}$$

$$+ \frac{1}{(2m-2)\delta\mu}.[f - (2m+1)x]^{\frac{2m-2}{2m+1}};$$

& si l'on substitue au lieu de A sa valeur tirée de cette dernière équation, dans celle-ci $y = A + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}.\delta\mu}$; on aura

$$y = H - \frac{1}{(2m-2)\delta\mu}.[f - (2m+1).x]^{\frac{2m-2}{2m+1}};$$

je suppose $y = 0$, lorsque $x = 0$, on aura

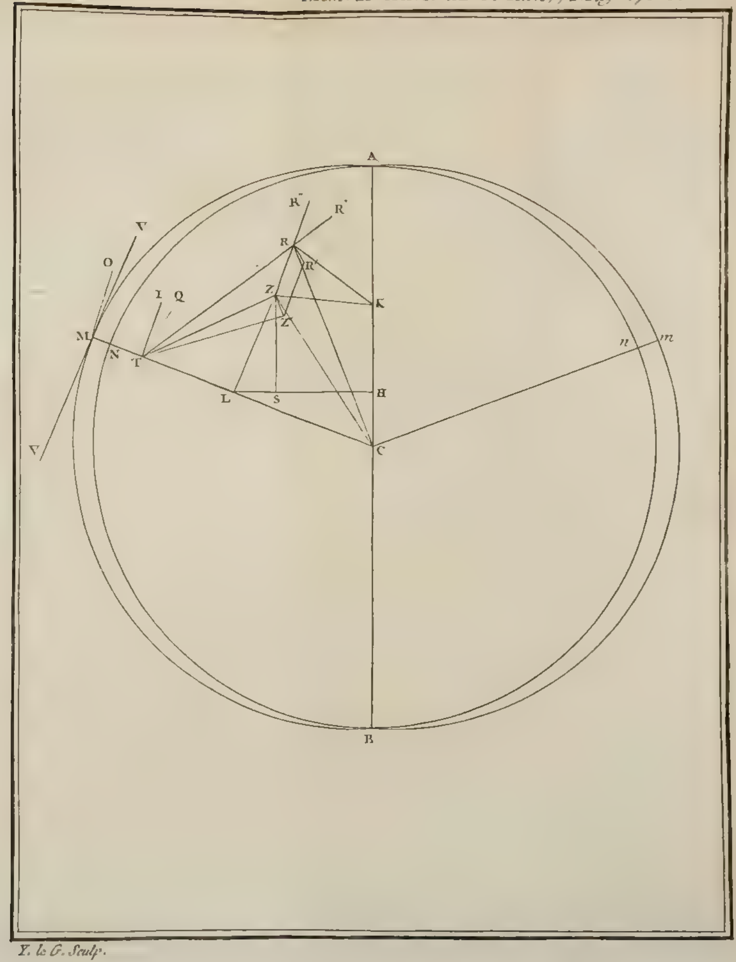
$$H = \frac{1}{(2m-2).\delta\mu}.f^{\frac{2m-2}{2m+1}};$$

partant

$$y = \frac{f^{\frac{2m-2}{2m+1}}}{(2m-2)\delta\mu}.[1 - (1 - \frac{(2m+1)}{f}.x)]^{\frac{2m-2}{2m+1}}.$$



MÉMOIRE



Y. le G. Sculp.

MÉMOIRE

Dans lequel on propoſe une Méthode pour déterminer le nombre des racines réelles & des racines imaginaires des équations, & le ſigne des racines réelles, par la ſeule inſpection des conditions entre les coëfficiens des différens termes de ces équations.

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

(1.) LE but que je me propoſe dans ce Mémoire, eſt d'expoſer une méthode au moyen de laquelle on puiſſe déterminer le nombre des racines réelles & des racines imaginaires des équations, par la ſeule inſpection des conditions entre les coëfficiens des différens termes de ces équations. Pluſieurs Géomètres du premier ordre, M.rs Euler, de Gua, Fontaine, la Grange, &c. ſe ſont propoſé le même objet : je ſaiſis avec empreſſement l'occaſion de rendre à leurs travaux tous les hommages qui leur ſont dûs. J'ai cru cependant que la route que j'ai ſuivie, étoit aſſez différente de celle qu'ils ont embraſſée, pour pouvoir offrir ces recherches à l'Académie ; d'ailleurs on peut regarder cette théorie, comme une ſuite de mon Mémoire ſur le *Cas irréductible*, lû en 1766, & imprimé dans nos recueils pour l'année 1768.

(2.) Je n'oſe pas me flatter de pouſſer ce travail auſſi loin que je le deſirerois ; je crains d'être arrêté par des longueurs de calculs, & par la multitude des combinaiſons qu'il faudra embraſſer, lorſque le degré de l'équation que l'on diſcutera, deviendra plus élevé ; mais il m'a ſemblé que ce que l'on démontre pour les degrés inférieurs, ſert à réſoudre les queſtions analogues pour les degrés ſupérieurs. Ainſi donc, quoique mes recherches ne paſſent pas le cinquième degré, je ſerois tenté de croire que la méthode eſt générale, ou qu'il n'y en a point à eſpérer ſur ce ſujet. On doit regarder,

ce me ſemble, ce genre de travail, comme un enchaînement d'idées telles, que les connoiſſances ſur les degrés inférieurs ſervent à diſcuter les degrés ſupérieurs.

(3.) Lorſqu'on a déterminé le nombre des racines réelles d'une équation, il reſte à connoître le ſigne de ces racines. La méthode a de l'analogie avec celle par laquelle on détermine la nature des racines de l'équation. Cette queſtion fera partie des recherches que je me propoſe d'examiner dans ce Mémoire.

Principe ſur lequel la Théorie eſt fondée.

(4.) *Tout facteur imaginaire d'une équation peut être repréſenté par* $x - a - b\sqrt{-1} = 0$.

Dans ce facteur, a étant réel, b eſt eſſentiellement ou une quantité réelle, ou une fonction imaginaire non diviſible par $\sqrt{-1}$.

Si b étoit une fonction imaginaire diviſible par $\sqrt{-1}$, le facteur de l'équation ſeroit réel.

Ce principe eſt trop connu des Géomètres, pour ne pas me diſpenſer de le démontrer.

Corollaires du Principe précédent, & transformations qu'il faut faire ſubir en conſéquence à la propoſée.

(5.) Si dans l'équation générale d'un degré quelconque, l'on ſubſtitue $a + b\sqrt{-1}$, à x & à ſes puiſſances, que l'on partage le réſultat, en deux équations, l'une formée de tous les termes multipliés par $\sqrt{-1}$, & l'autre formée de tous les termes qui ne ſont pas multipliés par $\sqrt{-1}$, on aura deux équations qui équivaudront à la propoſée, & que je nommerai déſormais *Réſultantes de la propoſée.* Je déſignerai l'une de ces équations par l'équation (α), & l'autre par l'équation (β).

(6.) Si l'on donne maintenant une valeur arbitraire à a, poſitive ou négative, pourvu toutefois qu'elle ſoit réelle, que l'on ſubſtitue cette valeur arbitraire de a, dans une des deux réſultantes, par exemple, dans la réſultante (β), on aura la valeur

de b corrélative à la valeur de a; si l'on substitue ensuite ces deux valeurs dans l'autre résultante, l'on aura la relation entre les connues, propre à déterminer l'équation particulière du degré proposé, qui a pour facteur $x - a - b\sqrt{-1} = 0$; a & b étant les valeurs déterminées précédemment. Si b est réel, la racine de l'équation sera imaginaire. Si b est une fonction imaginaire divisible par $\sqrt{-1}$, le facteur $x - a - b\sqrt{-1} = 0$ sera réel. Si b est une fonction imaginaire non divisible par $\sqrt{-1}$, le facteur $x - a - b\sqrt{-1} = 0$ sera imaginaire. Comme les valeurs de b, ainsi que nous le ferons voir par la suite, sont toujours données par des expressions de b^2; b est une fonction imaginaire non divisible par $\sqrt{-1}$, lorsque la valeur de b^2 renferme elle-même une imaginaire; b est une fonction imaginaire divisible par $\sqrt{-1}$, lorsque b^2 ne renferme point d'imaginaire, mais est une quantité négative.

Questions que l'on peut résoudre au moyen des transformations précédentes.

(7.) On peut résoudre plusieurs questions au moyen des transformations précédentes. Étant donnée une valeur arbitraire de a, on peut demander la valeur corrélative de b, & la relation entre les connues, propre à déterminer l'équation particulière du degré proposé qui a pour facteur $x - a - b\sqrt{-1} = 0$; a étant la valeur arbitraire déterminée précédemment, ainsi qu'il a été énoncé dans le *§. 6*.

(8.) On peut aussi demander la relation entre les connues, propre à déterminer l'équation particulière du degré proposé, qui a pour racine une certaine valeur. Soit δ cette racine; on aura alors $a + b\sqrt{-1} = \delta$, d'où l'on tire $a^2 - 2a\delta + \delta^2 + b^2 = 0$. Cette nouvelle équation combinée avec les deux résultantes, résoudra le Problème. L'on déterminera de plus les valeurs particulières de a & de b, qui satisfont à la question.

(9.) On peut enfin, étant donnée une équation particulière,

demander les valeurs de a & de b, qui entrent dans le facteur $x - a - b\sqrt{-1} = 0$, racine de la proposée.

(10.) Si l'on pouvoit résoudre ce dernier Problème, on auroit la solution de l'équation; mais il est aisé de démontrer que si, au moyen de l'une des deux résultantes (α) ou (β), on élimine, par exemple, la quantité b dans l'autre résultante, on retombera dans une équation qui ne contiendra que la quantité a & des connues, mais qui aura toutes les difficultés du degré proposé. On ne feroit donc que substituer une difficulté à une autre difficulté du même genre, comme il étoit aisé de le prévoir. Quant à la méthode pour déterminer quelle doit être la relation entre les connues, pour que la proposée ait une certaine racine δ, quoique le procédé du §. 8 résolve la question, il est beaucoup plus simple de substituer directement δ à x dans la proposée.

(11.) Si les deux dernières questions paroissent absolument superflues, puisqu'elles n'apprennent que ce que l'on peut savoir par des méthodes plus simples; il n'en est pas de même de la première question. Pour en faire sentir l'utilité, supposons qu'au moyen d'une des deux résultantes (α) ou (β), on puisse déterminer les suppositions particulières sur a, qui rendent les valeurs de b réelles, d'imaginaires qu'elles étoient auparavant, ou réciproquement; que l'on porte ces valeurs dans l'autre résultante, il est évident que l'on en conclura la relation entre les connues, qui a lieu lors de ces points de passages. Supposons de plus que l'on puisse démontrer que toutes les équations qui sont en-deçà ou au-delà de cette propriété, ont leurs racines réelles ou imaginaires, on aura par la seule inspection des connues, un symptôme pour déterminer si telle ou telle équation a ses racines réelles ou imaginaires, sans être obligé de résoudre cette équation; symptôme qu'il eut été peut-être difficile de découvrir autrement. Le développement de la méthode rendra plus sensibles ces raisonnemens qu'il nous suffit d'indiquer.

Du degré où doit monter la quantité b, *dans chacune des résultantes* (α) *&* (β), *au moyen de la transformation que l'on fait subir à l'équation proposée.*

(12.) Pour avoir l'idée du degré où doit monter la quantité b, dans chacune des résultantes (α) & (β), au moyen de la transformation que nous avons prescrit de faire subir à l'équation proposée; soit

$$x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + \ldots = 0;$$

une équation d'un degré quelconque. Dans cette équation, je substitue $a + b\sqrt{-1}$, à x & à ses puissances, & j'ai

$$x^m = a^m + \frac{m.a^{m-1}b\sqrt{-1}}{1} - \frac{m.m-1.a^{m-2}b^2}{1.2}$$
$$- \frac{m.m-1.m-2.a^{m-3}b^3\sqrt{-1}}{1.2.3}$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.a^{m-4}b^4}{1.2.3.4} + \&c\ldots + b^m\sqrt{(-1)}^m.$$

$$x^{m-2} = a^{m-2} + \frac{m-2.a^{m-3}b\sqrt{-1}}{1} - \frac{m-2.m-3.a^{m-4}b^2}{1.2}$$
$$- \frac{m-2.m-3.m-4.a^{m-5}b^3\sqrt{-1}}{1.2.3}$$
$$+ \frac{m-2.m-3.m-4.m-5.a^{m-6}b^4}{1.2.3.4} + \&c\ldots + b^{m-2}\sqrt{(-1)}^{m-2}.$$

$$x^{m-3} = a^{m-3} + \frac{m-3.a^{m-4}b\sqrt{-1}}{1} - \frac{m-3.m-4.a^{m-5}b^2}{1.2}$$
$$- \frac{m-3.m-4.m-5.a^{m-6}b^3\sqrt{-1}}{1.2.3}$$
$$+ \frac{m-3.m-4.m-5.m-6.a^{m-7}b^4}{1.2.3.4} + \&c\ldots + b^{m-3}\sqrt{(-1)}^{m-3},$$

$$x^{m-4} = \&c.$$

(13.) Maintenant ou m est un nombre pair, ou c'est un nombre impair. Si m est un nombre pair, $\sqrt{(-1)}^m$ sera égal à ± 1, ainsi que $\sqrt{(-1)}^{m-2}$, $\sqrt{(-1)}^{m-4}$, &c. Dans le développement de x^m, la plus haute puissance de b qui puisse être multipliée par $\sqrt{-1}$, sera donc b^{m-1}. Par la même raison, dans le développement de x^{m-2}, la plus haute puis-

ſance de b qui puiſſe être multipliée par $\sqrt{-1}$, ſera b^{m-3}. Dans le développement de x^{m-3}, la plus haute puiſſance de b qui puiſſe être multipliée par $\sqrt{-1}$, ſera pareillement b^{m-3}. Dans le développement de x^{m-4} & de x^{m-5}, la plus haute puiſſance de b qui puiſſe être multipliée par $\sqrt{-1}$, ſera b^{m-5} & ainſi de ſuite pour les autres puiſſances de x. Et comme les termes multipliés par $\sqrt{-1}$, ne ſont que de deux en deux, dans la réſultante formée de tous les termes multipliés par $\sqrt{-1}$, les puiſſances de b, ſeront b^{m-1}, b^{m-3}, b^{m-5}, b^{m-7}, &c. ou plutôt b^{m-2}, b^{m-4}, b^{m-6}, &c. puiſque toute l'équation ſera diviſible par b. On voit donc que cette réſultante que je déſignerai ſous le nom de *réſultante (β),* ne renfermera, par rapport à b, que les difficultés du degré $\frac{m}{2} - 1$. Quant à l'autre réſultante que je déſignerai ſous le nom de *réſultante* (α), comme les puiſſances de b qu'elle contiendra ſeront b^m, b^{m-2}, b^{m-4}, b^{m-6}, elle aura les difficultés du degré $\frac{m}{2}$.

(14.) Si m eſt un nombre impair, les quantités $\sqrt{(-1)^m}$, $\sqrt{(-1)^{m-2}}$, $\sqrt{(-1)^{m-4}}$, &c. ſeront égales à $\pm 1\sqrt{-1}$, & les quantités $\sqrt{(-1)^{m-3}}$, $\sqrt{(-1)^{m-5}}$, &c. ſeront égales à ± 1. On trouvera donc par une analyſe à peu-près ſemblable à celle du paragraphe précédent, que dans la réſultante (β), formée de tous les termes multipliés par $\sqrt{-1}$, les puiſſances de b, ſeront b^m, b^{m-2}, b^{m-4}, &c. ou plutôt b^{m-1}, b^{m-3}, b^{m-5}, &c. puiſque toute l'équation ſera diviſible par b. Cette réſultante ne renfermera donc par rapport à b, que les difficultés du degré $\frac{m-1}{2}$; il en ſera de même de la réſultante (α).

(15.) On peut voir que les valeurs de b, qui entrent dans les réſultantes (α) & (β), ſont les puiſſances paires de b, de ſorte que la réſolution de ces équations donne des valeurs de b^2. Soient φ, $\varphi 1$, $\varphi 2$, &c. ces valeurs de b^2; on aura $b = \pm \sqrt{\varphi}$, $b = \pm \sqrt{\varphi 1}$, $b = \pm \sqrt{\varphi 2}$;

ou, ce qui revient au même, $b = \pm \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{-1}}$, $b = \pm \frac{\sqrt{-\varphi 1}}{\sqrt{-1}}$, $b = \pm \frac{\sqrt{-\varphi 2}}{\sqrt{-1}}$. Par la ſuppoſition, $x = a + b\sqrt{-1}$; donc $x = a \pm \sqrt{-\varphi}$, $x = a \pm \sqrt{-\varphi 1}$, $x = a \pm \sqrt{-\varphi 2}$; d'où l'on voit que x ne peut être réelle, qu'autant que $-\varphi$, $-\varphi 1$, $-\varphi 2$, &c. ſont des quantités poſitives, & que par conſéquent b, b, b, ſont des quantités imaginaires.

(16.) Quoique x ne puiſſe être réelle qu'à moins que b ne ſoit imaginaire, il ne s'enſuit pas pour cela que b étant imaginaire, x ſoit eſſentiellement réelle. Comme ce que je dirois ici en le ſéparant de l'exemple, pourroit n'être pas entendu, je ferai voir, lors de la diſcuſſion du quatrième degré, dans quel ſens on doit entendre cette reſtriction.

Application des principes précédens au troiſième degré.

(17.) Je ne m'arrêterai pas à appliquer les principes précédens au ſecond degré, qui ne préſente aucune difficulté; je paſſe tout de ſuite au troiſième.

Soit $x^3 + px + q = 0$, l'équation générale du troiſième degré. Dans cette équation, je ſubſtitue $a + b\sqrt{-1}$ à x & à ſes puiſſances; & j'ai à cauſe de

$x^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1}$,

& de $x = a + b\sqrt{-1}$,

$$\left.\begin{array}{ll} + a^3 & + 3a^2b\sqrt{-1} \\ - 3ab^2 & - b^3\sqrt{-1} \\ + ap & + bp\sqrt{-1} \\ + q & \end{array}\right\} = 0.$$

Donc

$$(\alpha)\ a^3 - 3ab^2 + ap + q = 0;$$
$$(\beta)\ b^2 - 3a^2 - p = 0.$$

Ce ſont les deux réſultantes de la propoſée.

(18.) Si dans la résultante (α) l'on élimine b^2 au moyen de la valeur que l'on tire de la résultante (β); on aura

$$(\gamma)\quad 2a(4a^2 + p) - q = 0.$$

Je nommerai désormais cette équation, *la résolvante*, parce qu'en effet elle serviroit à résoudre la proposée, si elle-même étoit soluble. Je ferai voir dans la suite que, pour le troisième degré, cette résolvante renferme les mêmes difficultés que la proposée. On peut remarquer aussi, conformément au *§. 14*, que les deux résultantes (α) & (β), ordonnées par rapport à b, ne renferment que les difficultés du degré $\frac{3-1}{2} = 1$.

De la condition qu'il doit y avoir entre les connues, pour que l'on puisse supposer a = 0 *dans le facteur* x − a − b √ − 1 = 0 *de la proposée.*

(19.) Dans la résultante (β), la plus petite valeur que l'on puisse donner à a, est de supposer $a = 0$; b a pour valeur correspondante, $b = \pm \sqrt{p}$. Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (α), on tire $q = 0$; c'est la condition entre les connues qui répond à la supposition de $a = 0$. La supposition de $a = 0$ & de $b = \pm \sqrt{p}$ est donc correspondante à celle de $q = 0$. Mais puisque $b = \pm \sqrt{p}$, $b\sqrt{-1} = \pm \sqrt{-p}$; & comme d'ailleurs l'on a en général $x = a \pm b\sqrt{-1}$; $x \pm \sqrt{-p} = 0$, est un des facteurs de l'équation; ce qui est conforme à ce que fait voir la seule inspection de la proposée. En effet, la supposition de $q = 0$ réduit cette proposée à $x^3 + px = 0$; d'où l'on tire $x = 0$, & $x = \pm \sqrt{-p}$, comme ci-dessus.

De la limite des valeurs que l'on peut donner à a, *pour que* b *soit une quantité réelle, & que par conséquent la proposée ait des racines imaginaires.*

(20.) Après avoir déterminé ce qui résulte de la supposition de $a = 0$, examinons la limite des valeurs que l'on peut

peut donner à a, pour que b ſoit une quantité réelle, & que par conſéquent la propoſée ait des racines imaginaires.

Je vois d'abord que de la réſultante (β) (§. 17) l'on tire $b = \pm \sqrt{(3a^2 + p)}$. Donc, ſi p eſt poſitif, on peut donner à a toutes ſortes de valeurs poſitives ou négatives, & la valeur de b que l'on tirera de l'équation (β) ſera toujours réelle; & comme toutes les valeurs poſſibles de a, combinées avec les valeurs corrélatives de b, épuiſent toutes les combinaiſons poſſibles entre p & q; on voit que ſi p eſt poſitif, la propoſée aura toujours deux racines imaginaires, quelle que ſoit d'ailleurs la relation entre les conſtantes p & q; c'eſt ce que l'on ſavoit déjà.

De ce qui a lieu lorſque p *eſt négatif.*

(21.) Lorſque p eſt négatif dans la propoſée, la quantité $b = \pm \sqrt{(3a^2 + p)}$ n'eſt pas eſſentiellement réelle, & par conſéquent la propoſée n'a pas eſſentiellement deux racines imaginaires. Cela dépend de la relation entre $3a^2$ & p. Il eſt même aiſé de voir qu'à l'inſtant où b paſſe de l'imaginaire au réel, ou réciproquement, on a $3a^2 + p = 0$, ou $a = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$. Tant que a eſt moindre que $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$, ou, ce qui revient au même, tant que $3a^2 + p$ eſt une quantité négative, b eſt imaginaire, & l'équation a deux racines réelles; lorſque a ſurpaſſe $\sqrt{\frac{-p}{3}}$, & que par conſéquent $3a^2 + p$ eſt poſitif, b eſt réel, & l'équation a deux racines imaginaires. Lors du point de paſſage, $b = 0$.

(22.) Dans la réſultante (α) du §. 17, ſi l'on ſubſtitue 0 à b, $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$ à a, & $\mp \frac{p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}}$ à a^3, elle deviendra $\pm \frac{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}}{3} + q = 0$; ou en élevant au quarré pour ôter l'ambiguité du ſigne, $-4p^3 - 27q^2 = 0$.

C'eſt la condition qui a lieu entre les conſtantes lorſque les valeurs de b tirées de la réſultante (β) paſſent du réel à l'imaginaire, ou réciproquement, & par conſéquent, lorſque deux des racines de la propoſée paſſent de l'imaginaire au réel, ou réciproquement. On voit donc (ce que l'on ſavoit déjà d'ailleurs) que le paſſage des trois racines réelles de l'équation du troiſième degré, à l'état des deux racines imaginaires, & d'une ſeule racine réelle, ſe fait par les équations dans leſquelles $4p^3 + 27q^2 = 0$. Et comme dans ce cas, $b = 0$, & $a = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$, on a alors $x \mp \sqrt{\frac{-p}{3}} = 0$, pour deux des facteurs de l'équation.

Paragraphes dans leſquels on démontre que l'équation a ſes trois racines réelles lorſque $4p^3 + 27q^2$ *eſt une quantité négative; que l'équation a au contraire une racine réelle & deux imaginaires, lorſque* $4p^3 + 27q^2$ *eſt une quantité poſitive.*

(23.) Il ne ſuffit pas de déterminer quelle condition a lieu lors du paſſage des trois racines réelles de l'équation, à l'état d'une racine réelle & de deux racines imaginaires, ſi cette même condition ne peut rien apprendre ſur la nature des racines dans les autres cas. Qu'importe en effet de ſavoir que lorſque $4p^3 + 27q^2 = 0$, deux racines paſſent de l'état réel à l'imaginaire, ou réciproquement, s'il eſt impoſſible de démontrer généralement que dans toutes les équations dans leſquelles, par exemple, $4p^3 + 27q^2$ ſera une quantité plus grande que zéro, c'eſt-à-dire, poſitive, deux des racines ſeront imaginaires; que dans les équations au contraire dans leſquelles $4p^3 + 27q^2$ ſera une quantité négative, les trois racines ſeront réelles. Examinons donc cette nouvelle queſtion.

(24.) Puiſque de la réſultante (β) du *§. 17*, l'on tire $b = \pm \sqrt{(3a^2 + p)}$, on voit que b ne peut être réel, & que par conſéquent la propoſée ne peut avoir de racines

imaginaires qu'autant que $3a^2 + p$ surpasse zéro, & que par conséquent,

$$(1)\ 3a^2 + p - y = 0;$$

y étant d'ailleurs une quantité positive. De cette dernière équation l'on tire $a^2 = \frac{y-p}{3}$. Si dans la résultante (α) du §. 17, l'on substitue à b^2 sa valeur $3a^2 + p$, elle deviendra

$$(2)\ 2a(4a^2 + p) - q = 0;$$

ou en élevant au quarré,

$$(3)\ 4a^2(4a^2 + p)^2 - q^2 = 0.$$

Mais $4a^2 = \frac{4y-4p}{3}$; $4a^2 + p = \frac{4y-p}{3}$; donc $\frac{(y-p)}{3} \times \frac{(4y-p)^2}{3^2} - \frac{q^2}{4} = 0$; ou, ce qui revient au même,

$$(4)\ 4y(4y - 3p)^2 - 4p^3 - 27q^2 = 0.$$

(25.) De cette dernière équation, l'on tire généralement $4p^3 + 27q^2 = 4y(4y - 3p)^2$. Soit que y soit une quantité positive ou négative, $(4y - 3p)^2$ est une quantité essentiellement positive; le signe de la quantité $4p^3 + 27q^2$ dépend donc du signe de y; mais (§. 24) la proposée ne peut avoir de racines imaginaires qu'autant que y est positif; donc, la proposée ne peut avoir de racines imaginaires que lorsque $4p^3 + 27q^2$ est une quantité positive.

(26.) Si l'on suppose y négative, $(4y - 3p)^2$ n'en sera pas moins une quantité positive; mais son multiplicateur y sera négatif; $4y(4y - 3p)^2$ sera donc une quantité négative; mais (§. 24) la proposée a toutes ses racines réelles lorsque y est négatif; donc, la proposée a ses trois racines réelles, lorsque $4p^3 + 27q^2$ est une quantité négative. La condition de $4p^3 + 27q^2$, positif ou négatif, est donc un véritable symptôme propre à déterminer si les racines de l'équation sont toutes réelles, ou si l'équation a une racine réelle & deux imaginaires.

Remarque singulière sur la condition de $4p^3 + 27q^2 = 0$.

(27.) L'équation (4) du *§. 24* donne lieu à une remarque assez singulière sur la condition de $4p^3 + 27q^2 = 0$. On savoit bien que la condition de $4p^3 + 27q^2 = 0$ a lieu lorsque deux des racines du troisième degré passent du réel à l'imaginaire; mais on ignoroit, ce me semble, que cette condition a lieu dans une autre circonstance. En effet, puisque l'équation (4) du *§.° 24* représente toutes les relations possibles entre p, q & y, on peut demander quelle doit être la valeur de y pour que $4p^3 + 27q^2 = 0$. On a pour condition $4y(4y - 3p)^2 = 0$; d'où l'on tire $y = 0$, & $4y - 3p = 0$. La condition de $y = 0$ appartient bien au passage de l'état réel de deux des racines de l'équation à l'imaginaire. En effet, dans l'équation (1) du *§. 24*, si l'on suppose $y = 0$, on aura $a = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$, valeur qui, (*§. 21*) convient au point de passage des racines réelles aux racines imaginaires; mais certainement, il n'en est pas de même de la valeur de $y = \frac{3p}{4}$. En effet, si dans l'équation (1) du *§. 24* l'on substitue $\frac{3p}{4}$ à y, on aura $3a^2 + \frac{p}{4} = 0$; d'où l'on tire $a = \pm \sqrt{\frac{-p}{12}}$. Cette valeur de a substituée dans l'équation (β) du *§. 17*, la réduit à $b = \pm \frac{\sqrt{3p}}{2}$, valeur imaginaire lorsque p est négatif, ainsi qu'on le suppose dans la question présente, & qui ne peut convenir au passage de l'état réel des valeurs de b, à l'état imaginaire, & par conséquent au passage des racines imaginaires de l'équation aux racines réelles.

(28.) Voici, ce me semble, l'explication très-naturelle de ce paradoxe. Soient λ, λ', λ'' les trois racines de l'équation du troisième degré, que j'ai supposées représentées généralement par $x - a - b\sqrt{-1} = 0$. La résultante (β) du *§. 17*, d'où l'on déduit la valeur

de *b* correſpondante à la valeur de *a*, eſt du ſecond degré. Elle ne détermine donc que deux des trois racines du troiſième degré ; ce ſont celles qui, lorſqu'elles ſont égales, font paſſer deux des racines, de l'état réel à l'imaginaire. Soient λ, λ', ces deux racines, & λ'', la troiſième racine. Les deux racines λ, λ', après avoir paſſé de l'état imaginaire à l'état réel par la ſuppoſition de $\lambda = \lambda'$, ſont enſuite réelles & inégales; mais dans l'intervalle où les racines λ, λ', ſont réelles & inégales, il y a une circonſtance particulière, lors de laquelle l'une des deux racines λ ou λ' eſt égale à l'autre racine λ'' qui n'eſt point donnée par la réſultante *(β)*. L'équation du troiſième degré a bien alors deux racines égales, & la condition $4p^3 + 27q^2 = 0$, a lieu : mais comme les deux racines λ, λ', ne ſont point égales entr'elles, & que c'eſt au contraire une des deux racines λ ou λ' qui eſt égale à l'autre racine λ'', les racines ne paſſent pas du réel à l'imaginaire. Il n'y a point d'égalité, ſi j'oſe m'exprimer ainſi, entre deux racines de la même paire, ce qui ſeroit néceſſaire pour que de l'égalité des racines on en pût conclure le paſſage du réel à l'imaginaire; ce ſont deux racines de paires différentes, dont l'égalité n'influe en rien ſur le paſſage du réel à l'imaginaire. Je crois cette explication fondée, & l'analyſe me paroît conduire à cette concluſion. Lors donc que l'on a une équation du troiſième degré dans laquelle $4p^3 + 27q^2 = 0$, & dont deux des racines ſont égales, je ſerois tenté de penſer que l'on doit, au moins *per mentem*, regarder cette équation comme pouvant appartenir à deux cas différens; le premier (& c'eſt celui qu'on a toujours conſidéré juſqu'ici) eſt de la regarder comme l'*équation de paſſage des racines réelles aux imaginaires ;* le ſecond eſt de la regarder comme un cas ſingulier des équations, dont toutes les racines ſont réelles, & dont deux ſont égales, ſans être cependant *équation de paſſage des racines reelles aux imaginaires.* Les conſtructions géométriques que nous emploierons dans la ſuite de ce Mémoire, nous conduiront aux mêmes conſéquences.

Des Valeurs que l'on peut donner à y *dans l'Équation* $3a^2 + p - y = 0$ *du* §. 24.

(29.) L'équation (1) du *§. 24* fait voir que, lorſque p eſt négatif, l'on peut donner à y toutes ſortes de valeurs poſitives. En effet, puiſque $a = \pm \sqrt{\frac{-p+y}{3}}$, ſi p eſt négatif, quelque valeur poſitive que l'on ſuppoſe à y, on aura pour a une valeur réelle correſpondante. On voit également que l'on ne peut pas donner à y une valeur négative plus grande que p; car alors a ſeroit imaginaire, ce qui ſeroit contraire aux ſuppoſitions fondamentales de ce Mémoire. La valeur de $y = p$, a pour valeur correſpondante de a, $a = 0$.

(30.) Lorſque p eſt poſitif, l'on ne peut pas ſuppoſer à y une valeur négative, ou même une valeur poſitive, plus petite que p; autrement a ſeroit imaginaire, ce qui eſt encore contraire aux ſuppoſitions fondamentales de ce Mémoire.

(31.) Dans l'équation (4) du *§. 24*, ſi l'on ſuppoſe $4p^3 + 27q^2 = z$, elle deviendra

$$(1) \quad 4y(4y - 3p)^2 - z = 0.$$

Cette équation exprimera, pour chaque cas particulier, la relation entre les racines de la propoſée, & la valeur correſpondante de $4p^3 + 27q^2$ dans la propoſée. En effet, cette équation donne la relation entre z ou $4p^3 + 27q^2$, & y; l'on a d'ailleurs *(§. 17 & 24)* la relation entre a & y, entre a & b; l'on a donc la relation entre $4p^3 + 27q^2$ & les racines de la propoſée.

(32.) Il eſt aiſé de voir, ainſi que je l'ai dit *(§. 18)*, que la réſolvante (γ) relativement à la ſolution, eſt ſujette aux mêmes difficultés que la propoſée; c'eſt-à-dire qu'elle eſt irréductible dans les mêmes cas que la propoſée, quoiqu'au premier coup-d'œil elle ne paroiſſe pas avoir préciſément la même forme. En effet, ſi l'on développe cette équation, elle

devient $a^3 + \frac{ap}{4} - \frac{q}{8} = 0$, équation qui paroît au premier coup d'œil différente de la proposée. Mais on voit bientôt que la condition de l'irréductibilité est la même pour les deux cas, puisque $4\frac{p^3}{4^3} + 27\frac{q^2}{8^2}$ a lieu dans les mêmes circonstances que $4p^3 + 27q^2$.

(33.) J'ai supposé que l'équation du troisième degré étoit représentée par $x^3 + px + q = 0$, c'est-à-dire que j'ai supposé le second terme évanoui; cette supposition n'étoit pas indispensable, & l'on auroit pu démontrer sur l'équation complète, les propriétés analogues à celles que l'on vient de développer. Mais comme toute équation complète d'un degré quelconque, se ramène facilement à une équation sans second terme, j'ai cru préférable, pour éviter la complication des calculs & me conformer d'ailleurs à l'usage, de supposer l'équation débarrassée de son second terme.

Discussion des équations dont on a fait usage, considérées comme lieux géométriques.

(34.) Quoique j'aie épuisé, ce me semble, ce que l'on peut tirer de la méthode, relativement à la nature des racines des équations du troisième degré, j'ai pensé qu'un examen sommaire des équations dont j'ai fait usage, considérées comme lieux géométriques, pourroit encore jeter quelque jour sur cette matière.

Du lieu géométrique représenté par la résultante (β) du §. 17.

(35.) Soit l'équation du troisième degré représentée généralement par $x^3 + px + q = 0$; & supposons que l'on veuille développer le lieu géométrique de la résultante (β) du *(§. 17)*, par rapport aux lignes des coordonnées *P, O, P; M, K, O, K, M;* que le point *O* soit l'origine des coordonnées *a*, *b;* que de plus les quantités *a* soient prises sur la ligne *O P*, & les quantités *b* sur la ligne *M, K, O, K, M.* Fig. 1.
Il est évident que dans la supposition de *p* positif, le lieu

géométrique de la résultante (β) sera une hyperbole dont le
Fig. 1. point O sera le centre; OK sera le demi-grand axe qui aura pour expression $\pm \sqrt{p}$. Les asymptotes de cette hyperbole seront déterminées par l'équation $a : b :: 1 : \pm \sqrt{3}$; a & b étant les coordonnées à ces asymptotes.

Et comme quelque valeur que l'on suppose à l'abscisse, on a toujours deux ordonnées réelles correspondantes; on voit que dans ce cas l'équation du troisième degré a toujours deux racines imaginaires.

(36.) Si p est négatif, le lieu géométrique de la résultante
Fig. 2. (β) sera également une hyperbole, dont le point O sera le centre; mais alors le demi-grand axe OK, sera pris sur la ligne des abscisses, & il aura pour expression $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$. Les asymptotes de cette nouvelle hyperbole seront déterminées comme ci-dessus, par l'équation $a : b :: 1 : \pm \sqrt{3}$; a & b étant les coordonnées à ces asymptotes. Comme dans ce cas l'abscisse ne commence à avoir des ordonnées réelles correspondantes, que lorsqu'elle surpasse OK, on voit que lorsque p est négatif, l'équation du troisième degré peut avoir toutes ses racines réelles. Ces racines répondent à la partie OK, OK, dans laquelle les abscisses ont leurs ordonnées correspondantes imaginaires.

(37.) Dans le passage de p positif à p négatif, c'est-à-dire, dans le cas de $p = 0$, la courbe qui représente la résultante (β) se confond avec les asymptotes.

Du lieu géométrique représenté par l'équation $3a^2 + p - y = 0$.

(38.) Après avoir discuté le lieu géométrique de la résultante *(β)*; voyons ce qui a lieu pour l'équation (1) du *§. 24.*

Si l'on prend les mêmes lignes des coordonnées, que dans
Fig. 3. les paragraphes précédens; que le point O soit l'origine de ces coordonnées; que la droite OP soit la ligne des abscisses a, & la droite OM la ligne des ordonnées y. Il est évident que dans

dans la supposition de p positif, le lieu géométrique de l'équation dont il s'agit est une parabole dont le sommet K est situé sur la ligne des ordonnées, à une distance p de l'origine, du côté des ordonnées positives. Cette courbe est située entièrement du côté des ordonnées positives; & la plus petite valeur que puisse avoir y, est $y = p$. Fig. 3.

(39.) Si p est négatif, le lieu géométrique de l'équation dont il s'agit est une parabole, dont le sommet K est situé sur la ligne des ordonnées, à une distance p de l'origine O des coordonnées, du côté des ordonnées négatives. Cette parabole coupe la ligne des abscisses en deux points F, f, à des distances OF, Of égales $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$, de part & d'autre de l'origine des coordonnées. La plus grande valeur négative que puisse avoir y, est $y = p$. Fig. 4.

(40.) Lorsque $p = 0$, le lieu géométrique de l'équation dont il s'agit, est une parabole, dont le sommet est situé à l'origine O des coordonnées; y ne peut avoir de valeurs négatives; & sa plus petite valeur positive est $y = 0$. Fig. 5.

(41.) Ces dernières considérations conduisent aux mêmes conclusions sur la nature des racines de l'équation générale du troisième degré, que celles des *§. 35, 36 & 37.* En effet puisque $3a^2 + p - y = 0$, si dans la résultante *(β)* du *§. 17,* l'on substitue à $3a^2 + p$, sa valeur y, on aura $b = \pm \sqrt{y}$. L'on voit donc que b ne peut être réel, & que par conséquent l'équation du troisième degré ne peut avoir des racines imaginaires, que lorsque y est positif. Dans le cas de p positif, l'on a vu *(§. 38)* que la parabole est entièrement située du côté des ordonnées positives, & que, quelle que soit la valeur de a, on a une valeur positive correspondante de y; aussi lorsque p est positif, l'équation a-t-elle essentiellement deux racines imaginaires. Lorsque p est négatif, la parabole *(§. 39)* s'étend du côté des ordonnées positives & du côté des ordonnées négatives. La partie de la courbe qui s'étend du côté des ordonnées négatives, répond

aux abſciſſes plus petites que $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$; la partie de la courbe qui s'étend du côté des ordonnées poſitives, répond aux abſciſſes plus grandes que $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$. Auſſi lorſque p eſt négatif, l'équation du troiſième degré peut-elle avoir toutes ſes racines réelles; ou une racine réelle & deux imaginaires.

Du lieu géométrique repréſenté par l'Équation

$$4y(4y - 3p)^2 - z = 0.$$

(42.) Si l'on prend pour lignes des coordonnées, les
Fig. 6. droites *POP, MOM;* que le point *O* ſoit l'origine des coordonnées; la droite *OP,* la ligne des abſciſſes *y;* la droite *OM,* la ligne des ordonnées *z:* il eſt évident que, dans la ſuppoſition de *p* poſitif, le lieu géométrique de l'équation dont il s'agit, eſt une eſpèce de parabole cubique qui a des branches infinies paraboliques dans la direction de la ligne des ordonnées. La ligne des abſciſſes rencontre la courbe en trois points; ſavoir à l'origine *O,* & deux fois à une diſtance $OK = \frac{3p}{4}$. La ligne *MOM* des ordonnées ne rencontre la courbe qu'à l'origine *O.*

Fig. 7. (43.) Si *p* eſt négatif, les points *K, F,* changent de place. Dans la *fig. 6, K* & *F* étoient à la droite du point *O;* dans la *fig. 7, K* & *F* ſont à la gauche de *O.* La ligne des abſciſſes rencontre également la courbe en trois points; ſavoir à l'origine *O,* & deux fois à une diſtance $OK = \frac{3p}{4}$. La ligne *MOM* des ordonnées ne rencontre la courbe qu'à l'origine *O.*

Fig. 8. (44.) Lorſque $p = 0$, l'équation eſt à la première parabole cubique. Voyons ce qui réſulte de ces recherches.

(45.) Puiſque *(§. 31)* $z = 4p^3 + 27q^2$; dans les courbes des *paragraphes précédens*, la partie ſituée du côté des ordonnées poſitives, indique que $4p^3 + 27q^2$ eſt une

quantité positive; & la partie située du côté des ordonnées négatives, indique que $4\ p^3 + 27\ q^2$ est une quantité négative.

(46.) Cette remarque peut faire naître une difficulté. En effet, si l'on suppose, par exemple, p positif, on voit *(fig. 6)* que la courbe s'étend indistinctement du côté des z positifs & du côté des z négatifs. On sait cependant que dans l'équation du troisième degré, $4\,p^3 + 27\ q^2$ est essentiellement une quantité positive lorsque p est positif.

Il est facile de résoudre cette difficulté; en effet, toute la courbe n'appartient point au Problème des équations. Les seules valeurs de y, dont on puisse faire usage, sont celles déterminées par les *§. 38, 39* & *40*. Or on a vu *(§. 38)* que, dans le cas de p positif, y ne peut avoir de valeur négative, & que même la plus petite valeur positive qu'il puisse avoir, est $y = p$; si donc l'on suppose $O\,F = p$, & que l'on mène l'ordonnée correspondante *FG*, la partie *Gg* de la courbe sera la seule qui appartienne au Problème des équations. On doit faire des remarques analogues pour le cas de p négatif & de $p = 0$. J'ai eu soin, dans chaque cas, de distinguer par des points, les parties des courbes qui n'appartiennent point au Problème des équations. Fig. 6. Fig. 6, 7, 8.

(47.) On peut remarquer maintenant la cohérence de toutes les idées.

Lorsque p est positif, la courbe s'étend du côté des ordonnées positives & négatives; mais la portion qui s'étend du côté des ordonnées négatives, & qui seroit en contradiction avec ce que l'on sait d'ailleurs, puisqu'elle paroîtroit indiquer que $4\,p^3 + 27\ q^2$ est une quantité négative, n'appartient point au Problème des équations. En effet, toute cette portion de la courbe est correspondante à des valeurs négatives de y, valeurs qui ne peuvent avoir lieu pour l'équation du troisième degré, lorsque p est positif. Fig. 6.

(48.) Lorsque p est négatif, la partie de la courbe qui

appartient au Problème, s'étend du côté des ordonnées positives & négatives: aussi dans ce cas la quantité $4p^3 + 27q^2$ peut-elle être positive ou négative. Observons que, dans cette dernière supposition, la courbe coupe la ligne des abscisses au point O; qu'elle s'en éloigne du côté des abscisses négatives, puis s'en rapproche, & la vient toucher au point K sans la couper, à une distance $OK = \frac{3p}{4}$ de l'origine. Nous avons fait remarquer ce cas singulier (*§. 27*): c'est celui où $4p^3 + 27q^2 = 0$, sans que les racines de l'équation passent du réel à l'imaginaire.

Fig. 7.

(49.) Si l'on différencie l'équation $4y(4y-3p)^2 - z = 0$, pour déterminer à quelle valeur de y répond le *maximum* de z, on trouvera pour condition du Problème, $y^2 - py + \frac{3p^2}{16} = 0$; d'où l'on tire $y = \frac{3}{4}p$; $y = \frac{p}{4}$. La valeur de $y = \frac{3p}{4}$ répond au point K; quant à la valeur de $y = \frac{p}{4}$, elle fait voir que la plus grande valeur que z puisse avoir dans l'intervalle des points O & K, répond à l'abscisse $OR = \frac{p}{4}$. Si l'on substitue à y, sa valeur $\frac{p}{4}$ dans l'équation $4y(4y-3p)^2 - z = 0$, on aura $z = 4p^3$. Mais en général $z = 4p^3 + 27q^2$; donc dans ce cas particulier $q = 0$; d'où l'on voit, ce qui est évident, que p étant négatif & constant, la plus grande valeur négative que puisse avoir $4p^3 + 27q^2$, est lorsque $q = 0$.

(50.) On peut remarquer aussi que, si l'on considère la totalité des points de la courbe représentée par l'équation $4y(4y-3p)^2 - z = 0$, la partie qui satisfait au Problème dans le cas de p positif, est le complément de la partie qui satisfait au Problème dans le cas de p négatif.

Application des principes précédens au quatrième degré.

(51.) Soit $x^4 + px^2 + q x + r = 0$, l'équation générale du quatrième degré. Dans cette équation je ſubſtitue $a + b\sqrt{-1}$, à x & à ſes puiſſances; & j'ai, à cauſe de

$$x^4 = a^4 + 4a^3 b\sqrt{-1} - 6a^2b^2 - 4ab^3\sqrt{-1} + b^4,$$
$$x^2 = a^2 + 2ab\sqrt{-1} - b^2,$$
$$x = a + b\sqrt{-1},$$
$$a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + a^2p - b^2p + aq + r$$
$$+ (4a^3b - 4ab^3 + 2abp + bq)\sqrt{-1} = 0;$$

d'où l'on tire

$$(\alpha)\quad a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + a^2p - b^2p + aq + r = 0;$$
$$(\beta)\quad 4a^3 - 4ab^2 + 2ap + q = 0.$$

Ce ſont les deux réſultantes de la propoſée.

(52.) Si l'on multiplie la réſultante (β) par a, & que l'on ſouſtraie cette nouvelle équation de la réſultante (α), on aura une nouvelle réſultante (α 1);

$$(\alpha\ 1)\quad b^4 - 2a^2b^2 - pb^2 - 3a^4 - a^2p + r = 0.$$

Comme cette forme nous a paru plus commode que celle de l'équation (α), nous combinerons cette nouvelle réſultante (α 1) avec la réſultante (β).

(53.) Si dans la réſultante (α 1) l'on élimine b^4 & b^2 par le moyen de la réſultante (β), on aura la réſolvante

$$(\gamma)\quad 4a^2[(4a^2 + p)^2 - 4r] - q^2 = 0.$$

(54.) On peut remarquer, conformément au §. 13, que la réſultante (α) ordonnée par rapport à b^2, renferme les difficultés du degré $\frac{4}{2} = 2$; & que la réſultante (β) ne renferme que les difficultés du degré $\frac{4}{2} - 1 = 1$.

(55.) De l'équation (α 1) du §. 52, l'on tire

$$b^2 = \frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2},$$
$$b^2 = \frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}.$$

$$b = \pm\sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$b = \pm\sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

d'où l'on voit que dans la résultante (α 1) on a autant de valeurs de b qui peuvent être réelles ou imaginaires, que la proposée a de racines qui peuvent être imaginaires ou réelles. Examinons quelles lumières on peut tirer de ces valeurs.

De la condition qu'il doit y avoir entre les connues, pour que l'on puisse supposer a = 0, *dans le facteur* $x - a - b\sqrt{-1} = 0$ *de la proposée.*

(56.) Dans la résultante (α 1) la plus petite valeur que l'on puisse donner à a, est de supposer $a = 0$. Si l'on porte cette valeur dans l'équation (γ) du *§. 53*, on a pour condition, entre les connues, $q = 0$. Cette même supposition donne pour valeurs de b *(§. 55.)*

$$b^2 = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}$$

$$b^2 = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}$$

$$b = \pm\sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)};$$

$$b = \pm\sqrt{\left(\frac{p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)};$$

$$b\sqrt{-1} = \pm\sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)};$$

$$b\sqrt{-1} = \pm\sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)}.$$

Et comme en général $x = a + b\sqrt{-1}$, on a, dans ce cas particulier, pour racines de l'équation,

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)},$$

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)}.$$

Cette solution est conforme à ce que l'on sait d'ailleurs;

car, puiſque par l'hypothèſe $q = 0$, la propoſée ſe réduit à $x^4 + px^2 + r = 0$; qui réſolue par les méthodes ordinaires du ſecond degré, donne les mêmes valeurs que ci-deſſus.

(57.) Dans les expreſſions de b du §. *précédent*, où p & r ſont à la fois poſitifs, où p & r ſont à la fois négatifs, où p eſt poſitif & r négative, où p eſt négatif & r eſt poſitive. Ces différentes combinaiſons donnent lieu aux remarques ſuivantes.

Si p & r ſont poſitifs; alors l'inſpection des valeurs de b trouvées ci-deſſus, fait voir que ſi p^2 ſurpaſſe $4r$, toutes les valeurs de b ſont réelles; auſſi, dans ce cas, la propoſée n'a-t-elle que des racines imaginaires. Si p^2 eſt moindre que $4r$, toutes les valeurs de b ſont imaginaires; mais comme les valeurs de b ſont imaginaires, non par la raiſon que les valeurs de b^2 ſont négatives, mais parce que les valeurs de b^2 renferment elles-mêmes une imaginaire, les racines de l'équation ſont imaginaires.

Si p eſt poſitif & r négative, deux des valeurs de b ſont eſſentiellement réelles, & deux ſont imaginaires. Et comme les valeurs de b^2 ne renferment point d'imaginaires, deux des racines de l'équation ſont imaginaires & deux ſont réelles.

Si p & r ſont négatifs, les concluſions ſont les mêmes que ci-deſſus.

Si p eſt négatif & r poſitive; alors ou p^2 ſurpaſſe $4r$, ou p^2 eſt moindre que $4r$. Si p^2 ſurpaſſe $4r$, toutes les valeurs de b ſont imaginaires, non par la raiſon que les valeurs de b^2 ſont imaginaires, mais parce qu'elles ſont négatives; la propoſée n'a donc que des racines réelles. Si p^2 eſt moindre que $4r$, toutes les valeurs de b ſont imaginaires, non par la raiſon que les valeurs de b^2 ſont négatives, mais parce que les valeurs de b^2 renferment elles-mêmes une imaginaire. Les racines de l'équation ſont donc imaginaires.

(58.) L'exemple précédent a ſervi à développer la remarque du §. *6*, relativement à la nature des racines de l'équation, eu égard aux différentes valeurs de b. Nous allons maintenant examiner les différens cas où l'expreſſion de b^2 renferme des imaginaires.

Des différens cas où l'expression de b² *renferme des imaginaires.*

(59.) Si l'on jette les yeux sur les expressions de b^2 du §. 55, on verra que si $(4a^2 + p)^2 - 4r$ est moindre que zéro, les valeurs de b^2 renferment des imaginaires. La condition de $(4a^2 + p)^2 - 4r = 0$, donne donc la limite de ces différens cas. De cette équation l'on tire $a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r}}{4}$, $a^2 = \frac{-p + 2\sqrt{r}}{4}$. Ces expressions substituées dans la résolvante (γ) du §. 53, donnent $q^2 = 0$; d'où l'on voit que le passage des valeurs réelles de b^2 aux valeurs imaginaires, se fait par les équations dans lesquelles $q = 0$. Voyons maintenant quelle condition a lieu généralement entre les constantes lorsque b^2 est imaginaire.

On ne doit pas oublier que dans cette recherche, r est essentiellement positive, puisque les valeurs de b^2 du §. 55, ne peuvent renfermer d'imaginaires qu'autant que r est positive.

(60.) Nous venons de voir que b^2 ne renferme des imaginaires, qu'autant que les valeurs de a^2 sont comprises entre les limites suivantes; $a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r}}{4}$, $a^2 = \frac{-p + 2\sqrt{r}}{4}$, Soit donc en général $a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r}}{4} + y$; ou, ce qui revient au même, soit

$$(1)\quad a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r} + 4y}{4};$$

Si l'on substitue cette valeur dans la résolvante (γ) du §. 53, elle deviendra

$$(2)\quad 16y(y - \sqrt{r}) \times (-p - 2\sqrt{r} + 4y) - q^2 = 0.$$

Examinons quelle conséquence on peut tirer de cette analyse.

(61.) Puisque §. 60, $4a^2 + p = 4y - 2\sqrt{r}$, & que par conséquent

$$(1)\quad (4a^2 + p)^2 - 4r = 16y(y - \sqrt{r});$$

on

on peut remarquer d'abord que les valeurs de $(4a^2+p)^2-4r$, ne sont négatives, & que par conséquent les valeurs de b^2 du §. 55, ne sont imaginaires, que lorsque $16y(y-\sqrt{r})$ est une quantité négative; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les valeurs de y sont entre $y=0$ & $y=\sqrt{r}$. Dans tout autre cas les valeurs de $(4a^2+p)^2-4r$, sont positives, & par conséquent les valeurs de b^2 sont réelles. Il sembleroit donc que pour avoir les valeurs de a^2 correspondantes aux valeurs imaginaires de b^2, il n'est question que de substituer à y dans l'équation (1) du §. 60, toutes les valeurs comprises entre $y=0$ & $y=\sqrt{r}$. Mais on ne doit pas perdre de vue que la supposition fondamentale du Mémoire, est que a soit une quantité réelle. a^2 doit donc être ou zéro, ou une quantité positive; cette seconde considération exclut un très-grand nombre de valeurs de y, quoique comprises entre $y=0$, & $y=\sqrt{r}$.

(62.) D'après cette dernière remarque, la plus petite valeur de y dont on doit faire usage dans la question dont il s'agit, est $y=\frac{p+2\sqrt{r}}{4}$; c'est celle qui dans l'équation (1) du §. 60, répond à $a^2=0$. Et les seules valeurs de y que l'on doive employer, sont celles comprises entre $y=\frac{p+2\sqrt{r}}{4}$, & $y=\sqrt{r}$. Ces dernières valeurs de y ont respectivement pour valeurs correspondantes de a^2, $a^2=0$, $a^2=\frac{-p+2\sqrt{r}}{4}$.

Paragraphe dans lequel on démontre que les seules équations du quatrième degré, où q $=0$, *donnent des valeurs de* b^2 *qui renferment une imaginaire;* a *étant d'ailleurs une quantité réelle.*

(63.) De l'équation (2) du §. 60, l'on tire

(1) $q^2=16y(y-\sqrt{r})\times(-p-2\sqrt{r}+4y)$.

C'est la relation qui doit exister entre les quantités y, p, q, r, pour que b^2 renferme une imaginaire. Mais pour

que b^2 renferme une imaginaire, nous avons vu *§. 61*, que le facteur $16\,y\,(y - \sqrt{r})$ doit être négatif. De plus, le facteur $-p - 2\sqrt{r} + 4y$ est toujours ou zéro ou positif; car autrement *(§. 60, équation* (1)) a feroit imaginaire, ce qui est contre la supposition fondamentale du Mémoire. La valeur de b^2 ne peut donc renfermer d'imaginaire, que lorsque q est une quantité imaginaire, ou au moins $= 0$ dans la proposée. On ne peut supposer que q soit imaginaire; il reste donc la condition de $q = 0$. Donc les seules équations du quatrième degré, dans lesquelles $q = 0$, conduisent à des valeurs de b^2 qui renferment une imaginaire.

Paragraphes dans lesquels on démontre que les équations du quatrième degré, où q $= 0$, *peuvent aussi se résoudre par des valeurs de* b, *telles que* b^2 *ne renferme point d'imaginaire.*

(64.) Quoique les seules équations du quatrième degré, dans lesquelles $q = 0$, conduisent à des valeurs de b^2 qui renferment une imaginaire, il ne s'ensuit pas pour cela que ces équations ne puissent se résoudre que par des valeurs de b, telles que b^2 renferme essentiellement une imaginaire. En effet, si l'on jette les yeux sur l'équation (1) du *§. 63*, on verra que q peut être égal à zéro, par trois raisons différentes, 1.° parce que le facteur $-p - 2\sqrt{r} + 4y = 0$, 2.° parce que $y = 0$, 3.° parce que $y = \sqrt{r}$. La supposition de $-p - 2\sqrt{r} + 4y = 0$, donne $4y = p + 2\sqrt{r}$; c'est le cas que nous venons de considérer, & qui *(§. 62)*, a pour valeurs correspondantes de a^2, $a^2 = 0$, & par une suite nécessaire *(§. 55)* pour valeurs correspondantes de b^2, $b^2 = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}$. La supposition de $y = 0$, a pour valeur correspondante de a^2 *(§. 60, équation* (1)), $a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r}}{4}$; & comme alors $(4a^2 + p)^2 - 4r = 0$, les valeurs correspondantes de b^2 *(§. 55)*, sont $b^2 = \frac{p - 2\sqrt{r}}{4}$.

La ſuppoſition de $y = \sqrt{r}$ a pour valeurs correſpondantes de a^2 (§. 60, *équation* (1)), $a^2 = \frac{-p + 2\sqrt{r}}{4}$; & comme $(4a^2 + p)^2 - 4r$ eſt encore égal à zéro, les valeurs correſpondantes de b^2 (§. 55), ſont $b^2 = \frac{p + 2\sqrt{r}}{4}$.

(65.) Lorſque $q = 0$ dans les équations du quatrième degré, on peut donc indiſtinctement, dans le facteur $x - a - b\sqrt{-1} = 0$, ſuppoſer $a = 0$, ou $a = \pm \frac{\sqrt{(-p - 2\sqrt{r})}}{2}$, ou $a = \pm \frac{\sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{2}$. Si on ſuppoſe $a = 0$, les valeurs correſpondantes de b^2 ſont $b^2 = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}$. Si $a = \pm \frac{\sqrt{(-p - 2\sqrt{r})}}{2}$, les valeurs correſpondantes de b^2 ſont $b^2 = \frac{p - 2\sqrt{r}}{4}$. Si l'on ſuppoſe $a = \pm \frac{\sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{2}$, les valeurs correſpondantes de b^2 ſont $b^2 = \frac{p + 2\sqrt{r}}{4}$. Maintenant il eſt évident que quand la première valeur de b^2, celle qui répond à $a = 0$, eſt imaginaire, parce que, par exemple, $p^2 - 4r$ eſt une quantité négative, les valeurs de b^2, qui répondent à $a = \pm \frac{\sqrt{(-p - 2\sqrt{r})}}{2}$, $a = \pm \frac{\sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{r}$, ne ſont point imaginaires pour cela. Une des deux valeurs de a eſt pareillement réelle dans le même cas, puiſque $p^2 - 4r$ ne peut être une quantité négative qu'autant qu'une des deux quantités $-p \pm 2\sqrt{r}$ eſt poſitive. On voit donc que les équations du quatrième degré dans leſquelles $q = 0$, peuvent auſſi ſe réſoudre par des valeurs de b telles que b^2, ne renferme point d'imaginaires, a étant d'ailleurs réel.

(66.) Si l'on pouvoit douter de l'identité des ſolutions que l'on tire des ſuppoſitions du paragraphe précédent, on s'en convaincroit facilement par le calcul qui ſuit. Si dans le facteur $x = a + b\sqrt{-1}$, l'on ſubſtitue zéro

à a, & $\pm \sqrt{(\frac{-p \pm \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2})}$ à $b\sqrt{-1}$; on aura $x = \pm \sqrt{(\frac{-p \pm \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2})}$. Si l'on substitue maintenant $\pm \frac{\sqrt{(-p - 2\sqrt{r})}}{2}$ à a, & $\pm \frac{\sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{2}$ à $b\sqrt{-1}$, l'on aura $x = \frac{\pm\sqrt{(-p-2\sqrt{r})} \pm \sqrt{(-p+2\sqrt{r})}}{2}$; il s'agit donc de démontrer que ces valeurs de x sont égales; ce qui devient évident en exécutant le calcul.

Des cas où les valeurs de b *sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires, sans que l'expression de* b^2 *renferme des imaginaires.*

(67.) Nous venons d'examiner les seuls cas où la valeur de b^2 renferme des imaginaires. Selon ce qui précède, il n'y a que les équations dans lesquelles $q = 0$, qui puissent conduire à de pareils résultats, a étant d'ailleurs une quantité réelle. Nous ne reviendrons plus sur cette condition; nous supposerons donc désormais que dans la proposée, q est une quantité réelle positive ou négative. Nous supposerons pareillement que $(4a^2 + p)^2 - 4r$ est une quantité positive, puisque si cette quantité étoit négative, les valeurs de b^2 du §. 55 seroient imaginaires.

Des conditions qui ont lieu entre les connues, relativement aux équations particulières du quatrième degré, par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire.

(68.) Nous avons vu, relativement au troisième degré, que les équations particulières par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire, sont celles dans lesquelles $4p^3 + 27q^2 = 0$; le quatrième degré a des symptômes analogues que nous allons chercher.

(69.) Puisque dans les valeurs de b du §. 55, la quantité $(4a^2 + p)^2 - 4r$ est essentiellement positive, & que

par conséquent $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ est essentiellement réelle, toutes les valeurs de b seront réelles, & conséquemment toutes les racines de l'équation seront imaginaires, tant que $2a^2 + p$ surpassera $\pm \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$.

Lorsque $2a^2 + p$ égalera $+ \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$, deux racines de l'équation passeront de l'état imaginaire à l'état réel, puisqu'alors deux des valeurs de b passeront de l'état réel à l'imaginaire. Lorsqu'ensuite $2a^2 + p$ égalera $- \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$, les deux autres racines de l'équation passeront de l'imaginaire au réel, puisque deux nouvelles valeurs de b passeront du réel à l'imaginaire. La supposition de $2a^2 + p = \pm \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ a donc lieu, lorsque les racines de l'équation passent du réel à l'imaginaire.

(70.) La supposition de $2a^2 + p = \pm \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ conduit à l'équation suivante,

$$(1)\quad 3a^4 + a^2 p - r = 0;$$

d'où l'on tire

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6},\quad a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}.$$

(71.) Si l'on porte les valeurs de a^2 du *paragraphe précédent*, dans la résolvante (γ) du §. 53, l'on aura, dans la supposition de $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$,

$$(1)\quad (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0,$$

& dans la supposition de $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$,

$$(2)\quad (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

Ce sont les conditions qui ont lieu entre les constantes, relativement aux équations particulières du quatrième degré, par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire.

(72.) Dans l'équation (2) du *paragraphe précédent*, si l'on suppose $r = 0$, on aura $4p^3 + 27q^2 = 0$. Cette dernière condition est l'équation de condition du troisième degré, pour que les racines passent du réel à l'imaginaire. Aussi la

ſuppoſition de $r = 0$ abaiſſe-t-elle l'équation du quatrième degré, au troiſième.

De la Solution particulière des Équations du quatrième degré, par leſquelles les racines paſſent du réel à l'imaginaire.

(73.) Nous avons vu (*§. 70*) que la ſuppoſition de $3a^4 + a^2p - r = 0$, répond au cas où les racines de l'équation du quatrième degré paſſent du réel à l'imaginaire. Cette même ſuppoſition ſubſtituée dans la réſultante (α 1) du *§. 52*, la réduit à $b^4 - 2a^2b^2 - pb^2 = 0$; d'où l'on tire $b^2 = 0$, & $b^2 - 2a^2 - p = 0$. Donc $b = 0$, & $b = \pm\sqrt{(2a^2 + p)}$; $b\sqrt{-1} = 0$, & $b\sqrt{-1} = \pm\sqrt{(-2a^2 - p)}$. Nous avons vu d'ailleurs (*§. 70*) que, relativement aux équations particulières du quatrième degré par leſquelles les racines paſſent du réel à l'imaginaire, on a

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}; \quad a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}.$$

De plus en général $x = a + b\sqrt{-1}$. Les équations particulières du quatrième degré par leſquelles les racines paſſent du réel à l'imaginaire, ont donc pour facteurs,

$$x - \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x - \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0;$$

$$x + \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} - \sqrt{\left(\frac{-4p - 2\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x + \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} + \sqrt{\left(\frac{-4p - 2\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0.$$

$$x - \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x - \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x + \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} + \sqrt{\left(\frac{-4p + 2\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x + \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} - \sqrt{\left(\frac{-4p + 2\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0.$$

Il eſt ſuperflu d'avertir que les premiers facteurs appartiennent à l'un des points de paſſage, c'eſt-à-dire, à celui qui eſt déterminé par la condition $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$. Les autres facteurs appartiennent à l'autre point de paſſage, c'eſt-à-dire, à celui qui eſt déterminé par la condition $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$.

(74.) Dans le dernier paragraphe, nous avons ſuppoſé $a = \pm\sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)}$, $a = \pm\sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)}$; nous aurions pu ſuppoſer également dans la ſuite des calculs, $a = \mp\sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)}$, $a = \mp\sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)}$, ce qui auroit donné des valeurs de x, qui n'euſſent différé de celles du *§. 73*, que par le ſigne, dont le premier radical eût été précédé. On pourroit donc croire, au premier coup-d'œil, que la méthode donne huit racines pour chaque équation du quatrième degré; mais cette concluſion ſeroit précipitée. On a bien en effet huit racines différentes. Mais on doit conſidérer que la réſultante (α 1) du *§. 52*, ne renfermant que des puiſſances paires de a, ſans contenir la quantité q, & que d'ailleurs, dans la réſolvante (γ) du *§. 53*, dont nous avons pareillement fait uſage, a & q n'étant élevés qu'à des puiſſances paires. On ne peut pas traiter ſéparément le cas de q poſitif & de q négatif; on a donc huit racines, parce qu'en effet l'on conſidère à la fois deux équations différentes du quatrième degré.

Définitions des Équations que j'ai nommées Équations de Paſſage; *&* *Remarques ſur les Équations* (1) *&* (2) *du §. 71.*

(75.) Les équations (1) & (2) du *§. 71*, donnent lieu à la remarque ſuivante. Dans le troiſième degré, on peut ſuppoſer que le paſſage des racines réelles aux racines imaginaires ſe fait, ſi je peux m'exprimer ainſi, par une ſeule

équation. En effet, quoiqu'il y ait une infinité de quantités p & q, telles que $4p^3 + 27q^2 = 0$, on peut regarder toutes les équations dans lefquelles les quantités p & q font ainfi conditionnées, comme une feule équation. Il n'en eft pas de même dans le quatrième degré. Comme p & r peuvent avoir toutes les relations poffibles, pourvu que d'ailleurs les valeurs de q que l'on déduit des équations (1) & (2) du *§. 71*, foient réelles, les équations par lefquelles fe fait le paffage des racines réelles aux racines imaginaires, & que je nommerai déformais *équations de paffage*, peuvent avoir des formes tout-à-fait différentes les unes des autres. Quoiqu'en général il ne foit pas poffible de décider à la feule infpection & fans calcul, fi une équation propofée eft dans la claffe des *équations de paffage*, il y en a cependant que l'on peut exclure au premier coup-d'œil: ce font celles dans lefquelles $p^2 + 12r$ eft une quantité négative. En effet $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ eft alors imaginaire, & aucune des deux équations du *§. 71* ne peut être fatisfaite. Dans tout ce que nous allons dire, nous fuppoferons donc toujours que $p^2 + 12r$ eft une quantité pofitive.

(76.) Si l'on vouloit déterminer celles des équations du quatrième degré dans lefquelles $q = 0$, & qui doivent être comprifes dans la claffe des équations de paffage; dans les équations (1) & (2) du *§. 71*, l'on feroit $q = 0$, & l'on auroit $p^3 - 36pr = \pm (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$; d'où l'on tire $r(3p^2 - 12r)^2 = 0$. On voit donc que celles des équations du quatrième degré dans lefquelles $q = 0$, & qui doivent être comprifes dans la claffe des équations de paffages, font celles dans lefquelles d'ailleurs $r = 0$, ou $p^2 - 4r = 0$. Ces conclufions deviennent fenfibles lorfque l'on compare ces réfultats aux racines de l'équation, qui font alors, à caufe de $q = 0$,

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)};$$

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)}.$$

Paragraphes

Paragraphes où l'on démontre que les équations dans lesquelles les quantités $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} \mp p^3 \pm 36pr \mp \frac{27q^2}{2}$, *sont positives, ont des racines d'une nature différente que les équations dans lesquelles ces mêmes quantités sont négatives.*

(77.) Après avoir déterminé *(§. 71)* quelle condition doit avoir lieu entre p, q & r, pour qu'une équation du quatrième degré puisse être comprise dans la classe des *équations de passage*, il reste à examiner si toutes les équations dans lesquelles les quantités $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$, ou $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$, sont, par exemple, positives, ont des racines d'une nature différente que les équations dans lesquelles ces mêmes quantités sont négatives. Quoique l'analogie du troisième degré paroisse conduire à cette conclusion, la question mérite d'être approfondie.

(78.) Si l'on jette les yeux sur les valeurs de b du *§. 55*, on verra que pour que ces valeurs soient réelles, il faut que $2a^2 + p$ surpasse $\pm \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$. On a vu de plus *(§. 70)*, que lors du passage des racines réelles aux racines imaginaires, on a, ou $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$; ou $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$. D'où l'on a conclu que lors des *équations de passage*, l'on avoit pour condition entre les constantes *(§. 71)*,

(1) $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0$;

ou

(2) $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$.

Supposons donc en général $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6} + y$, ou, ce qui revient au même,

$$(3)\quad a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + 6y}{6}.$$

Il est bien évident que cette expression représentera toutes les valeurs de a^2 possibles; de sorte que pour retomber dans les valeurs de a^2 dont il a été question au commencement de ce paragraphe, il ne s'agira que de supposer $y = 0$, ou $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$. Si l'on substitue cette valeur de a^2, dans la résolvante (γ) du §. 53, & que l'on suppose, pour abréger le calcul,

$$(4)\quad z = 6y + \sqrt{(p + 12r)},$$

on en conclura la relation suivante,

$$(5)\quad 4z^3 - 3z(p^2 + 12r) - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0;$$

relation qui devient l'équation (1), par la supposition de $y = 0$, & par conséquent de $z = \sqrt{(p^2 + 12r)}$; & qui devient l'équation (2), par la supposition de $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$, & par conséquent de $z = -\sqrt{(p^2 + 12r)}$. Entrons dans quelques détails.

(79.) Il est aisé de voir que si $z = \sqrt{(p^2 + 12r)}$, l'équation (5) du *paragraphe précédent*, devient

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0.$$

Pour déterminer si d'autres suppositions sur z ne pourroient pas conduire à la même équation, soit en général,

$$4z^3 - 3z(p^2 + 12r) - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$
$$= (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

on aura

$$(1)\quad 4z^3 - 3z(p^2 + 12r) - (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} = 0;$$

équation que l'on sait déjà être divisible par $z - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$. Si l'on exécute la division on aura pour quotient

$$[2z + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}]^2.$$

L'équation (5) du *§. 78*, se réduit donc à

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0,$$

dans deux cas; lorsque $z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$, & lorsque $z = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$. Mais (*§. 78, équation* (4)), $6y = z - \sqrt{(p^2 + 12r)}$, & (*§. 78, équation* (3)),

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + 6y}{6};$$

la condition

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0,$$

a donc lieu entre les constantes, dans deux cas; 1.° lorsque $z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$, $y = 0$, & $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$; 2.° lorsque $z = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$, $y = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{4}$, & $a^2 = \frac{-2p - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}$. Le premier cas appartient au passage des racines réelles aux racines imaginaires de l'équation. Le second cas appartient à une circonstance particulière dont nous parlerons (*§. 82*).

(80.) On trouveroit, par une analyse entièrement semblable, que la condition

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0,$$

a lieu entre les constantes dans deux cas; 1.° lorsque

$$z = -(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}},\ y = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{3},$$

$$\&\ a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6};$$

2.° lorſque $z = \frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$, $y = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}$, & $a^2 = \frac{-2p + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}$.

Le premier cas appartient au paſſage des racines réelles aux racines imaginaires de l'équation. Le ſecond cas appartient à une circonſtance particulière dont nous parlerons (*§. 82.*).

(81.) Si l'on vouloit déterminer pareillement dans quelles circonſtances la condition entre les connues ſe réduit à $p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$; il eſt aiſé de voir que dans ce cas l'équation (5) du *§. 78*, donneroit pour condition,

$$(1)\ 4z^3 - 3z(p^2 + 12r) = 0.$$

De cette dernière équation, combinée avec les équations (4) & (3) du *§. 78*, l'on tire

$z = 0$; $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$; $a^2 = -\frac{p}{6}$.

$z = +\frac{3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$; $y = +(3^{\frac{1}{2}} - 2) \times \frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}$;

$$a^2 = \frac{-2p + 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}.$$

$z = -\frac{3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$; $y = -(3^{\frac{1}{2}} + 2) \times \frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}$;

$$a^2 = \frac{-2p - 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}.$$

Équations qui déterminent ces cas particuliers.

Remarque ſingulière ſur le quatrième degré, analogue à celle du §. 27, ſur le troiſième degré.

(82.) Les circonſtances ſingulières des *§. 79 & 80*, lors deſquelles la condition entre les connues, correſpondante au paſſage des racines réelles aux imaginaires, a lieu, quoique

les racines ne passent pas du réel à l'imaginaire, méritoient d'être remarquées. Elles sont entièrement analogues à une remarque semblable que nous avons faite sur le troisième degré (§. 27). Dans ces cas singuliers, les connues atteignent la condition par laquelle les racines passent du réel à l'imaginaire, mais sans cependant que les équations qui ont cette propriété, puissent être réputées *équations de passage.* Nous reviendrons sur cette remarque.

Relation entre les valeurs de a^2, *& les quantités* $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} \mp p^3 \pm 36pr \mp \frac{27q^2}{2}$, *relativement à leurs propriétés d'être positives ou négatives.*

(83.) La seule valeur de z, par laquelle la quantité $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ passe du positif au négatif, est $z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$; car $z = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$ qui conduit également à une valeur nulle de $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$, ne répond pas au point de passage des racines réelles aux racines imaginaires du quatrième degré, ainsi que nous le ferons voir dans la suite. Pour déterminer maintenant la relation entre la quantité

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$

relativement à sa propriété d'être positive ou négative, & la nature des racines de l'équation du quatrième degré, soit

$$(1) \quad z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + \delta.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (5) du §. 78, elle deviendra,

$$(2)\ (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + 9(p^2 + 12r)\,\delta + 12(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}\,\delta^2 + 4\delta^3 - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0.$$

(84.) Si l'on ſuppoſe maintenant δ poſitif. Comme la quantité $p^2 + 12r$ eſt poſitive, d'après la remarque du *§. 75*; $9(p^2 + 12r)\,\delta + 12(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}\,\delta^2 + 4\delta^3$, ſera poſitif. Mais *(§. 83, équation* (2)*)*

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$
$$= -9(p^2 + 12r)\,\delta - 12(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}\,\delta^2 - 4\delta^3.$$

Donc, dans la ſuppoſition de δ poſitif, la quantité

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$

ſera négative.

(85.) L'on a vu *(§. 78, équation* (4)*)*, qu'en général $6y = z - \sqrt{(p^2 + 12r)}$, & *(§. 78, équation* (3)*)*, que $a^2 = \frac{-p + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + 6y}{6}$; donc, dans la ſuppoſition de $z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + \delta$; l'on a à la fois $6y = \delta$, & $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + \delta}{6}$. Donc $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ eſt une quantité négative, lorſque $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + \delta}{6}$, δ étant d'ailleurs une quantité poſitive.

(86.) Lorſque $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + \delta}{6}$, δ étant d'ailleurs une quantité poſitive, a^2 ſurpaſſe $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$. Donc, lorſque a^2 ſurpaſſe $\frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r)}}{6}$, la quantité

$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ eſt eſſentiellement négative.

(87.) Puiſque l'équation (2) du §. 83 peut ſe mettre ſous la forme ſuivante,

$$(1)\ (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$
$$= -\delta[2\delta + 3\sqrt{(p^2 + 12r)}]^2;$$

il eſt évident que ſi l'on ſuppoſe δ négatif, la quantité $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ ſera eſſentiellement poſitive. Mais à cauſe de $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + \delta}{6}$, ſi δ eſt négatif, a^2 ſera eſſentiellement plus petit que $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$. Donc ſi a^2 eſt moindre que $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$, la quantité $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ eſt eſſentiellement poſitive.

(88.) On démontreroit, par des raiſonnemens analogues, que ſi a^2 ſurpaſſe $\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$, la quantité $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$ eſt eſſentiellement poſitive; & que ſi a^2 eſt moindre que $\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$, la quantité $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$ eſt eſſentiellement négative.

Confirmation des réſultats précédens, au moyen d'une conſtruction géométrique.

(89.) Quoique les réſultats précédens n'aient pas beſoin pour être ſenſibles, d'être repréſentés par une courbe, j'ai cru qu'il ne ſeroit pas inutile d'en remettre l'enſemble ſous les

yeux, & de repréſenter, par une ſuite continue de points, la relation entre les différentes valeurs de $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$, & les racines correſpondantes des équations du quatrième degré. Rien n'eſt plus ſimple que la ſolution de cette queſtion. Soit en effet

$$(1)\quad u = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2};$$

ſi dans l'équation (5) du *§. 78*, l'on ſubſtitue $u - (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ à $- p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$, on aura

$$(2)\quad 4z^3 - 3z(p^2 + 12r) - (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + u = 0;$$

équation qui ſatisfait au Problème.

(90.) L'équation précédente ne donne pas préciſément la relation entre u & les racines de l'équation; elle donne la relation entre u & z. Mais les équations (3) & (4) du *§. 78* font voir qu'il y a entre a & z la relation ſuivante

$$(1)\quad a^2 = \frac{-p+z}{6}.$$

Cette dernière équation donne donc la relation entre z & a. L'équation (2) du *§. 89*, donne la relation entre z & u; on a donc la relation entre u & les racines de la propoſée.

Fig. 9. (91.) Si l'on prend pour lignes des coordonnées, les droites *POP, MOM;* que le point *O* ſoit l'origine de ces coordonnées; la droite *OP* la ligne des abciſſes z; la droite *OM* la ligne des ordonnées u; & que l'origine *O* ſoit telle que l'on ait à ce point $z = 0$, & par conſéquent *(équation* (1) *§. 90)*, $a^2 = \frac{-p}{6}$. Si de plus, l'on mène parallèlement à la ligne *POP*, les droites pp, $\pi\pi$, telles que, lors des interſections $m, m^{\text{I}}, m^{\text{II}}, m^{\text{III}}, m^{\text{IV}}, m^{\text{V}}, m^{\text{VI}}$, de la courbe, avec les droites PP, pp, $\pi\pi$, les ordonnées u ſoient reſpectivement égales à zéro, à $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$, & à $2(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$.

Cette

Cette construction sera représentée par la *fig. 9*; & le lieu géométrique de l'équation (2) du §. 89, sera une parabole cubique, qui a des branches infinies paraboliques, dans la direction de la ligne des ordonnées. Fig. 9.

(92.) L'équation (2) du §. 89, fait voir que les conditions que nous avons imposées aux valeurs de u, pour mener les droites PP, pp, $\pi\pi$, supposent que, lors des intersections de ces différentes droites avec la courbe en question, les relations entre les constantes de l'équation du quatrième degré, sont respectivement

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0;$$

$$p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0;$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

(93.) Supposons d'abord z plus grand que $\sqrt{(p^2 + 12r)}$. Dans l'équation (2) du §. 89, les valeurs de u seront négatives, & la courbe s'étendra au-dessous de la ligne POP des abscisses. Les quantités $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ seront donc négatives (*équation* (1) §. 89). Nous remarquerons ici, qu'à cause de l'équation (1) du §. 90, a^2 sera alors plus grand que $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$.

(94.) Soit $z = \sqrt{(p^2 + 12r)}$, & par conséquent (*équation* (1) §. 90), $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$. La valeur correspondante de u dans l'équation (2) du §. 89, sera $u = 0$. La courbe coupe la ligne des abscisses au point m; & l'on a pour condition (§. 89, *équation* (1)), $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0$.

(95.) Soit $z = \frac{3^{\frac{1}{2}}\sqrt{(p^2 + 12r)}}{2}$, & par conséquent (*équation* (1), §. 90), $a^2 = \frac{-2p + 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{(p^2 + 12r)}}{12}$. La

Fig. 9. valeur correſpondante de u, dans l'équation (2) du *§. 89*, ſera $u = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$. La courbe coupe alors *(§. 91)* la ligne pp au point m'; & l'on a pour condition *(§. 89, équation* (1)*)*, $p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$.

(96.) Soit $z = \frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{2}$, & par conſéquent *(équation* (1) *§. 90)*, $a^2 = \frac{-2p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{12}$. La valeur correſpondante de u dans l'équation (2) du *§. 89*, ſera $u = 2(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$. La courbe vient alors toucher la ligne $\pi\pi$ *(§. 91)*, au point m'' où elle s'arrête; & l'on a pour condition *(§. 89, équation* (1)*)*, $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$; c'eſt un des cas ſinguliers dont nous avons parlé *(§. 82)*.

(97.) Soit $z = 0$, & par conſéquent *(équ.* (1) *§. 90)*, $a^2 = \frac{-p}{6}$; la valeur correſpondante de u dans l'équation (2) du *§. 89*, ſera $u = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$. La courbe coupe alors *(§. 91)* la ligne pp au point m'''; & l'on a pour condition *(§. 89, équation* (1)*)*, $p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$.

(98.) Soit $z = \frac{-(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$, & par conſéquent *(équation* (1) *§. 90)*, $a^2 = \frac{-2p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{12}$. La valeur correſpondante de u dans l'équation (2) du *§. 89*, ſera $u = 0$. La courbe touche alors *(§. 91)* la ligne Pp au point m^{IV}, où elle s'arrête; & l'on a pour condition *(§. 89, équation* (1)*)*, $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0$; c'eſt un des cas ſinguliers dont nous avons parlé *(§. 82)*.

(99.) Soit $z = \frac{-3^{\frac{1}{2}}(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$, & par conséquent Fig. 9.
(équation (1), *§. 90)*, $a^2 = \frac{-2p-3^{\frac{1}{2}}\sqrt{(p^2+12r)}}{12}$. La valeur correſpondante de u dans l'équation (2) du *§. 89*, ſera $u = (p^2+12r)^{\frac{3}{2}}$. La courbe coupe alors *(§. 91)*, la ligne pp au point m^{v}; & l'on a pour condition *(§. 89, équation* (1))

$$p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

(100.) Soit $z = -(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent *(équation* (1), *§. 90)*, $a^2 = \frac{-p-(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{6}$. La valeur correſpondante de u dans l'équation (2) du *§. 89*, ſera $u = 2(p^2+12r)^{\frac{3}{2}}$. La courbe coupe alors *(§. 91)* la ligne $\pi\pi$ au point m^{vi}; & l'on a pour condition *(§. 89, équation* (1))

$$(p^2+12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

(101.) Si l'on ſuppoſe enſuite z plus petit que $-(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent *(équation* (1) *§. 90)*, a^2 plus petit que $\frac{-p-\sqrt{(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}}{6}$; la valeur correſpondante de u dans l'équation (2) du *§. 89*, ſurpaſſera $2(p^2+12r)^{\frac{3}{2}}$. La courbe s'étend au-deſſus de la ligne $\pi\pi$, & l'on a alors *(équation* (1), *§. 89)* la quantité

$$(p^2+12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$$

égale à une quantité négative.

(102.) On voit par-là que lorſque z eſt plus grand que $\sqrt{(p^2+12r)}$, & que par conséquent *(équation* (1) *§. 90)*, a^2 eſt plus grand que $\frac{-p+(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{6}$, des deux quantités

Fig. 9. $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$, & $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$ la première est négative, & la seconde est positive.

Lorsque $z = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$, & que par conséquent $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$, la quantité $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ passe du négatif au positif; & la quantité $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$ reste positive.

Lorsqu'enfin $z = -(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$, & que par conséquent (*équation §. 90*), $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ la quantité $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$ passe elle-même du positif au négatif.

On peut remarquer aussi, conformément à ce qui a été dit (*§. 82*), que les conditions entre les connues, correspondantes au passage des racines réelles aux racines imaginaires, peuvent avoir lieu, sans que pour cela les racines passent du réel à l'imaginaire, ou réciproquement. Ce sont les conditions correspondantes aux points m^{II}, m^{IV}.

Des racines des Équations particulières du quatrième degré dans lesquelles les constantes ont les combinaisons déterminées dans les §. 95, 96, 97, 98 & 99.

(103.) Nous avons donné (*§. 73*) les racines des équations particulières du quatrième degré, par lesquelles les racines passent de l'état réel à l'imaginaire; c'est-à-dire, celles relatives aux suppositions des *§. 94* & *100*. Si l'on vouloit avoir les racines des équations particulières du quatrième degré, dans lesquelles les constantes ont entre

elles, les combinaiſons déterminées dans les §. 95, 96, 97, 98 & 99, on parviendroit aux réſultats ſuivans.

Dans la ſuppoſition du §. 95,

$$x = + \sqrt{\left(\frac{-2p + 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}\right)}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-4p - 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{[2p^2 + 3^{\frac{1}{2}}p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}]}}{12}\right)};$$

$$x = - \sqrt{\left(\frac{-2p + 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}\right)}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-4p - 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{[2p^2 + 3^{\frac{1}{2}}p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}]}}{12}\right)}.$$

Dans la ſuppoſition du §. 96,

$$x = + \sqrt{\left(\frac{-2p + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}\right)}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-4p - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{[2p^2 + 2p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 24r]}}{12}\right)};$$

$$x = - \sqrt{\left(\frac{-2p + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}\right)}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-4p - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{[2p^2 + 2p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 24r]}}{12}\right)}.$$

Dans la ſuppoſition du §. 97,

$$x = + \sqrt{\left(\frac{-p}{6}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{-2p - \sqrt{(p^2 - 36r)}}{6}\right)};$$

$$x = - \sqrt{\left(\frac{-p}{6}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{-2p + \sqrt{(p^2 - 36r)}}{6}\right)}:$$

Dans la ſuppoſition du §. 98,

$$x = + \sqrt{\left(\frac{-2p - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}\right)}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-4p + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{[2p^2 - 2p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 24r]}}{12}\right)};$$

$$x = - \sqrt{\left(\frac{-2p - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}\right)}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-4p + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{[2p^2 - 2p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 24r]}}{12}\right)}.$$

Dans la ſuppoſition du §. 99,

$$x = + \sqrt{\left(\frac{-2p - 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}\right)}$$
$$\pm \sqrt{\left(\frac{-4p + 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\sqrt{[2p^2 - 3^{\frac{1}{2}}p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}]}}{12}\right)};$$

$$x = - \sqrt{\left(\frac{-2p - 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}\right)}$$
$$\pm \sqrt{\left(\frac{-4p + 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}}\sqrt{[2p^2 - 3^{\frac{1}{2}}p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}]}}{12}\right)}.$$

(104.) On pourroit appliquer à ces dernières déterminations, des remarques analogues à celles du §. 74.

Conditions entre les valeurs de a^2, *& les racines de la propoſée, relativement à la propriété de ces racines d'être ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires.*

(105.) J'ai déterminé dans les paragraphes précédens, la relation entre les valeurs de a^2, & les quantités $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$, & $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$, relativement à leurs propriétés d'être poſitives ou négatives. Afin que l'on puiſſe conclure la nature des racines de l'équation, par l'inſpection du ſigne des quantités précédentes, il ne s'agit que de démontrer que les conditions qui ont lieu entre les valeurs de a^2, & ces dernières quantités relativement à leurs propriétés d'être poſitives ou négatives, ont également lieu entre les valeurs de a^2, & les racines de la propoſée, relativement à la propriété de ces racines d'être ou toutes réelles ou toutes imaginaires, ou en partie réelles, & en partie imaginaires.

(106.) Pour y parvenir, je ſuppoſe une équation de cette forme,

(1) $(2a^2 + p)^2 = (4a^2 + p)^2 - 4r + 4\varepsilon$;
d'où l'on tire

$$(2)\ 3a^4 + a^2 p - r + \varepsilon = 0.$$

Il est bien évident que si ε est une quantité positive, dans les expressions de b du §. 55, $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ sera moindre que $2a^2 + p$. Si au contraire ε est une quantité négative, $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ sera plus grand que $2a^2 + p$. Supposons en général, comme dans le §. 78,

$$(3)\ a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + 6y}{6}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (2) du présent paragraphe, elle deviendra

$$(4)\ \varepsilon + y[3y + \sqrt{(p^2 + 12r)}] = 0;$$

d'où l'on peut conclure d'abord que $\varepsilon = 0$, & que par conséquent (*équation 1*), $(2a^2 + p)^2 = (4a^2 + p)^2 - 4r$, lorsque $y = 0$, & lorsque $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$; c'est-à-dire (*équation 3*) lorsque $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$; & lorsque $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$. Ces mêmes valeurs de a^2 ont lieu (§. 94 & 100) lorsque les quantités $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr + \frac{27q^2}{2}$, & $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$, passent respectivement, la première du négatif au positif, & la seconde du positif au négatif.

(107.) Dans l'équation (4) du paragraphe précédent, si l'on suppose y positif, la quantité ε est essentiellement négative. ε devient ensuite positif, si l'on suppose à y une valeur négative plus petite que $\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$; ε redevient enfin négatif, si l'on suppose à y une valeur négative plus grande que $\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$.

On peut conclure de-là que dans les expressions de b du *§. 55*, $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ est moindre que $2a^2 + p$, lorsque les valeurs de y sont comprises entre $y = 0$ & $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$, ou, ce qui revient au même, lorsque les valeurs de a^2 sont comprises entre $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ & $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$. Dans toute autre circonstance, les valeurs de ε sont essentiellement négatives, & par conséquent *(§. 106)*, $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ sera plus grand que $2a^2 + p$. Voyons quelle conséquence on peut tirer de cette recherche.

Paragraphes où l'on démontre que les équations du quatrième degré, relativement auxquelles les quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} \mp p^3 \pm 36pr \mp \frac{27q^2}{2},$$

sont l'une positive & l'autre négative, ont deux racines réelles & deux racines imaginaires.

(108.) Les quatre valeurs de b, qui servent à résoudre l'équation du quatrième degré, sont *(§. 55)*,

$$(1)\ b = +\sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

$$(2)\ b = -\sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

$$(3)\ b = +\sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

$$(4)\ b = -\sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

(109.) Si dans les expressions précédentes de b, on suppose les valeurs de a^2 éliminées au moyen de l'équation

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + 6y}{6};$$

& que

& que de plus y ſoit poſitif; on a vu (§. 107), que

$$\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]} \text{ ſurpaſſe } 2a^2 + p.$$

Donc, quelle que ſoit la valeur de $2a^2 + p$, les valeurs (1) b, (2) b du §. 108, ſont réelles, & les valeurs (3) b, (4) b du même paragraphe, ſont imaginaires. Mais lorſque y eſt poſitif, a^2 ſurpaſſe $\frac{-p+\sqrt{(p^2+12r)}}{6}$; & des deux quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

la première eſt négative, & la ſeconde eſt poſitive (§. 86 & 88). Donc, lorſque des quantités précédentes, la première eſt négative & la ſeconde eſt poſitive, l'équation dans laquelle cette propriété a lieu, a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

(110.) Nous avons vu pareillement (§. 107) que, ſi l'on donne à y une valeur négative plus grande que $\frac{\sqrt{(p^2+12r)}}{3}$,

$$\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]} \text{ ſurpaſſe encore } 2a^2 + p.$$

Les valeurs (1) b, (2) b du §. 108, ſont donc eſſentiellement réelles, & les valeurs (3) b, (4) b, ſont eſſentiellement imaginaires. Mais lorſque y a une valeur négative plus grande que $\frac{\sqrt{(p^2+12r)}}{3}$, a^2 eſt moindre que $\frac{-p-\sqrt{(p^2+12r)}}{6}$; & des deux quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

la première eſt poſitive & la ſeconde eſt négative (§. 87 & 88). Donc, lorſque des deux quantités

$$(p^2 + 12\,r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36\,pr - \frac{27q^2}{2},$$

&

$$(p^2 + 12\,r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36\,pr + \frac{27q^2}{2},$$

la première est positive & la seconde est négative, l'équation dans laquelle cette propriété a lieu, a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

(111.) Donc en général *(§. 109 & 110)*, si des quantités

$$(p^2 + 12\,r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36\,pr - \frac{27q^2}{2},$$

&

$$(p^2 + 12\,r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36\,pr + \frac{27q^2}{2},$$

l'une est positive & l'autre est négative; l'équation du quatrième degré a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

Paragraphes où l'on démontre que les équations du quatrième degré relativement auxquelles les quantités

$$(\mathrm{p}^2 + 12\ \mathrm{r})^{\frac{3}{2}} - \mathrm{p}^3 + 36\ \mathrm{pr} - \frac{27\,\mathrm{q}^2}{2},$$

$$\&\ (\mathrm{p}^2 + 12\,\mathrm{r})^{\frac{3}{2}} + \mathrm{p}^3 - 36\ \mathrm{pr} + \frac{27\,\mathrm{q}^2}{2},$$

sont toutes deux positives, ont essentiellement leurs racines ou toutes réelles, ou toutes imaginaires.

(112.) Dans l'équation $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12\,r)} + 6y}{6}$, si l'on suppose à y une valeur comprise entre $y = 0$, & $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12\,r)}}{3}$, on a vu *(§. 107)*, que $\sqrt{[(4\,a^2 + p)^2 - 4\,r]}$ est moindre que $2\,a^2 + p$. Les valeurs de b du *§. 108* peuvent alors être toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. Elles sont réelles, si d'ailleurs $2\,a^2 + p$ est une quantité positive;

elles sont imaginaires, si $2a^2 + p$ est une quantité négative. Mais lorsque les valeurs de y sont comprises entre $y = 0$, & $y = \frac{-\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$, les valeurs de a^2 sont comprises entre $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$, & $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$, ou, ce qui revient au même, ces valeurs sont moindres que $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$, & plus grandes que $\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$; donc (*§. 87 & 88*), les quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$

$$\& \ (p + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$$

sont essentiellement positives.

(113.) Donc les équations du quatrième degré relativement auxquelles les quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$

$$\& \ (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$$

sont toutes deux positives, ont essentiellement leurs racines toutes réelles ou toutes imaginaires. Elles sont toutes réelles, lorsque d'ailleurs $2a^2 + p$ est une quantité négative; elles sont toutes imaginaires, lorsque $2a^2 + p$ est une quantité positive. Il ne s'agit plus maintenant que de trouver un symptôme relatif à cette dernière supposition.

Quant au cas où les quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - 27\frac{q^2}{2}$$

$$\& \ (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + 27\frac{q^2}{2}$$

seroient toutes deux négatives, il ne peut avoir lieu.

Paragraphes dans lesquels on démontre que dans les mêmes circonstances que ci-dessus (§. 113), *les racines de l'Équation sont toutes imaginaires, lorsque* p *est une quantité positive.*

(114.) Puisque par la supposition fondamentale du Mémoire, a est une quantité essentiellement réelle, $2a^2$ est essentiellement positif. $2a^2 + p$ est donc essentiellement une quantité positive, lorsque p est positif. Donc dans les mêmes circonstances que ci-dessus, les valeurs de b sont toutes réelles, & par conséquent les racines de l'équation sont toutes imaginaires, lorsque p est une quantité positive.

(115.) Il ne peut y avoir d'incertitude que lorsque p est négatif; puisqu'en effet $2a^2$ peut alors être une quantité positive, sans que $2a^2 + p$ soit positif; lorsque, par exemple, $2a^2$ est moindre que p.

Paragraphes dans lesquels on démontre que les racines de l'Équation sont toutes imaginaires, même lorsque p *est une quantité négative, quand d'ailleurs* $p^2 - 4r$ *est une quantité négative.*

(116.) Il y a un cas où p étant négatif, & $2a^2 + p$ étant pareillement négatif, toutes les racines de l'équation sont cependant imaginaires; c'est lorsque $p^2 - 4r$ est une quantité négative. En effet, puisque par la supposition, $2a^2 + p$ est une quantité négative, si l'on introduit dans le calcul, une équation de la forme suivante,

$$(1) \quad 2a^2 + p + \zeta = 0;$$

la quantité ζ sera essentiellement positive. D'ailleurs $p + \zeta$ est essentiellement négatif, puisqu'autrement a seroit une quantité imaginaire, ce qui est contraire aux suppositions fondamentales de ce Mémoire. Au moyen de l'équation

(1), si l'on élimine la valeur de a^2 dans les expressions de b^2 du §. 55, elles deviendront

$$2b^2 = -\zeta + \sqrt{[4\zeta(p+\zeta) + p^2 - 4r]},$$
$$2b^2 = -\zeta - \sqrt{[4\zeta(p+\zeta) + p^2 - 4r]}.$$

ζ est essentiellement positif, ainsi que nous venons de le dire; $p + \zeta$ est négatif; donc $4\zeta(p + \zeta)$ est négatif. $p^2 - 4r$ est aussi négatif par la supposition; donc le radical renferme la somme de deux quantités négatives. Les valeurs de b^2 renferment donc des imaginaires. Toutes les racines de la proposée *(§. 6 & 58)* sont donc imaginaires. Nous avons vu *(§. 63)*, que cette supposition ne pourroit avoir lieu qu'autant que q seroit ou imaginaire, ou égal à zéro dans la proposée.

Paragraphes dans lesquels on démontre que dans les mêmes circonstances que ci-dessus (§. 113), & lorsque d'ailleurs p *est une quantité négative, &* $p^2 - 4r$ *une quantité positive; les racines de l'équation sont toutes imaginaires quand la fonction* $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ *est une quantité positive; & que ces racines sont toutes réelles, quand la fonction* $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ *est une quantité négative.*

(117.) Le symptôme du §. 113, apprend bien que lorsqu'il a lieu, toutes les racines de l'équation sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires; mais il faut encore avoir un symptôme particulier pour déterminer dans lequel des deux cas on est précisément. Nous avons déjà déterminé ce symptôme pour un très-grand nombre de circonstances; il ne s'agit plus que de discuter le symptôme particulier pour le cas où p étant négatif, $p^2 - 4r$ est une quantité positive.

(118.) Pour y parvenir, dans la résultante γ du §. 53, j'élimine a^2 au moyen de l'équation (1) du §. 116, dans laquelle je ne supposerai plus que ζ soit essentiellement positif, & cette résultante devient

$$(1)\ p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2} = -4\zeta(\zeta + p)^2 - \zeta(p^2 - 4r).$$

D'où l'on voit que quand $\zeta = 0$, on a pour condition entre les connues,

$$(2)\ p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2} = 0.$$

Il s'agit d'examiner maintenant si cette dernière fonction change de signe par les mêmes suppositions qui font passer la quantité $2a^2 + p$, du positif au négatif.

(119.) L'équation (1) du paragraphe précédent fait voir que la fonction $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ est égale à zéro dans deux cas différens; lorsque $\zeta = 0$, & lorsque

$$4(\zeta + p)^2 + p^2 - 4r = 0.$$

De cette dernière équation l'on tire $\zeta = \frac{-2p \pm \sqrt{(-p^2 + 4r)}}{2}$, quantité imaginaire, puisque par la supposition $-p^2 + 4r$ est une quantité négative, & qui par conséquent ne peut avoir lieu dans notre question; car alors, à cause de l'équation (1) du *§. 116*, a^2, & par conséquent a, renfermeroit une imaginaire, ce qui est contraire aux suppositions fondamentales du Mémoire. La fonction $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ n'est donc égale à zéro que lorsque $\zeta = 0$. Cette fonction ne change donc de signe que lorsque ζ change de signe. Mais, à cause de $2a^2 + p = -\zeta$, la quantité $2a^2 + p$ change de signe dans les mêmes circonstances; le signe de la fonction $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ est donc très-propre à déterminer le signe de $2a^2 + p$.

(120.) Puisque d'une part [*§. 116, équation (1)*] $2a^2 + p = -\zeta$; & que d'une autre part [*§. 118, équat. (1)*],

$$p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2} = -4\zeta(\zeta + p)^2 - \zeta(p^2 - 4r);$$

que de plus dans cette dernière expreſſion $(\zeta + p)^2$ eſt une quantité eſſentiellement poſitive, attendu que c'eſt un quarré; que d'ailleurs, par la ſuppoſition, $p^2 - 4r$ eſt poſitif; on voit que $2a^2 + p$ a le même ſigne que la quantité $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$. Mais les racines de la propoſée ſont toutes quatre réelles, ſi $2a^2 + p$ eſt une quantité négative; elles ſont toutes quatre imaginaires, ſi $2a^2 + p$ eſt une quantité poſitive. Donc les racines de la propoſée ſont toutes quatre réelles, ſi $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ eſt une quantité négative. Les racines de la propoſée ſont toutes quatre imaginaires, ſi $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ eſt poſitif.

Paragraphes dans leſquels on démontre que dans les mêmes circonſtances que ci-deſſus (§. 113), *&* *lorſque d'ailleurs* p *eſt une quantité négative, &* $p^2 - 4r$ *une quantité poſitive, il n'eſt pas néceſſaire d'avoir recours au ſymptôme du paragraphe précédent; que la fonction* $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ *ne peut être que négative; & que par conſéquent les racines de l'équation ne peuvent être que toutes réelles.*

(121.) Quoique dans les circonſtances *(ſ. 113)* & lorſque d'ailleurs p eſt une quantité négative, & $p^2 - 4r$ une quantité poſitive, nous ayons donné un ſymptôme pour déterminer ſi toutes les racines de la propoſée ſont réelles ou ſi elles ſont imaginaires, il n'eſt pas néceſſaire d'avoir recours à ce ſymptôme, & il eſt facile de démontrer que dans ce cas, la fonction $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ ne peut être que négative; & que par conſéquent les racines de l'équation ne peuvent être que toutes réelles.

(122.) Pour y parvenir, on ſe rappellera *(§. 120)*, que la fonction $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ ne pourroit être poſitive, qu'autant que $2a^2 + p$ ſeroit une quantité poſitive, & par conſéquent, qu'autant que dans l'équation $2a^2 + p + \zeta = 0$, la quantité ζ ſeroit négative. On ſe rappellera pareillement *(§. 109, 110 & 112)*, que la propoſée ne peut avoir ſes quatre racines de même nature, c'eſt-à-dire, toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, que lorſque dans l'équation

$$(1)\ a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + 6y}{6},$$

y eſt d'ailleurs une quantité négative. Donc, pour que la propoſée pût avoir ſes quatre racines de même nature, & qu'en même temps la fonction $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$, pût être poſitive dans les ſuppoſitions dont il s'agit, il faudroit que quand $p^2 - 4r$ eſt poſitif & que p eſt négatif, ζ & y puſſent être négatifs à la fois; or c'eſt ce qui n'a pas lieu. En effet, ſi dans l'équation (1) du préſent paragraphe, on élimine a^2 au moyen de ſa valeur $a^2 = \frac{-p-\zeta}{2}$; on aura, après toutes les réductions,

$$(2)\ p^2 - 4r = -4p\zeta - 3(\zeta + 2y)^2 - 8py.$$

$-3(\zeta + 2y)^2$ eſt eſſentiellement négatif; p eſt auſſi négatif par la ſuppoſition. $p^2 - 4r$ ne peut donc être poſitif, qu'autant que les deux quantités ζ & y, ou au moins l'une des deux eſt poſitive. Donc, ſi on ſuppoſe que y eſt négatif, ce qui eſt eſſentiel pour que les quatres racines de l'équation ſoient de même nature, il faut que ζ ſoit poſitif. Donc, dans le cas que nous conſidérons la fonction $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ ne peut être que négative; & par conſéquent les racines de la propoſée ne peuvent être que toutes quatre réelles.

Remarques

Remarques sur les Équations dans lesquelles $p^2 + 12r$ *est une quantité négative.*

(123.) Il n'y auroit rien à ajouter à ce que j'ai dit sur le quatrième degré, s'il n'y avoit point une classe entière d'équations qui ne sont point comprises dans les recherches précédentes. Ce sont celles dans lesquelles $p^2 + 12r$ est une quantité négative. En effet j'ai prescrit, pour déterminer la nature des racines d'une équation du quatrième degré, d'examiner si les fonctions

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

sont positives ou négatives. Mais si $p^2 + 12r$ est négatif, les fonctions précédentes sont imaginaires. Les symptômes dont il a été question jusqu'ici, ne paroissent donc pas s'appliquer à ce genre d'équations.

(124.) Pour entendre à quoi tient la difficulté, on se rappellera que pour déterminer la nature des racines des équations du quatrième degré, j'ai supposé que l'on avoit en général $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + 6y}{6}$, expression qui ne renferme pas la quantité q. On se rappellera pareillement que les équations particulières par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire, ou réciproquement, & que j'ai nommées *(§. 75), équations de passage,* sont celles relativement auxquelles $y = 0$, ou $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$, & par conséquent, celles relativement auxquelles, $a^2 = \frac{-p \pm \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$.

La méthode détermine donc la relation qui doit exister entre a, p & r, pour que la proposée puisse être une *équation de passage.* Mais cette première condition ne suffit pas ; & c'est alors la valeur de q qui détermine, si la proposée dans laquelle

a, p & r ſont conditionnés ainſi qu'il convient pour qu'elle puiſſe être une *équation de paſſage*, eſt réellement une *équation de paſſage.* Mais il eſt évident qu'il y a une infinité de relations entre p & r, qui ne peuvent jamais appartenir à des *équations de paſſage*, quelle que ſoit la valeur que l'on ſuppoſe d'ailleurs à q. Ce ſont celles qui rendent imaginaires l'expreſſion $a^2 = \frac{-p \pm \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$, c'eſt-à-dire, toutes les relations dans leſquelles la quantité $p^2 + 12r$ eſt négative.

Paragraphes où l'on démontre que les équations dans leſquelles $p^2 + 12r$ *eſt une quantité négative, ont eſſentiellement deux racines réelles, & deux racines imaginaires.*

(125.) Puiſque toutes les relations entre p & r d'où il réſulte que $p^2 + 12r$ eſt une quantité négative, ne peuvent jamais appartenir à des *équations de paſſage*, quelle que ſoit d'ailleurs la valeur de q; dans toute équation où $p^2 + 12r$ eſt une quantité négative, les racines ne peuvent jamais changer de nature, par des ſuppoſitions particulières ſur q; car autrement ces ſuppoſitions particulières appartiendroient à des *équations de paſſage*, ce qui eſt contraire à l'hypothèſe. La nature des racines eſt donc toujours la même, quelle que ſoit d'ailleurs la valeur de q. Il ſuffit donc, pour connoître généralement la nature des racines de ces équations, dans tous les cas poſſibles, de les déterminer dans une certaine ſuppoſition priſe à volonté ſur la quantité q. Parmi toutes ces ſuppoſitions également permiſes, la plus ſimple eſt ſans contredit celle où $q = 0$. Elle réduit l'équation générale du quatrième degré, à la forme ſuivante, $x^4 + px^2 + r = 0$; qui a pour racines,

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)};\ x = \pm \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)}.$$

C'eſt la nature de ces dernières racines qui va déterminer celle des racines de toutes les équations dans leſquelles $p^2 + 12r$ eſt une quantité négative.

(126.) Puiſque par la ſuppoſition, $p^2 + 12r$ eſt une quantité négative, il eſt évident que dans la propoſée, r eſt négative; $p^2 - 4r$ eſt donc une quantité poſitive plus grande que p. Donc $\sqrt{(p^2 - 4r)}$ ſurpaſſe p; & des quatre valeurs de x du paragraphe précédent, deux ſont eſſentiellement réelles & deux ſont imaginaires, quels que ſoient d'ailleurs la valeur & le ſigne de p.

Donc, les équations dans leſquelles $p + 12r$ eſt une quantité négative, ont eſſentiellement deux racines réelles & deux racines imaginaires.

(127.) Quoiqu'aucune des équations dans leſquelles $p^2 + 12r$ eſt une quantité négative, ne puiſſe être une *équation de paſſage;* on ne doit pas exclure pour cela toutes celles dans leſquelles $p^2 + 12r = 0$. Il y en a une qui dans ce dernier cas peut être compriſe parmi les *équations de paſſage;* c'eſt celle relativement à laquelle la valeur de q eſt déterminée par la condition ſuivante,

$$(1) \quad \pm 2p^3 \mp 72pr \pm 27q^2 = 0;$$

ou plutôt, à cauſe que d'ailleurs $p^2 + 12r = 0$,

$$(2) \quad \pm 8p^3 \pm 27q^2 = 0.$$

Cette dernière condition ne peut avoir lieu, qu'autant que dans la propoſée, la valeur de p eſt négative; car autrement, q ſeroit imaginaire.

(128.) On voit auſſi que comme dans ce cas particulier, des deux fonctions dont il faut déterminer le ſigne pour en conclure la nature des racines de la propoſée *(§. 111 & 113)*, l'une eſt poſitive & l'autre eſt négative, l'équation particulière dans laquelle $p^2 + 12r = 0$, & qui d'ailleurs eſt *équation de paſſage*, a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

Récapitulation sommaire de ce qui vient d'être démontré, relativement à la méthode pour déterminer la nature des racines des équations du quatrième degré.

(129.) Ce que nous venons de démontrer relativement à la méthode pour déterminer la nature des racines des équations du quatrième degré, se réduit à ceci.

Soit

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

une équation quelconque du quatrième degré.

Soient de plus,

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2};$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

deux fonctions dont on déterminera le signe; ou, ce qui revient au même, relativement auxquelles on constatera si elles sont positives ou négatives.

Si de ces deux fonctions l'une est positive & l'autre est négative, la proposée a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

Si ces deux fonctions sont toutes deux positives, la proposée a ses racines, ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. Les racines sont toutes imaginaires, lorsque d'ailleurs p est une quantité positive; ou même, lorsque p étant négatif, $p^2 - 4r$ est une quantité négative. Les racines sont toutes réelles, lorsque d'ailleurs p étant une quantité négative, $p^2 - 4r$ est une quantité positive.

Le cas où ces deux fonctions seroient toutes deux négatives, ne peut avoir lieu.

(130.) Quand $p^2 + 12r$ est une quantité négative, la proposée a essentiellement deux racines réelles & deux racines imaginaires.

Méthode pour déterminer le ſigne des racines réelles des équations du troiſième & du quatrième degré, par la ſeule inſpection des conditions entre les conſtantes.

(131.) Pour terminer ce que j'ai à dire ſur le troiſième & le quatrième degré, il me reſte à donner la méthode propre à faire connoître le ſigne des racines réelles de ces équations. Quant aux racines imaginaires, comme elles n'ont, à proprement parler, aucun ſigne, ou que du moins leur ſigne me paroît indifférent; je me bornerai à déterminer ce qui eſt relatif aux racines réelles. Je commence par le troiſième degré.

Détermination du ſigne des racines réelles des équations du troiſième degré.

(132.) Pour entendre ce qui va ſuivre, on ſe rappellera *(§. 17)*, 1.° que $x^3 + px + q = 0$, repréſente l'équation générale du troiſième degré; 2.° que cette équation transformée ſuivant les principes du *§. 4*, conduit aux deux *réſultantes* ſuivantes *(§. 17)*.

$$(\alpha)\ a^3 - 3ab^2 + ap + q = 0;$$
$$(\beta)\ b^2 - 3a^2 - p = 0;$$

3.° que des deux *réſultantes* (α) & (β) l'on a tiré *(§. 18)* la *réſolvante*

$$(\gamma)\ 2a(4a^2 + p) - q = 0;$$

4.° que les trois racines du troiſième degré ſont, d'après les mêmes principes,

$$(1)\ x = a + b\sqrt{-1},$$
$$(2)\ x = a - b\sqrt{-1},$$
$$(3)\ x = a'.$$

On ſe rappellera pareillement que lorſque $3a^2 + p$ eſt une quantité négative, l'équation a ſes trois racines réelles *(§. 21)*; que lorſqu'au contraire $3a^2 + p$ eſt une quantité poſitive, l'équation a une racine réelle & deux racines imaginaires. Voyons ce que l'on peut tirer de ces prémices.

(133.) Puiſque dans l'équation $x^3 + px + q = 0$, le ſecond terme, c'eſt-à-dire, celui qui ſeroit affecté de x^2, manque; on voit d'abord que la ſomme des racines de l'équation eſt nulle. On a donc

$a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} + a' = 0$;

d'où l'on tire

$$(1)\quad 2a + a' = 0.$$

J'obſerve en ſecond lieu, que puiſqu'en général *(équat.* (β)*)*,

$$b = \pm\sqrt{(3a^2 + p)};$$

on a

$$b\sqrt{-1} = \pm\sqrt{(-3a^2 - p)}.$$

Si donc l'on veut déterminer quelle doit être la valeur particulière de a, pour que $a = b\sqrt{-1}$, l'on aura $a = \pm\sqrt{(-3a^2 - p)}$; d'où l'on tire

$$(2)\quad 4a^2 + p = 0.$$

Tant que a eſt moindre que $\pm\frac{\sqrt{-p}}{2}$, c'eſt-à-dire, tant que $4a^2 + p$ eſt une quantité négative, $b\sqrt{-1}$ ſurpaſſe a; lorſqu'au contraire a ſurpaſſe $\pm\frac{\sqrt{-p}}{2}$, c'eſt-à-dire, lorſque $4a^2 + p$ eſt une quantité poſitive, $b\sqrt{-1}$ eſt moindre que a. Tirons les conſéquences de ces principes.

Paragraphe dans lequel on démontre que, lorſque l'équation du troiſième degré a une racine réelle & deux racines imaginaires, la racine réelle a eſſentiellement un ſigne contraire à celui de la quantité q *dans la propoſée.*

(134.) Lorſque la propoſée a une racine réelle & deux racines imaginaires, la quantité $3a^2 + p$ *(§. 21)*, & à plus forte raiſon la quantité $4a^2 + p$, ſont eſſentiellement poſitives. Mais de l'équation (γ) du *§. 132*, l'on tire

$$(1)\quad a = \frac{q}{2(4a^2 + p)},$$

La valeur de a qui entre dans les expreſſions (1) & (2) de x du ſ. 132, a donc le même ſigne que la quantité q dans la propoſée. Mais à cauſe de l'équation $2a + a' = 0$, a' qui détermine la racine réelle de la propoſée, a un ſigne contraire à a. La valeur réelle de x a donc un ſigne contraire à celui de la quantité q dans la propoſée.

Paragraphes dans leſquels on démontre que lorſque l'équation du troiſième degré a ſes trois racines réelles, deux de ces racines ont eſſentiellement le même ſigne que la quantité q *dans la propoſée, & la troiſième racine eſt de ſigne différent.*

(135.) Lorſque toutes les racines de l'équation du troiſième degré ſont réelles, la quantité $3a^2 + p$ eſt eſſentiellement négative *(ſ. 21)*. Mais il eſt évident que $3a^2 + p$ peut être négatif, ſans que pour cela $4a^2 + p$ ſoit négatif. Donc lorſque toutes les racines de l'équation du troiſième degré ſont réelles, la quantité $4a^2 + p$ peut être ſuppoſée indifféremment ou poſitive ou négative. Nous remarquerons ſeulement que ſi $4a^2 + p$ eſt une quantité poſitive, $b\sqrt{-1}$ eſt moindre que a *(ſ. 133)*, & que par conſéquent les valeurs (1) & (2) de x du ſ. 132 ont toutes deux le même ſigne que a. Si au contraire $4a^2 + p$ eſt une quantité négative, $b\sqrt{-1}$ eſt plus grand que a *(ſ. 133)*; & quel que ſoit le ſigne de a, des deux valeurs (1) & (2) de x du ſ. 132, l'une eſt eſſentiellement poſitive, & l'autre négative.

(136.) Suppoſons d'abord que $4a^2 + p$ eſt une quantité poſitive; à cauſe de l'équation (1) du ſ. 134, les valeurs de a qui entrent dans les expreſſions (1) & (2) de x du ſ. 132, & par conſéquent *(ſ. 132 & 133)*, les valeurs (1) & (2) de x, auront le même ſigne que la quantité q dans la propoſée. Mais à cauſe de l'équation $2a + a' = 0$, la troiſième valeur de x du ſ. 132, aura un ſigne différent que cette même quantité q; la propoſée aura donc deux racines réelles de même ſigne que la quantité q, & une racine de ſigne différent.

(137.) Supposons maintenant que $4a^2 + p$ est une quantité négative. Les valeurs de a qui entrent dans les expressions (1) & (2) de x du *§. 132*, auront *(§. 134)* un signe différent de celui de la quantité q dans la proposée; & la troisième valeur de x aura le même signe que cette quantité q. Mais comme alors *(§. 133)* $b\sqrt{-1}$ surpasse a; quel que soit le signe de a, une des valeurs (1) & (2) de x du *§. 132* est essentiellement positive & l'autre négative, & par conséquent l'une a le même signe que q dans la proposée, & l'autre un signe différent. Donc encore dans ce cas, la proposée a deux racines réelles de même signe que q, & une racine de signe différent.

(138.) Donc, en général, lorsque l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles, deux de ces racines ont essentiellement le même signe que la quantité q dans la proposée, & la troisième racine est de signe différent.

Détermination du signe des racines réelles des équations du quatrième degré.

(139.) Pour entendre ce qui va suivre, on se rappellera *(§. 51)* 1.° que $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, représente l'équation générale du quatrième degré.

2.° Que cette équation transformée d'après les principes du *§. 4*, conduit aux résultantes suivantes *(§. 51 & 52)*.

$$(\alpha) \quad a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + a^2p - b^2p + aq + r = 0;$$

$$(\beta) \quad 4a^3 - 4ab^2 + 2ap + q = 0;$$

$$(\alpha 1) \quad b^4 - 2a^2b^2 - pb^2 - 3a^4 - a^2p + r = 0.$$

3.° Que des deux résultantes (α) & (β) l'on a tiré *(§. 53)* la résolvante,

$$(\gamma) \quad 4a^2\,[(4a^2 + p)^2 - 4r] - q^2 = 0.$$

4.° Que les quatre racines du quatrième degré sont, d'après les mêmes principes,

(1)

$$(1) \quad x = a + b\sqrt{-1},$$
$$(2) \quad x = a - b\sqrt{-1},$$
$$(3) \quad x = a' + b'\sqrt{-1},$$
$$(4) \quad x = a' - b'\sqrt{-1};$$

b & b' étant d'ailleurs déterminés par les équations ſuivantes;

$$(5) \quad b = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

&

$$(6) \quad b' = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

ou

$$(7) \quad b = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

&

$$(8) \quad b' = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

5.° Que puiſque dans l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

le ſecond terme, c'eſt-à-dire celui qui ſeroit affecté de x^3, manque, la ſomme des racines de l'équation eſt nulle; que par conſéquent,

$$a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} + a' + b'\sqrt{-1} + a' - b'\sqrt{-1} = 0;$$

d'où l'on tire

$$a + a' = 0.$$

De la correſpondance entre les quantités a, a', b, b'; *& de la véritable forme des quatre valeurs de* x *du paragraphe précédent.*

(140.) Ce que l'on vient d'expoſer dans le *paragraphe précédent*, laiſſe de l'incertitude ſur la correſpondance entre les quantités a, a'; b, & b'. En effet, puiſque les valeurs de b, b' peuvent être déterminées au moyen des équations (5) ou (7), (6) ou (8) du *§. 139*, & que d'ailleurs rien ne fixe le choix particulier que l'on doit faire de ces valeurs,

il pourroit rester quelque nuage sur la correspondance entre les quantités dont il vient d'être question. Cette incertitude se levera facilement par les réflexions suivantes.

(141.) De la résultante (β) du *§. 139,* l'on tire

$$(1)\quad a = \frac{q}{2(2b^2 - 2a^2 - p)}.$$

De la résultante (α 1) du même paragraphe, l'on tire *(§. 55),*

$$(2)\quad 2b^2 = 2a^2 + p \pm \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}.$$

L'équation (1) du présent paragraphe devient donc

$$(3)\quad a = \frac{q}{\pm 2\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}.$$

(142.) Nous remarquerons que dans la dernière équation du *§. 141,* $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ est une quantité essentiellement réelle. Car si c'étoit une quantité imaginaire; 1.° la quantité a seroit imaginaire, ce qui est contre la supposition fondamentale du Mémoire; 2.° *(§. 141 équation (2)),* b^2 seroit imaginaire, & par conséquent les quatre racines de l'équation seroient imaginaires; or ce cas ne fait point partie des recherches présentes, puisqu'il s'agit uniquement de déterminer le signe des racines de l'équation, lorsqu'elles sont réelles.

(143.) L'équation (3) du *§. 141,* démontre qu'il faut distinguer le cas, où dans la proposée, q est positif, d'avec celui où q est négatif.

Si q est positif; à la valeur positive de a, répond la valeur suivante de b^2,

$$b^2 = \frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2};$$

& à la valeur négative de a, répond la valeur suivante de b^2,

$$b^2 = \frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 + 4r]}}{2}.$$

Si q est négatif; à la valeur positive de a, répond la valeur suivante de b^2,

$$b^2 = \frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2},$$

& à la valeur négative de a, répond la valeur suivante de b^2,

$$b^2 = \frac{2a^2 + p + \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}.$$

(144.) En réunissant toutes les remarques précédentes, on verra facilement que si dans la proposée, q est une quantité positive, les quatre racines de l'équation du quatrième degré, ont pour expression

$$(1)\ x = + a + \surd\left(\frac{-2a^2 - p - \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}\right),$$

$$(2)\ x = + a - \surd\left(\frac{-2a^2 - p - \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}\right),$$

$$(3)\ x = - a + \surd\left(\frac{-2a^2 - p + \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}\right),$$

$$(4)\ x = - a - \surd\left(\frac{-2a^2 - p + \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}\right).$$

(145.) Si q est négatif, les quatre racines de l'équation du quatrième degré, ont pour expression

$$(1)\ x = + a + \surd\left(\frac{-2a^2 - p + \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}\right),$$

$$(2)\ x = + a - \surd\left(\frac{-2a^2 - p + \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}\right),$$

$$(3)\ x = - a + \surd\left(\frac{-2a^2 - p - \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}\right),$$

$$(4)\ x = - a - \surd\left(\frac{-2a^2 - p - \surd[(4a^2 + p)^2 - 4r]}{2}\right).$$

(146.) On peut remarquer la correspondance des quatre valeurs de x des *§. 144 & 145*. La première valeur du *§. 144*, ne diffère que par le signe, de la quatrième valeur du *§. 145*. Il en est de même de la seconde valeur de x du *§. 144*, comparée à la troisième valeur du *§. 145*; & ainsi de suite.

Paragraphes dans lesquels on détermine les cas où la valeur de a *qui entre dans l'expression de* x *des paragraphes précédens, surpasse, égale, ou est moindre que la quantité comprise sous le radical.*

(147.) Pour déterminer le signe des racines de l'équation du quatrième degré, il est essentiel de connoître précisément dans quel cas la valeur de a qui entre dans l'expression de x des paragraphes précédens, surpasse, égale, ou est moindre que la quantité comprise sous le radical. En effet, si a étoit moindre que le radical, ce seroit le signe du radical qui décideroit du signe de la valeur de x. Si au contraire a étoit plus grand que le radical, ce seroit le signe de a qui décideroit du signe de x. Cette considération doit suffire pour faire sentir l'importance de la question.

(148.) Afin de résoudre la question dont il s'agit, je suppose une équation de la forme suivante,

$$(1)\quad a^2 + \mu = \frac{-2a^2 - p \mp \sqrt{[(4a^2+p)^2 - 4r]}}{2};$$

d'où l'on tire

$$(2)\quad \mu^2 + \mu\,(4a^2 + p) + r = 0;$$

$$(3)\quad \mu = \frac{-4a^2 - p \mp \sqrt{[(4a^2+p)^2 - 4r]}}{2}.$$

Je remarque que si μ est une quantité positive, a^2 est moindre que le quarré de la quantité radicale qui entre dans l'expression de x; a est par conséquent moindre que cette quantité radicale. Si au contraire μ est une quantité négative, a est plus grand que la quantité radicale. Il faut donc déterminer dans quel cas μ est une quantité positive, & dans quel cas μ est une quantité négative.

(149.) Quant au cas où μ seroit égal à zéro, & où, par conséquent, a seroit égal à la quantité radicale qui entre dans l'expression de x, il ne peut avoir lieu dans le quatrième degré; puisqu'alors *(§. 148, équation* (2)*)*, on auroit $r = 0$; ce qui abaisseroit la proposée, du quatrième degré au troisième.

Paragraphes dans lesquels on examine ce qui a lieu lorsque q = o *dans la proposée.*

(150.) Nous avons démontré *(§. 143)*, que relativement aux discussions dont il s'agit, il faut distinguer le cas où dans la proposée, q est positif, d'avec celui où q est négatif. Il paroît donc naturel d'examiner d'abord ce qui a lieu dans le point de passage, c'est-à-dire lorsque $q = o$.

(151.) Si l'on suppose $q = o$ dans la proposée, elle se réduit à $x^4 + p x^2 + r = o$. Cette équation résolue par les méthodes du second degré, donne pour valeurs de x,

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)},$$

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}\right)}.$$

Nous avons discuté *(§. 57)* la nature de ces racines, dans toutes les suppositions possibles sur p & sur r. Nous avons fait voir que si r est négative, quel que soit d'ailleurs le signe de p, la proposée a essentiellement deux racines réelles & deux racines imaginaires. Si r est positive & p positif, les racines de la proposée sont toutes imaginaires. Si r est positive & p négatif, les racines de la proposée, sont toutes réelles ou toutes imaginaires; toutes réelles, si p^2 surpasse $4r$; toutes imaginaires, si p^2 est moindre que $4r$. Nous ajouterons seulement que dans tous les cas, le nombre des racines réelles positives est égal au nombre des racines réelles négatives. Ainsi donc, si la proposée a quatre racines réelles, deux de ces racines sont positives, & deux sont négatives; si la proposée n'a que deux racines réelles, une de ces racines est positive & l'autre est négative.

Paragraphes dans lesquels on examine ce qui a lieu lorsque q *est positif dans la proposée.*

(152.) Si dans la proposée, q est une quantité positive, l'on a vu *(§. 144)* que les quatre racines du quatrième degré ont pour expression

$$(1)\ x = + a + \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

$$(2)\ x = + a - \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$(3)\ x = - a + \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$(4)\ x = - a - \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

D'où l'on voit que pour juger du ſigne qu'auront les valeurs de x, il ſuffit de s'en aſſurer pour une valeur poſitive quelconque de a; & par conſéquent il ſuffira de ſubſtituer pour a, une quantité poſitive quelconque, dans les expreſſions (1), (2), (3), (4); & le ſigne qu'obtiendront les quatre réſultats, ſera le ſigne des valeurs de x, dans l'équation propoſée.

(153.) Quant aux valeurs de μ, on a *(§. 148)*,

$$(1)\ \mu = \frac{-4a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2},$$

$$(2)\ \mu = \frac{-4a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 - p)^2 - 4r]}}{2};$$

La première répond aux valeurs (1), (2) de x du paragraphe précédent; la ſeconde répond aux valeurs (3) & (4) de x du même paragraphe.

Examen de ce qui a lieu, lorſque q *étant poſitif dans la propoſée,* r *&* p *ſont également poſitifs.*

(154.) J'obſerve d'abord que ſi r eſt poſitive dans la propoſée, $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ eſt moindre que $4a^2 + p$. Le ſigne des deux valeurs de μ du paragraphe précédent, dépend donc du ſigne de la quantité $-4a^2 - p$; d'où l'on voit que ſi p eſt d'ailleurs poſitif, les deux valeurs de μ ſont négatives. On doit donc conclure *(§. 148)* qu'indiſtinctement,

$$a \text{ ſurpaſſe } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$a \text{ ſurpaſſe } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

Des quatre valeurs (1), (2), (3), (4) de x du *§. 152*, les deux premières ſont donc poſitives, & les deux dernières ſont négatives; pourvu toutefois que ces valeurs ſoient réelles. Il faut maintenant rapprocher ces réſultats, de ce qui a été démontré ſur la nature des racines de l'équation.

(155.) Nous avons dit *(§. 129)*, que ſi l'on prend les deux fonctions ſuivantes,

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2};$$

& que relativement à ces fonctions, l'on conſtate ſi elles ſont poſitives ou négatives. Si de ces deux fonctions, l'une eſt poſitive & l'autre eſt négative, la propoſée a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

Si ces deux fonctions ſont toutes deux poſitives, la propoſée a ſes racines, ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. Les racines ſont toutes quatre imaginaires, lorſque d'ailleurs p eſt une quantité poſitive. Les racines ſont toutes réelles, lorſque d'ailleurs p étant une quantité négative, $p^2 - 4r$ eſt une quantité poſitive.

Le cas où les deux fonctions ſeroient toutes deux négatives, ne peut avoir lieu.

Nous ne parlons point ici du cas où p étant négatif dans la propoſée, & les fonctions précédentes étant toutes deux poſitives, $p^2 - 4r$ eſt une quantité négative. Les quatre racines de l'équation ſont alors imaginaires *(§. 129)*. Mais comme ce cas ne peut avoir lieu *(§. 116)*, qu'autant que q eſt égal à zéro dans la propoſée, & qu'il a été diſcuté particulièrement *(§. 150 & 151)*, il eſt inutile de le rappeler ici.

(156.) Puiſque dans la ſuppoſition dont il s'agit, p eſt poſitif, il eſt d'abord évident, d'après ce qui vient d'être dit, que la propoſée a ou ſes quatre racines imaginaires, ou au moins deux de ſes racines imaginaires. Si les quatre racines ſont imaginaires, c'eſt-à-dire, ſi les deux fonctions

du *§. 155* ſont toutes deux poſitives, il n'y a rien à chercher, attendu que nous ne conſidérons que le ſigne des racines réelles. Il ne peut donc y avoir d'incertitude que dans le cas où deux des racines ſeroient réelles; c'eſt-à-dire, dans le cas où des deux fonctions du *§. 155*, l'une ſeroit poſitive & l'autre ſeroit négative.

(157.) Ce dernier ſymptôme, lorſqu'il a lieu, apprend que des quatre valeurs de x du *§. 152*, deux ſont réelles & deux ſont imaginaires; & il n'eſt plus queſtion, pour avoir le ſigne des racines réelles de la propoſée, que de décider leſquelles des deux valeurs ou (1) & (2), ou (3) & (4) ſont réelles, leſquelles ſont imaginaires. Or cette déciſion ne préſente aucune difficulté. Car, puiſque p & r ſont poſitifs, par la ſuppoſition, & que l'on ſait d'ailleurs que des valeurs ou (1) & (2), ou (3) & (4), deux ſont réelles & deux ſont imaginaires; il eſt facile de voir, par la ſeule inſpection de ces valeurs, que les racines imaginaires ſont eſſentiellement les racines (1) & (2), & que les racines réelles ſont les racines (3) & (4); puiſque la quantité qui ſe trouve ſous le radical que renferment ces deux dernières valeurs, eſt, ſi je puis m'exprimer ainſi, plus poſitive que la quantité qui ſe trouve ſous le radical que renferment les valeurs (1) & (2). Mais par l'hypothèſe,

$$a \text{ ſurpaſſe } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

le ſigne des valeurs (3) & (4) de x eſt donc déterminé par le terme $-a$; les valeurs réelles de l'équation ſont donc négatives.

(158.) Donc, lorſque q étant poſitif dans la propoſée, p & r ſont également poſitifs, & que de plus le ſymptôme du *§. 155*, a fait voir que cette propoſée a deux racines réelles, ces racines ſont négatives.

Examen

Examen de ce qui a lieu lorsque q *étant positif dans la proposée,* r *est positive &* p *négatif.*

(159.) Si r est positive dans la proposée, il est évident que $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ est moindre que $4a^2 + p$. Le signe des deux valeurs de μ du §. 153, dépend donc du signe de la quantité $-4a^2 - p$. Mais quand p est négatif, la quantité $-4a^2 - p$ n'est plus essentiellement négative, comme dans le cas où p est positif. Cela dépend du rapport entre $4a^2$ & p.

(160.) Si $-4a^2 - p$ est une quantité négative, les deux valeurs de μ du §. 153 sont négatives, & l'on a indistinctement, §. 148,

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

Les valeurs (1) & (2) de x du §. 152, sont donc positives, & les valeurs (3) & (4) sont négatives.

(161.) Si $-4a^2 - p$ étoit une quantité positive, les deux valeurs de μ du §. 153 seroient positives, & l'on auroit indistinctement §. 148,

$$a \text{ moindre que } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$a \text{ moindre que } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

Les valeurs (1) & (3) de x du §. 152 seroient positives, & les valeurs (2) & (4) seroient négatives.

(162.) On voit par-là que, si les quatre racines de la proposée sont réelles, ce que l'on connoîtra par les symptômes du §. 155, deux de ces racines seront positives, & deux seront négatives.

Si les quatre racines sont imaginaires, il n'y a rien à déterminer, puisque nous considérons uniquement le signe des

racines réelles de la proposée. Au reste ce cas, ainsi qu'il a été dit §. 155, se réduit à la supposition où q seroit égal à zéro dans la proposée.

(163.) Si deux des racines de la proposée sont réelles, & deux sont imaginaires, les valeurs réelles de x ne peuvent manquer d'être les valeurs (3) & (4) du §. 152; puisque la quantité qui se trouve sous le radical que renferment ces deux dernières valeurs, est, si je puis m'exprimer ainsi, plus positive que la quantité qui se trouve sous le radical que renferment les valeurs (1) & (2). C'est donc le signe des valeurs (3) & (4) de x du §. 152, qui détermine alors le signe des racines réelles de la proposée.

(164.) Pour déterminer dans ce cas, le signe des valeurs (3) & (4) de x du §. 152, on ne doit point oublier que nous avons démontré §. 142, que $(4a^2 + p)^2 - 4r$ est une quantité essentiellement positive. Donc si l'on suppose une équation de la forme suivante

$$(1)\quad (4a^2 + p)^2 - 4r - \varepsilon = 0,$$

dans cette équation ε sera essentiellement positif.

(165.) De l'équation (1) du paragraphe précédent, l'on tire

$$4a^2 + p = \pm\sqrt{(4r + \varepsilon)};$$
$$4a^2 = -p \pm \sqrt{(4r + \varepsilon)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de μ du §. 153, elles deviendront,

ou

$$(1)\quad \mu = \frac{-\sqrt{(4r + \varepsilon)} - \varepsilon}{2},$$

$$(2)\quad \mu = \frac{-\sqrt{(4r + \varepsilon)} + \varepsilon}{2},$$

ou

$$(3)\quad \mu = \frac{\sqrt{(4r + \varepsilon)} - \varepsilon}{2},$$

$$(4)\quad \mu = \frac{\sqrt{(4r + \varepsilon)} + \varepsilon}{2}.$$

Pour fixer laquelle des deux combinaisons ou (1) & (2),

ou (3) & (4), a véritablement lieu, je reprends l'équation (γ) du *§. 139.*

$$(\gamma)\quad 4a^2[(4a^2 + p)^2 - 4r] - q^2 = o.$$

Dans cette équation, je ſubſtitue à $(4a^2 + p)^2 - 4r$, & à $4a^2$, leurs valeurs, & l'équation (γ) ſe transforme dans les deux ſuivantes

$$(\gamma 1)\ \frac{q^2}{\varepsilon} = -p + \sqrt{(4r + \varepsilon)},$$

$$(\gamma 2)\ \frac{q^2}{\varepsilon} = -p - \sqrt{(4r + \varepsilon)}.$$

La première répond aux valeurs (1) & (2) de μ, la ſeconde répond aux valeurs (3) & (4) de μ.

(166.) Puiſque par la ſuppoſition, ε eſt poſitif, que r eſt poſitive & p négatif, il eſt évident que l'équation (γ1) donne eſſentiellement des valeurs réelles de q; & que l'équation (γ2) ne donne des valeurs réelles de q, qu'autant que $-p - \sqrt{(4r + \varepsilon)}$ eſt une quantité poſitive, c'eſt-à-dire qu'autant que $p^2 - 4r$ eſt une quantité poſitive. Mais lorſque p eſt négatif, & que $p^2 - 4r$ eſt une quantité poſitive, les quatre racines de l'équation ſont réelles *(§. 155)*. Donc l'équation (γ2) ne peut donner des valeurs réelles de q, que lorſque les quatre racines de la propoſée ſont réelles. Donc, lorſque deux des racines ſont ſeulement réelles, la ſeule équation (γ1) donne des valeurs réelles de q; donc, alors, les ſeules valeurs (1) & (2) de μ du *§. 165*, ont lieu; donc, μ eſt négatif; donc,

$$a \text{ ſurpaſſe } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

les deux racines réelles de l'équation ſont donc alors négatives.

Examen de ce qui a lieu lorſque q *étant poſitif dans la propoſée,* r *eſt négative, &* p *poſitif ou négatif.*

(167.) Si r eſt négative dans la propoſée, il eſt évident que $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ eſt eſſentiellement plus grand

que $4a^2 + p$. Des deux valeurs de μ du *§. 153*, la première est donc négative, & la seconde est positive; & l'on a

$$a \text{ plus grand que } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2+p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$a \text{ moindre que } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2+p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

Des quatre valeurs de x du *§. 152*, la première & la seconde sont positives, la troisième est positive, & la quatrième est négative; pourvu toutefois que ces valeurs soient réelles.

Donc, si les quatre valeurs sont réelles, ce que l'on connoîtra par les symptômes du *§. 155*, trois des racines sont positives & une seulement est négative.

(168.) Si deux des valeurs sont réelles, & deux sont imaginaires, les valeurs réelles de x ne peuvent manquer d'être les valeurs (3) & (4) du *§. 152*; puisque, ainsi qu'il a déjà été remarqué plusieurs fois, la quantité qui se trouve sous le radical que renferment ces deux dernières valeurs, est plus positive, si je puis m'exprimer ainsi, que celle sous le radical que renferment les expressions (1) & (2) de x. Des deux racines réelles de l'équation, l'une est donc positive & l'autre est négative.

Si les quatre valeurs sont imaginaires, il n'y a rien à déterminer, puisque nous considérons uniquement le signe des racines réelles de la proposée.

Paragraphes dans lesquels on examine ce qui a lieu lorsque q *est négatif dans la proposée.*

(169.) Il nous reste maintenant à examiner ce qui a lieu lorsque q est négatif dans la proposée. Ce nouvel examen ne présente aucune difficulté, après la remarque que nous avons faite *(§. 146)*, sur la correspondance des racines positives de l'équation dans ce cas, avec les racines négatives de cette même équation, dans l'hypothèse de q positif; & réciproquement.

(170.) Cette remarque fait voir tout de ſuite que, ſans entrer dans un grand détail, on aura facilement le ſigne des racines pour toutes les ſuppoſitions ſur p & r.

En effet, dans ce cas, on a pour les valeurs de x (§. 145),

$$(1)\ x = + a + \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$(2)\ x = + a - \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$(3)\ x = - a + \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)},$$

$$(4)\ x = - a - \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

& pour valeurs de μ,

$$(1)\ \mu = \frac{-4a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2},$$

$$(2)\ \mu = \frac{-4a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}.$$

La première de ces valeurs de μ, répond aux valeurs (1) & (2) de x, & la ſeconde répond aux valeurs (3) & (4) de x.

Examen de ce qui a lieu, lorſque q *étant négatif dans la propoſée,* r *&* p *ſont poſitifs.*

(171.) J'obſerve d'abord que ſi r eſt poſitive dans la propoſée, $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$ eſt moindre que $4a^2 + p$. Le ſigne des deux valeurs de μ du paragraphe précédent, dépend donc du ſigne de $-4a^2 - p$; & comme p eſt poſitif, les deux valeurs de μ ſont négatives. On doit donc conclure (§. 148) qu'indiſtinctement

$$a \text{ ſurpaſſe } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

$$a \text{ ſurpaſſe } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

Des quatre valeurs (1), (2), (3), (4) de x du §. 170, les deux premières ſont donc poſitives & les deux dernières ſont négatives, pourvu toutefois que ces valeurs ſoient réelles.

Mais il ſuit du *§. 156,* que dans le cas dont il s'agit, la propoſée a, ou ſes quatre racines imaginaires, ou au moins deux de ſes racines imaginaires. Si les quatre racines ſont imaginaires, c'eſt-à-dire, ſi les deux fonctions du *§. 155* ſont toutes deux poſitives, il n'y a rien à chercher, attendu que nous ne conſidérons que le ſigne des racines réelles. Il ne peut donc y avoir d'incertitude que dans le cas où deux des racines ſeroient réelles, c'eſt-à-dire, dans le cas où des deux fonctions du *§. 155,* l'une ſeroit poſitive, & l'autre ſeroit négative.

(172.) Ce dernier ſymptôme, lorſqu'il a lieu, apprend que des quatre valeurs de x du *§. 170*, deux ſont réelles, & deux ſont imaginaires; & il n'eſt plus queſtion, pour avoir le ſigne des racines réelles de la propoſée, que de décider leſquelles des deux valeurs, ou (1) & (2), ou (3) & (4) ſont réelles, leſquelles ſont imaginaires. Or cette déciſion ne préſente aucune difficulté ; & les racines réelles ſont eſſentiellement les racines (1) & (2), puiſque la quantité qui ſe trouve ſous le radical que renferment ces valeurs, eſt ſi je puis m'exprimer ainſi, plus poſitive que la quantité qui ſe trouve ſous le radical que renferment les valeurs (3) & (4). Mais par l'hypothèſe,

$$a \text{ ſurpaſſe } \sqrt{\left(\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2+p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

Le ſigne des valeurs (1) & (2) de x eſt donc déterminé par le terme $+ a$; les valeurs réelles de l'équation ſont donc poſitives.

(173.) Donc, lorſque q étant négatif dans la propoſée, p & r ſont poſitifs, que de plus, le ſymptôme du *§. 155* a fait voir que cette propoſée a deux racines réelles, ces racines ſont poſitives.

Examen de ce qui a lieu lorſque q *étant négatif dans la propoſée,* r *eſt poſitive &* p *négatif.*

(174.) Si q eſt négatif dans la propoſée, r poſitif & p négatif, on démontrera par des raiſonnemens analogues à ceux

des §. 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165 & 166, que si les quatre racines sont réelles, deux seront positives & deux seront négatives. Si deux des racines sont réelles & deux sont imaginaires, les deux racines réelles seront positives.

Examen de ce qui a lieu, lorsque q *étant négatif dans la proposée,* r *est négative, &* p *positif ou négatif.*

(175.) Si q est négatif dans la proposée, r négative & p positif ou négatif, on démontrera par des raisonnemens analogues à ceux des §. 167 & 168, que si les quatre valeurs de l'équation sont réelles, ce que l'on connoîtra par les symptômes du §. 155, trois des racines seront négatives, & une sera positive. Si deux seulement des racines sont réelles, l'une de ces racines sera positive, & l'autre sera négative.

Récapitulation sommaire de ce qui vient d'être démontré sur le signe des racines réelles des équations du troisième & du quatrième degré.

(176.) Ce que nous venons de démontrer relativement au signe des racines réelles des équations du troisième & du quatrième degré, se réduit à ce qui suit.

Pour le troisième degré.

(177.) Supposons que l'équation générale du troisième degré soit représentée par

$$x^3 + px + q = 0.$$

Si l'équation a deux racines imaginaires & une racine réelle, c'est-à-dire, si $27q^2 + 4p^3$ est une quantité positive, la racine réelle a essentiellement un signe contraire à celui de la quantité q dans la proposée.

Si l'équation a ses trois racines réelles, c'est-à-dire, si $27q^2 + 4p^3$ est une quantité négative, deux des racines ont essentiellement le même signe que la quantité q dans la proposée, & la troisième racine est de signe différent,

Pour le quatrième degré.

(178.) Supposons que l'équation générale du quatrième degré soit représentée par

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Si r & p sont positifs, la proposée ne peut avoir que deux racines réelles, quel que soit d'ailleurs le signe de q; & les racines réelles sont négatives, si q est positif; les racines sont positives, si q est négatif.

Si r est positive & p négatif, & que les quatre racines de la proposée soient réelles; deux de ces racines sont positives, & deux sont négatives, quel que soit le signe de q.

Si r étant positive & p négatif, deux seulement des racines de la proposée sont réelles; les deux racines réelles ont un signe contraire à celui de q dans la proposée.

Si r est négative & p positif ou négatif, & que les quatre racines de la proposée soient réelles; trois des racines réelles ont le même signe que q dans la proposée, & la quatrième racine a un signe contraire à celui de q.

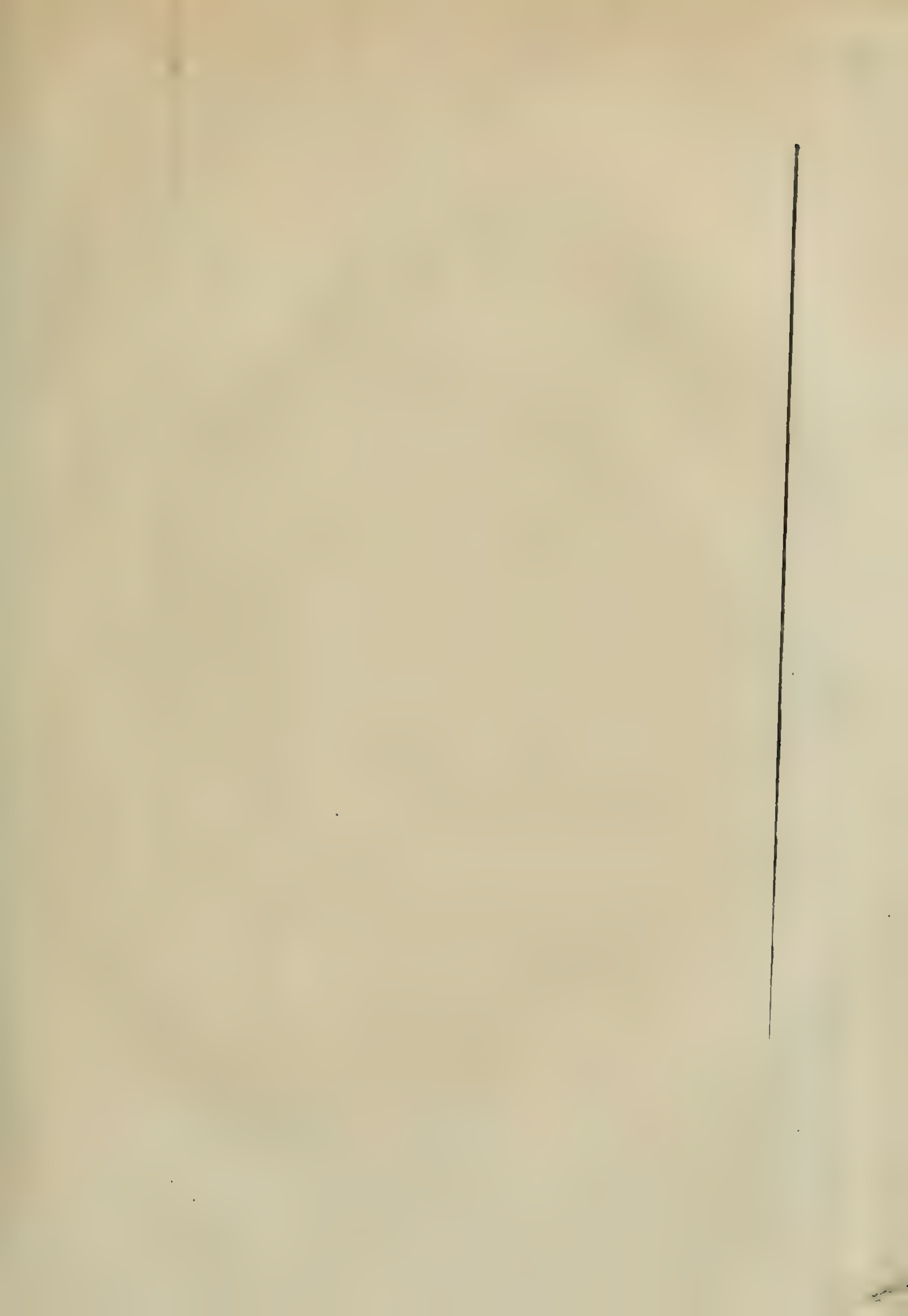
Si r étant négative & p positif ou négatif, deux seulement des racines de la proposée sont réelles; l'une de ces racines est positive, & l'autre négative, quel que soit le signe de q.

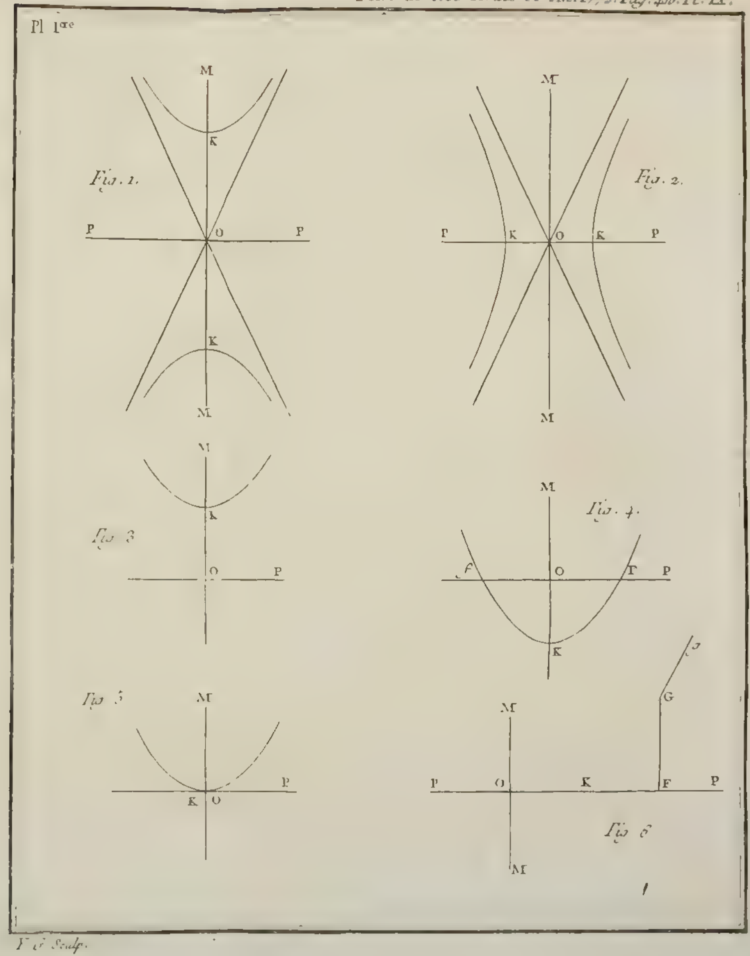
(179.) Quant au cas où q seroit égal à zéro dans la proposée; comme il a été complétement discuté *(§. 151)*, soit relativement à la nature, soit relativement au signe des racines, nous renvoyons à ce paragraphe.

Nota. *La longueur de ce travail & la quantité d'autres matières qui doivent trouver place dans ce Volume, m'obligent de remettre à une autre année, la publication de la suite de ce Mémoire.*

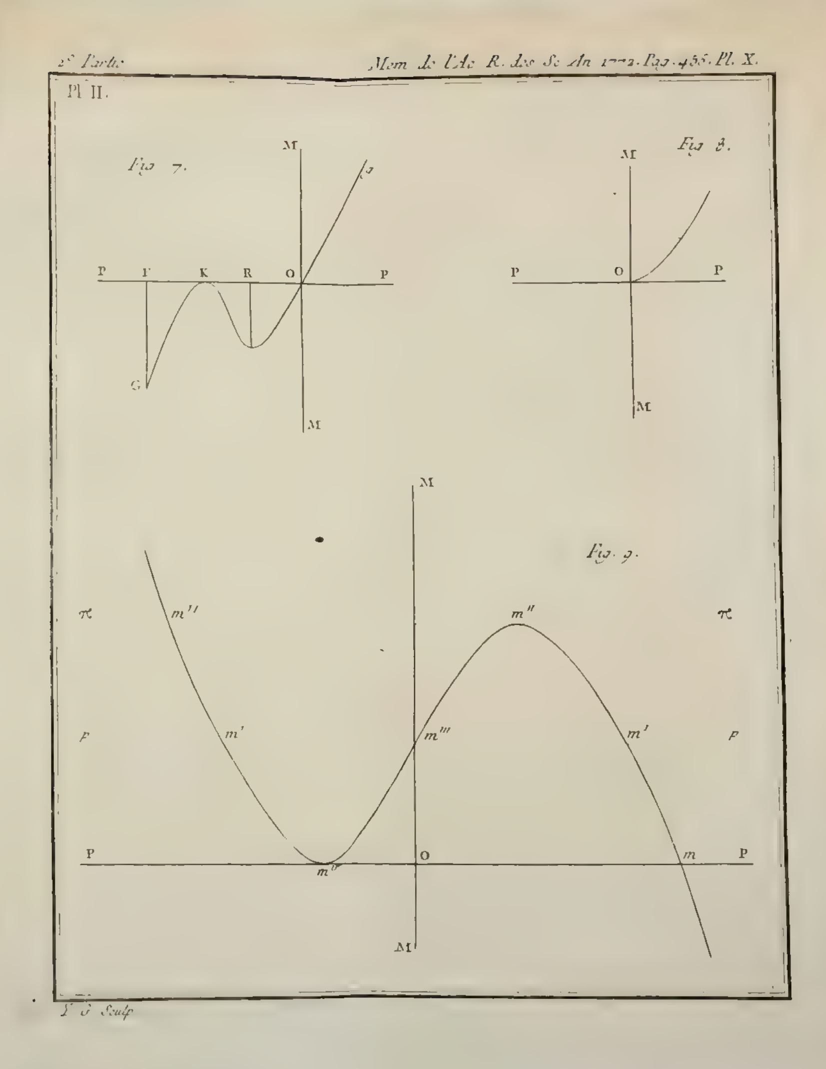


SUITE





V. G. Sculp.


2e Partie
Mem. de l'Ac. R. des Sc. An. 1772. Pag. 456. Pl. X.
Pl. II.
Fig. 7.
M
P F K R O P
G
M
Fig. 8.
M
P O P
M
Fig. 9.
M
π m'' m'' π
P m' m''' m' P
P O m P
m⁰
M
Y. G. Sculp.

SUITE DES RECHERCHES SUR LES VARIATIONS DE L'AIMANT,

Aux chaînes des Montagnes en Normandie & d'abord dans l'Apennin.

Par M. LE MONNIER.

M. MARALDI ayant trouvé avec deux bouſſoles, une très-grande différence entre Périnaldo, au comté de Nice, & Paris, quant à la variation de l'Aimant; il n'eſt guère poſſible de ſe refuſer à ſuppoſer quelques cauſes extraordinaires dans le magnétiſme, ou quelque proximité de fer dans un lieu ſitué ſur l'Apennin & entouré de collines: Périnaldo eſt d'ailleurs très-élevé au-deſſus de la mer, puiſque le baromètre, dans ſa hauteur moyenne, n'y marque, ſelon M. Maraldi, que 26 pouces au-deſſus du niveau.

Non-ſeulement ce qui a été obſervé autrefois à Lorette, à Naples & à Rome, & par Gaſſendi à Aix & à Marſeille, détruit la grande différence que l'on trouve aujourd'hui dans les variations obſervées, comme je vais l'expoſer tout-à-l'heure; mais d'ailleurs j'ai fait voir, il y a au moins ſix mois, dans un Écrit que j'ai lû à notre Aſſemblée, qu'entre Paris & Londres, la différence n'a jamais paru au-delà de 3 degrés dans le XVI.me ſiècle, & qu'actuellement elle ne va pas au-delà d'un degré ou d'un degré & demi; ce qui eſt bien éloigné de 8 degrés qu'on trouve dans les variations de l'aimant entre Paris & Périnaldo. En 1670, ſelon M.rs Auzout & Picard, $2^d \frac{1}{4}$ à Rome, & $1^d \frac{1}{2}$ à Paris. Enfin à Rome, en 1695, ſelon M.rs Caſſini, 7 degrés à l'égliſe Saint-Pierre, ou $7^d \frac{1}{2}$ ailleurs, & ſelon M. de la Hire, $6^d\ 48'$ à Paris.

Varenius, au *chap. 38* de ſa Géographie, donne la variation

de l'Aimant, à Paris en 1610, de 8 degrés, & dans le livre intitulé *Nautica Mediterranea de Crescentius*, publié à Rome en 1602, on trouve pareillement qu'elle n'étoit que de 8 degrés dans l'Est, ce qui s'accorde avec ce qu'on lit au *chap. VII* de la Magie naturelle de Baptista Porta, Napolitain, lequel dit qu'en Italie, vers 1530, comme sur tous les cadrans qu'on apportoit d'Allemagne, la variation de l'Aimant étoit réputée de son temps de 9 degrés à l'Est. Il paroît donc évident que sur la fin du XVI.me siècle, la variation étoit la même en Italie qu'à Paris *, à très-peu de chose près. Voyons présentement ce qu'elle a dû être en ces derniers temps: la variation de l'aiguille est depuis cent ans Nord-ouest, comme l'on sait; c'est-à-dire, en sens contraire.

Or, M. de la Condamine, à la fin d'Avril 1756, déclare l'avoir trouvée à Notre-Dame de Lorette, de $15^d\ 35'$: on trouve son observation dans nos Mémoires de l'*année suivante;* j'aurois bien souhaité qu'elle eût été observée à Rome, ou bien qu'il y eût eu quelque vérification plus ample, soit par l'amplitude occidentale, soit par quelqu'azimuth dans l'ouest de Notre-Dame de Lorette. Quoi qu'il en soit, on trouve en effet que M. de la Condamine l'a établie en ce lieu, pour cette année-là de 2 degrés précisément moindre qu'à Paris, ce qui se rapproche un peu de l'observation faite tout récemment par M. Maraldi, quoiqu'on n'y aperçoive encore que le quart de la différence, ou des 8 degrés qu'on trouve entre Périnaldo & Paris. On remarquera qu'en 1695, au mois d'Octobre, elle étoit à Lorette, selon M.rs Cassini, de 7 degrés, & à Paris, $6^d\ 48'$ selon M. de la Hire. A cette occasion, je vais donner ici quelques autres éclaircissemens au sujet de quelques chaînes de montagnes; savoir, celles qui approchent le plus de nos côtes maritimes sur l'Océan.

Je passe sous silence les détails topographiques des chaînes qui se terminent sous le parallèle de Paris, aux mêmes côtes

---

* Voyez Tome VII, anciens Mém. de l'Académie, *page 514*.

maritimes, & dont on connoît en général, outre leurs branches ou rameaux, celles qui se prolongent jusqu'à Avranches, celles qui bordent la rivière d'Orne, enfin, une autre plus à l'Est, mais parallèle au cours de la Dive: elles sont très-élevées en plusieurs endroits, jusqu'à environ quatre-vingts toises au-dessus du niveau de la mer, & j'ai trouvé cette année que le sommet de la forêt de Saint-Sever, où naît la source de la rivière de Sienne, n'est que de cinquante-cinq toises plus élevé que le Bourg de ce lieu. Or, la moyenne hauteur du baromètre a paru de vingt-sept pouces jusqu'ici au niveau du bourg de Saint-Sever.

C'est en ce lieu, ou quinze toises plus haut, que j'ai observé cette année au solstice d'Été, outre les réfractions, la variation de l'Aimant par les amplitudes orientales & occidentales du Soleil, & après en avoir réitéré plusieurs fois l'expérience, à l'aide des objets que j'avois reconnus dans l'horizon & où j'ai eu tout le loisir de pointer à diverses heures du jour. Or, j'ai conclu la variation de l'Aimant de $20^d\ 10'$, ce qui est un peu moins qu'on ne l'a observé à Londres au même temps; savoir $21^d\ 5'$, & à peine d'un tiers de degré plus grande que celle que j'ai observée au mois de Mai à Paris.

A la vérité, les deux degrés de différence entre Paris & Londres, que M. Halley a établis sur la fin du dernier siècle, sont contredits par l'observation qu'en ont faite M.rs Flamstéed & Jacques Cassini d'une part, à Greenwich, sur la fin de l'hiver en 1698, ayant trouvé la variation de 7 degrés * Nord-ouest, puisque de l'autre part M. de la Hire a trouvé,

En Octobre	1697	$7^d\ 40'$	
	1698	7. 40.	
Et en Octobre	1695	6. 48.	au Nord-ouest.
	1696	7. 8.	

* *Hist. Cœlestis*, Tom. II, die 22 Julii $7^d\ 25'$.

Enfin, dans la seconde partie du *Tome VII* des anciens Mémoires de l'Académie, *page 531,* je trouve la variation de l'Aimant, à Périnaldo, de 8 degrés au Nord-ouest le 9 Janvier 1696 : on l'avoit trouvée à Gènes, vers Noël 1695, de 9 degrés, & nonobstant les chaînes de montagnes, elle n'étoit à Périnaldo que d'un degré plus grande qu'à Paris; ce qui s'accorde avec ce que Porta & Bellarmatus ont reconnu au Nord-est, en Italie comme en France, sur la fin du XVI.me siècle.



REMARQUES SUR LA CARTE SUÉDOISE DE L'INCLINAISON DE L'AIMANT,

Publiée à Stockolm dans le trimestre de Juillet, des Actes de l'Académie, année 1768.

Par M. LE MONNIER.

LE peu d'observations exactes qui aient été publiées jusqu'à ce jour, sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée, nous ont peu instruit sur la variation d'inclinaison de l'aiguille, & il seroit à souhaiter d'ailleurs qu'on en répétât les observations dans les mêmes parties du monde où elle a été observée au commencement de ce siècle, parce que si elle a paru presque stationnaire à Paris ou à Londres & au détroit de Magellan, il ne s'ensuit pas qu'elle ait été sans variations sensibles en d'autres parties du monde. Je trouve, par exemple, qu'à Madère l'inclinaison a été observée sur le vaisseau l'*Endeavour*, commandé par le Lieutenant Cook, de $77^d\ 18'\frac{1}{2}$, en 1768, au lieu que la carte Suédoise de M. Wilcke n'admet que 65 à 65 degrés $\frac{1}{2}$, & même dans la baie du Bon-succès, qui fait partie de la terre de Feu, au détroit de le Maire, la même année 1768, on y a observé l'inclinaison de $68^d\ 15'$, c'est-à-dire, environ deux degrés plus petite que selon la carte adoptée aux anciennes observations. On ne peut donc pas l'admettre absolument stationnaire vis-à-vis le détroit de Magellan, ni au cap Horn : cela est visible s'il n'y a pas d'erreur dans l'inclinaison observée en 1710, par le P. Feuillée, en ces parages, & qui sont, comme on l'a dit, les seules observations que

19 juillet 1771.

M. Wilcke y ait employés. Il ſeroit ſur-tout bien néceſſaire que l'inclinaiſon de l'aiguille vers le Nord fût obſervée à *Canton;* puiſque ſur la route tracée pour l'année 1700, dans le voyage fait à la Chine par M. Cunningham, on aperçoit au Nord-oueſt de la nouvelle Hollande, en remontant vers Java, des différences de 8 à 9 degrés d'avec celles qui ont été données par le Capitaine Ékeberg, Suédois, en 1766. Or, puiſqu'à Canton qui eſt par 23 degrés de latitude boréale, l'inclinaiſon a dû y paroître, au commencement du ſiècle, égale à 10 degrés ou environ, & cela vers le Nord, comme je l'ai déjà dit, on auroit par-là quelque notice de la variation dans l'inclinaiſon qui doit mieux ſe reconnoître là où elle change de dénomination, que vers le cap de Bonne-eſpérance & au détroit de Magellan ou cap Horn, là où elle a paru avoir à peine une variation ſenſible.

Il en eſt de même à l'entrée de la mer du Sud. Le P. Feuillée l'ayant obſervée ſoigneuſement à Lima & au Callao de $18^{d}\frac{1}{3}$ vers le Sud par 12 degrés de latitude auſtrale, au lieu que ſous l'équateur, en 1741, elle a paru proche cette mer en deux diverſes ſtations inclinées de 10 à 15 degrés vers le Nord. J'ignore pourquoi la carte gravée ou carte Suédoiſe manque à la Vera-Crux * & aux environs de Quito & de Cuença, à moins que l'Auteur n'eût eu quelques ſoupçons qu'il n'a pu réaliſer dans ces mers, ſur les variations de l'inclinaiſon de l'aiguille, n'étant pas poſſible de trouver pour une même époque, à la mer du Sud vis-à-vis du Pérou, le point où elle a dû être nulle vers 1750. Ce qu'il y a de certain, c'eſt qu'elle varie peu en déclinaiſon, puiſqu'au Callao, trente-quatre ans après le P. Feuillée, M.^rs^ les Officiers eſpagnols ont vu l'effet de la déclinaiſon ou de la variation au Nord-eſt, à peine augmentée, ou plus grande d'environ 3 degrés; mais au contraire il y a bien de l'apparence, d'après les obſervations faites à Cayenne, à Quito & à Cuença, que l'inclinaiſon y a dû diminuer pendant les mêmes intervalles de temps.

* 1769, Inclin. à la Vera-Crux, 40 degrés $\frac{1}{4}$.

Il n'eſt pas poſſible de faire uſage d'une ſeule inclinaiſon que M. de Bougainville rapporte comme ayant été faite dans le détroit de Magellan, où elle a paru de $11^d\ 11'$. Quand on prendroit le complément de ce nombre, elle ſe trouveroit au moins $10^d \frac{1}{2}$ plus grande que par les obſervations modernes faites ſur l'*Endeavour,* vaiſſeau de guerre, qui s'eſt trouvé aux mêmes parages une année après M. de Bougainville.

Au reſte, on ne conçoit pas non plus pourquoi la carte Suédoiſe ſuppoſe depuis 1710, un changement de 5 degrés dans l'inclinaiſon de l'aiguille ſur la mer du Nord vers l'Amérique ſeptentrionale, lorſque le P. Feuillée a repaſſé de la Martinique en Europe: l'Auteur de cette carte ſuppoſe qu'elle a augmenté dans toute l'étendue de la mer du Nord; il ſe fonde ſur les obſervations faites à Londres depuis 1576; mais il paroît d'abord qu'elle eſt preſque ſtationnaire par les obſervations de M. Graham, comparées à celles de Nortman; & même il y a des preuves qu'à Londres depuis 1723, juſqu'à ce jour, l'inclinaiſon a dû diminuer à peine, ainſi qu'à Paris depuis le retour du voyage fait par M. Richer en l'île Cayenne; celui-ci a trouvé, il y a cent ans, l'inclinaiſon de l'aiguille à Paris de 75 degrés, ce qui a été vérifié avec la même aiguille avant & après ſon voyage, & il eſt certain aujourd'hui que l'inclinaiſon eſt de 3 degrés plus petite; c'eſt donc tout le contraire de ce qu'a allégué M. Wilcke dans ſes conjectures.

M. Thibault de Chanvallon, dont les papiers ſont ſéqueſtrés, m'a aſſuré avoir obſervé l'inclinaiſon de l'aiguille en l'île Cayenne, ce qui donneroit la différence ou variation dans cette inclinaiſon, depuis M. Richer, dont l'inclinaiſon obſervée en cette île, ſe trouvoit de 50 degrés. La Carte Suédoiſe ne repréſente pas, à beaucoup près cette inclinaiſon, ce qui détruit l'opinion de l'auteur ſur la correction qu'il faut faire aux obſervations de l'année 1710, comme on l'a dit, ſur la mer du Nord. Ce ſeroit, dis-je, encore une fois, tout le contraire de ce que l'auteur admet, & ne valoit-il pas mieux rapporter les obſervations de Cayenne dans ſa diſſertation,

& prendre un milieu entre ce que le P. Feuillée a obſervé un peu plus à l'Eſt à pareilles latitudes, pour établir enfin la poſition pour 1700, de la courbe magnétique qui doit paſſer par Cayenne?

Avertiſſement concernant la Carte Suédoiſe.

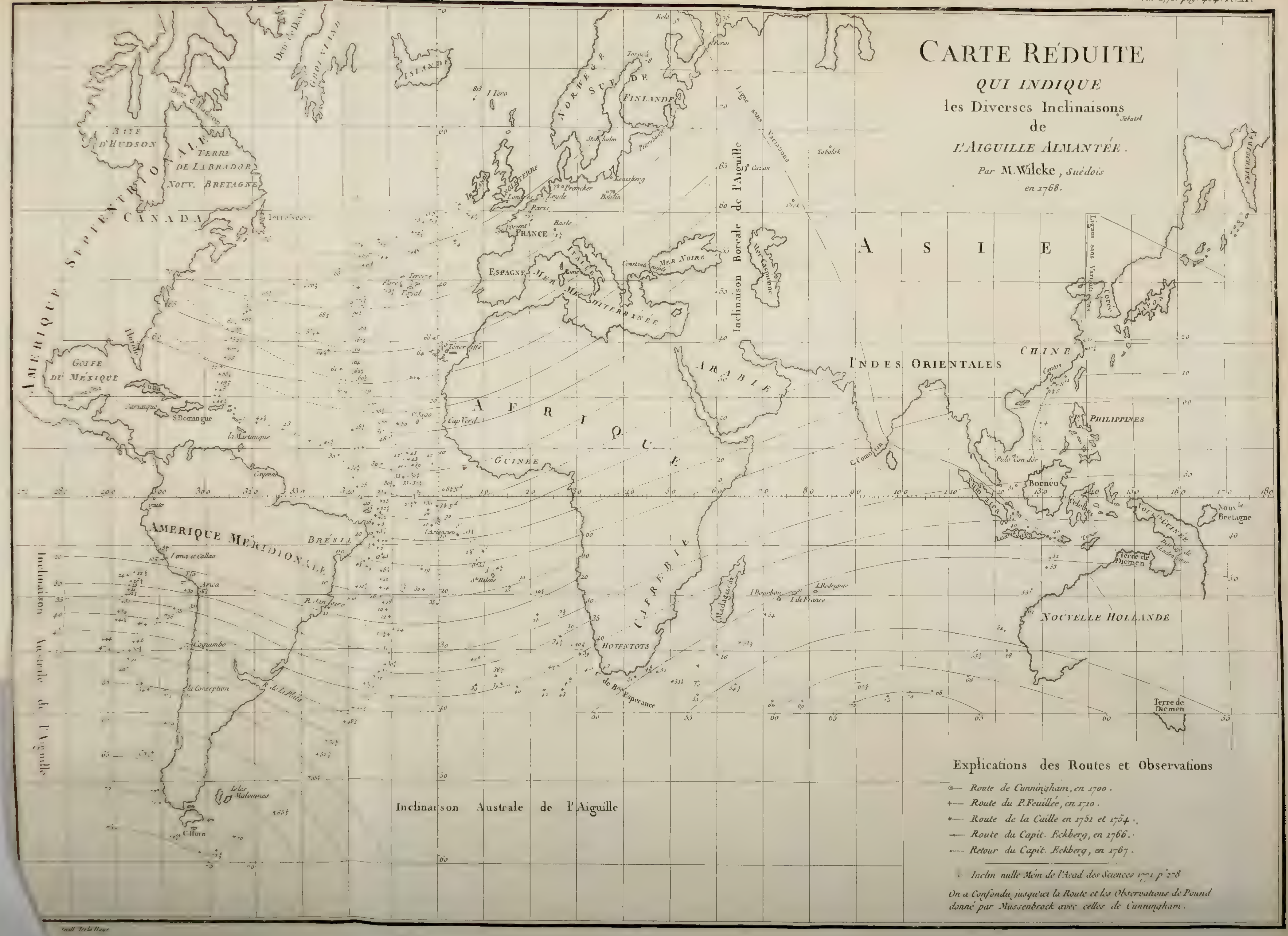
On a fait graver cette Carte réduite, telle qu'elle a été publiée, & ſans y rien retrancher ou changer abſolument; quoique ce fut un eſpèce de canevas qu'il eût fallu refondre en entier; mais il vaut mieux attendre que nous ſoyons dans le cas de recueillir un plus grand nombre d'obſervations ſur l'inclinaiſon de l'aiguille.

Dans la partie ſupérieure, à la droite de cette Carte, on y a ajouté les villes de l'Empire Ruſſe, & ſur-tout celles de Lapponie & de Sibérie, où la variation de l'aimant a été obſervée à l'occaſion des deux paſſages de Vénus ſur le Soleil, & on ne ſera pas fâché de voir ajouter auſſi la direction actuelle de la ligne ſans déclinaiſon, qui paſſe près Kola & le cap Comorin, aux Indes orientales; on a ajouté de plus, vers la gauche, les ſtations au Pérou & à la nouvelle Eſpagne, où l'inclinaiſon de l'aiguille a été obſervée vers 1740 & en 1769.



RÉPONSE

Détr. de Davis
GROENLAND
Détr.


CARTE RÉDUITE
QUI INDIQUE
les Diverses Inclinaisons
de
L'AIGUILLE AIMANTÉE.
Par M. Wilcke, Suédois
en 1768.
ASIE
AFRIQUE
AMERIQUE SEPTENTRIONALE
AMERIQUE MÉRIDIONALE
CANADA
INDES ORIENTALES
CHINE
NOUVELLE HOLLANDE
Inclinaison Boreale de l'Aiguille
Inclinaison Australe de l'Aiguille
Explications des Routes et Observations
Route de Cunningham, en 1700.
Route du P. Feuillée, en 1710.
Route de la Caille en 1751 et 1754.
Route du Capit. Eckberg, en 1766.
Retour du Capit. Eckberg, en 1767.
Inclin nulle Mém de l'Acad des Sciences 1771 p. 278
On a Confondu jusqu'ici la Route et les Observations de Pound donné par Mussenbrock avec celles de Cunningham.

RÉPONSE

À quelques Remarques critiques, relatives à un fait consigné dans un de mes Mémoires, imprimé parmi ceux que l'Académie a publiés pour l'année 1757.

Par M. DE LASSONE.

L'ANNÉE dernière (1775) il parut un Ouvrage imprimé à Amsterdam, & qui s'est vendu à Paris chez Didot, Libraire. Il est intitulé, *Traité de la Dissolution des Métaux (a)*. En le lisant, j'ai trouvé dans le Chapitre où il s'agit des dissolutions d'Antimoine, des Remarques relatives à une Observation que j'ai détaillée dans un de mes Mémoires imprimé dans le Recueil de ceux que l'Académie des Sciences a publiés en 1757. Dans ce Mémoire, où il s'agit principalement de la combinaison de l'acide marin avec l'antimoine, je parle d'un sel neutre particulier qui résulte de cette combinaison. Après en avoir examiné les principaux caractères, après avoir déterminé quelques traits de ressemblance qu'il me parut avoir avec le sel sédatif, & plusieurs propriétés par lesquelles il en diffère essentiellement, sur-tout par sa base purement antimoniale; enfin après avoir recherché soigneusement dans les ouvrages de Chimie déjà publiés, si quelque Auteur n'en avoit pas déjà fait mention, je dis, en rapportant un passage tiré des anciens Volumes de l'Académie, & où il est question de quelques observations faites sur l'antimoine, que Hombert seul, Auteur de ces observations, sembleroit peut-être avoir entrevu cette matière saline; quoique ce qu'il énonce à ce sujet en quatre mots, ne puisse donner lieu qu'à un simple soupçon. Et je conclus en affirmant que nul Chimiste, avant moi, n'avoit

(a) L'Auteur est M. Monnet.

fait connoître aussi particulièrement cette espèce de sel neutre antimonial.

L'Auteur du *Traité de la dissolution des Métaux*, en examinant les détails que je donne de ce sel antimonial, & auxquels il joint ses propres observations, fait deux remarques principales que l'on peut regarder comme critiques; l'une des deux au moins a-t-elle bien ce caractère. « Notre sel, » dit cet Auteur, *(b)*, est décrit (par M. de Lassone) comme » semblable au sel sédatif; mais il n'y a que la ressemblance » qu'il peut y avoir entre ces sels, à l'égard de leur configu- » ration, qui peut avoir porté cet habile Médecin à le désigner » ainsi. Vouloir y trouver d'autre conformité, ce seroit s'abuser grossièrement. »

Or pour démontrer que je ne me suis pas abusé aussi grossièrement, que cela même ne m'eût pas été possible, il me suffit ici de renvoyer à tout ce que j'ai dit sur la formation & les caractères du sel antimonial. Mon opinion sur la similitude des deux sels, comme sur leur différence, n'y est pas équivoque.

Voici l'autre objet de critique beaucoup plus direct & plus décidé.

« Remarquons, dit ce même Auteur du *Traité de la* » *Dissolution des Métaux (c)*, que M. Cartheuser, long-temps » avant M. de Lassone, avoit très-bien observé & décrit ce » sel . . . . . Ses observations là-dessus se trouvent imprimées » dans le second Volume de l'Académie d'Erford. On ne » sauroit trop, continue cet Auteur, multiplier ces sortes » d'observations, puisqu'elles établissent un genre particulier de » sel métallique très-différent de ceux qui résultent des mêmes » métaux pourvus de tout leur phlogistique. Malgré l'importance » de ces observations, il ne paroît pas que le commun de nos » Chimistes y aient fait la moindre attention. Plusieurs livres » de Chimie publiés depuis les observations de M.[rs] Cartheuser & Lassone n'en font nulle mention. »

(b) Traité de la dissolution des Métaux, *pages 252 & 253.*

(c) Même Traité, *pages 253 & 254.*

Par la double assertion que contient ce passage rapporté en entier, il paroîtroit bien décidé que long-temps avant moi, M. Cartheuser avoit observé & bien décrit ce sel dans un Mémoire particulier, imprimé dans le second volume des Actes de l'Académie d'Erfort; que par conséquent il est le premier auteur de la découverte, & que je n'ai eu d'autre mérite, en publiant mes observations relatives au même objet, que d'avoir confirmé celles de M. Cartheuser, & long-temps après lui.

Deux mots vont constater les époques véritables, répondre à tout, & rendre à chacun ce qui lui appartient.

Mon Mémoire où se trouvent les faits en question, a été publié parmi ceux de l'Académie en 1757.

Le second volume des Mémoires de l'Académie d'Erfort, où est consignée l'observation de M. Cartheuser, n'a été imprimé qu'en 1761, quatre ans après le premier; il n'y a pas eu d'autre édition, & M. Cartheuser n'a parlé de ce nouveau sel d'antimoine dans aucun autre de ses ouvrages antérieurs à celui-ci.

Il est donc évident que j'avois fait connoître le nouveau sel d'antimoine, quatre ans avant que les observations de M. Cartheuser sur le même objet eussent été rendues publiques.

L'Auteur du *Traité des Dissolutions Métalliques* a donc ici bien peu consulté la vérité en affectant deux fois, & d'un ton si décidé, de me priver en faveur d'un autre Chimiste, d'une antériorité qui m'appartient d'une manière aussi incontestable, & que j'ai droit de réclamer, en me disculpant ainsi devant l'Académie, d'une espèce de plagiat qu'on a prétendu sans doute m'imputer, & qui, s'il étoit réel, seroit toujours répréhensible, n'eût-il été fait que par inadvertence, ou par négligence, ou par oubli.



MÉMOIRE

Où l'on prouve la néceſſité de recourir à l'Art, pour corriger & prévenir les difformités de la taille qui ſurviennent dans un âge avancé; & où l'on démontre le danger qu'il y a d'employer l'Art pour prévenir indiſtinctement ces mêmes difformités dans le bas âge.

Par M. PORTAL.

IL eſt une beauté parmi les hommes, qui n'eſt point de pure convention, & qui conſiſte dans la juſte proportion des membres du corps de chaque individu. Cette régularité eſt d'autant plus précieuſe, que ſa perte entraîne ordinairement celle de la ſanté. Chaque homme eſt donc doublement intéreſſé à conſerver cette beauté que la Nature lui refuſe rarement, mais que des accidens lui dérobent trop ſouvent, & qu'il perd quelquefois par la faute de ceux qui préſident à l'éducation de ſon enfance. Je le ferai voir dans ce Mémoire où je me ſuis moins attaché aux agrémens du langage, qu'à la ſolidité des obſervations. L'utilité doit être le premier objet des travaux & des études du Médecin. On ne ſauroit diſconvenir que la régularité de la taille ne ſoit un des principaux objets de cette proportion qui fait la beauté & par conſéquent la ſanté du corps, qui en eſt une ſuite naturelle. La force des membres ne dépend pas ſeulement de celle de leurs muſcles, elle dépend encore de la diſpoſition des pièces oſſeuſes qui la compoſent.

Dans le dérangement de l'épine, la ligne verticale du corps & le centre de gravité changent de place, les muſcles qui couvrent cette épine, ou qui y ſont attachés, perdent leur direction naturelle pour en prendre une vicieuſe: ils ſont obligés de ſe contracter plus violemment pour produire le même effet, ſoit dans la marche, ſoit dans la ſtation.

Ainsi l'homme consume en pure perte une partie de ses forces, lors même qu'il manque de celles qui lui sont nécessaires pour remplir les fonctions les plus essentielles à la vie. La circulation du sang dans le cerveau est plus ou moins dérangée par la compression que les vertèbres cervicales exercent sur les artères ou sur les veines du cou; le cœur est plus ou moins resserré & déplacé par les côtes; les poumons sont comprimés & par les os de la poitrine & par le diaphragme. Ainsi ceux qui ont l'épine dérangée, souffrent plus ou moins de la respiration; & le sang & les esprits qui en émanent, sont, pour ainsi dire, arrêtés dans leurs propres sources.

Jusqu'ici l'état des viscères du bas-ventre a peu fixé l'attention des Médecins. Cependant cet objet étoit bien digne de leurs observations : tantôt on trouve chez les hommes qui ont l'épine dérangée, le foie écrasé par la colonne vertébrale qui s'est déjetée; tantôt c'est la rate qui souffre une pareille compression par la déviation de l'épine, & plus souvent encore l'estomac pressé de toutes parts descend jusqu'à l'ombilic ou plus bas; les intestins changent aussi souvent de place, & de toutes ces compressions & déplacemens, il survient un grand nombre d'accidens, les uns plus fâcheux que les autres. Que de jaunisses & de coliques les Médecins n'ont-ils pas eu à traiter, & qui provenoient de cette seule cause? On lit dans les Éphémérides des Curieux de la Nature, qu'un bossu étoit obligé de rendre ses urines presque à chaque pas qu'il faisoit, parce que les vertèbres de la portion lombaire de l'épine comprimoient l'un des reins, & en exprimoient la liqueur qu'il contenoit. Il est constaté par une observation du célèbre *Marcus Aurelius Severinus*, ancien Professeur d'Anatomie à Naples, qu'une dame bossue ressentoit des douleurs très-vives sur une des cuisses, & qu'on ne l'a guérie qu'en soutenant son épine. Madame la Comtesse de Roye dont j'ai donné l'histoire à l'Académie, se plaignoit de très-vives douleurs au bout du pied gauche, trois ou quatre heures après avoir mangé; on applique différens topiques sur l'endroit douloureux; on prescrit des

remèdes intérieurs, mais ſans ſuccès. L'ouverture du cadavre a fait voir que ces douleurs étoient produites par la compreſſion que l'inteſtin colon & les fauſſes côtes faiſoient ſur les nerfs lombaires.

Je ne finirois point, ſi je faiſois l'énumération de toutes les altérations qui ſont la ſuite des dérangemens de l'épine; je ferois voir d'après M. Haller, que les vaiſſeaux ſe plient & replient de diverſes manières; que ſouvent le ſang les dilate & les rompt; je prouverois d'après M. Morgagni, que les boſſus ſont plus ſujets à quelques hernies que les autres perſonnes; j'établirois d'après tous les Accoucheurs, que certaines diſpoſitions de l'épine rendent l'accouchement plus ou moins difficile, ou même impoſſible. En un mot, il ſeroit facile de démontrer que les dérangemens de l'épine troublent les fonctions de l'homme de diverſes manières, & que le moindre des inconvéniens, quoique fort grand, eſt la gêne qu'il éprouve dans ſa marche.

Il faut obſerver que les accidens ne ſont pas également graves dans ceux qui ſont devenus boſſus dans un âge tendre, que dans ceux qui le ſont devenus dans la ſuite: plus les parties ont leur tiſſu foible, lâche & flexible, mieux elles s'accommodent aux diverſes courbures de l'épine : plus au contraire elles ont acquis de conſiſtance, & moins elles cèdent & obéiſſent à l'épine, lorſqu'elle ſe dérange. Nous nous ſommes convaincus par l'obſervation, que quelque contournée que ſoit l'épine d'un enfant, ou d'un adulte, devenus boſſus dans la jeuneſſe, l'aorte l'accompagne toujours, & ſe replie ſur elle conformément à ſes contours. Si des cavités de la poitrine l'une eſt plus petite que l'autre, le poumon les remplit toujours également, au moins dans le bas âge; ſes lobes croiſſent à proportion de l'eſpace libre qu'ils trouvent.

Les viſcères du bas-ventre qui n'ont point encore pris tout leur accroiſſement, s'inſinuent dans les vides, & éludent la compreſſion de l'épine; la matière nourricière ſe porte toujours où elle trouve moins de réſiſtance, & ſi elle ne

peut augmenter le volume des viſcères d'un côté, elle l'augmente de l'autre, mais alors leur figure change; c'eſt ce que j'ai obſervé ſur des enfans boſſus, ſur des perſonnes qui l'étoient devenues dans un âge un peu plus avancé, je veux dire avant quinze ou vingt ans; chez ces derniers, on trouve toujours la figure des viſcères différente de la figure naturelle; mais elle eſt toujours telle, que ces viſcères correſpondent les uns aux autres, & qu'ils ſont placés de manière à remplir tous les interſtices.

Par cet arrangement qui eſt, pour ainſi dire, devenu naturel par la ſuite de l'âge, les fonctions ſont moins troublées; mais dans les adultes & dans les vieillards qui deviennent boſſus, lorſque les viſcères ont pris leur dernier accroiſſement, les ſymptômes produits par la déformation de l'épine, ſont plus graves & plus dangereux; les viſcères ne ſe déplacent qu'en ſouffrant de rudes compreſſions; leurs ligamens ſont diſtendus. Soit que les malades marchent, ou qu'ils ſe tiennent debout, ils ſentent des tiraillemens dans l'épine plus ou moins conſidérables ſelon leur ſituation. Les pièces qui compoſent la colonne vertébrale, ne répondent plus les unes aux autres, & fortement preſſées par le poids des parties ſupérieures, elles tendent toujours à ſe déplacer, & elles ne ſont maintenues dans leur poſition, que par les ligamens & par les muſcles. Mais avant que d'expliquer le mécaniſme des boſſes qui ſurviennent dans un âge avancé, avant que d'indiquer les moyens qu'il faut employer pour en prévenir l'augmentation, ou pour rendre les boſſes ſupportables, il eſt bon d'établir en faveur de ceux qui pourroient en douter, qu'il eſt très-vrai qu'on peut devenir boſſu dans un âge avancé.

Obſervations ſur un dérangement conſidérable de la taille, ſurvenu dans un âge avancé.

En 1767, une Dame de Province, âgée de quarante-ſix à quarante-huit ans, vint à Paris pour des affaires particulières; elle avoit une fort belle taille, elle étoit d'une bonne conſti-

tution, & juſque-là elle avoit fait uſage de corps aſſez étroits: tout-à-coup elle ſe ſent ſaiſie d'une fièvre putride; je la vis d'abord ſeul, enſuite avec M. Ferrein; elle ſe releva de ſa maladie, mais elle eut une convaleſcence fort longue; je la perdis de vue, ſix mois après j'appris qu'elle étoit reſtée boſſue & tellement inclinée, que ſa tète & la poitrine penchoient du côté droit, & qu'elle ne pouvoit ſe ſoutenir qu'à la faveur d'une béquille; ſans ce ſecours, elle tomboit toujours ſur le côté. Je fus conſulté de nouveau, & après avoir examiné la malade, je vis qu'on pouvoit facilement la redreſſer aſſez pour la remettre dans ſon ancienne poſition, mais que la difficulté étoit de l'y maintenir, & de l'empêcher de retomber. En conſéquence j'imaginai de lui faire mettre ſous l'aiſſelle droite une eſpèce de béquille cachée qui eût ſon point d'appui ſur les os des hanches du même côté, & je penſai que, l'équilibre rétabli dans la charpente oſſeuſe, la malade pourroit marcher, & qu'alors les muſcles de l'épine n'étant point tiraillés, je pourrois plus facilement parvenir à leur rendre le ton qu'ils avoient perdu.

Ce projet fut de difficile exécution: la machine que j'avois imaginée, portoit ſi fort ſur les hanches, qu'elle meurtriſſoit les chairs; je m'occupai à rendre le point d'appui plus doux, & je crus qu'il falloit étendre l'épine par degrés; alors je fis faire une machine d'acier, compoſée de deux pièces terminées en croiſſant: le ſupérieur arrondi & garni d'un couſſinet portoit ſous l'aiſſelle, & l'inférieur fut adapté à une ceinture de buffle très-ſouple; une des extrémités de ce croiſſant inférieur étoit au-devant du corps, l'autre en arrière, & les os des hanches au-deſſous à deux travers de doigt du croiſſant inférieur, de ſorte que les chairs ne pouvoient être meurtries. Chacun des deux croiſſans portoit une tige & un cliquet adapté à celle-ci, pour éloigner plus ou moins ces mêmes croiſſans, de manière qu'on pût relever l'épaule & la tirer par degrés. Cinq à ſix ſemaines ſuffirent pour la mettre dans toute ſon extenſion; la Dame ne portoit point cette machine, lorſqu'elle étoit couchée. On fit enſuite

des

des frictions fur l'épine, tantôt sèches & tantôt avec des liqueurs ſpiritueuſes dans leſquelles on avoit diſſout du ſavon & un peu de camphre. La Dame ſortit ; elle reprit ſon embonpoint, & dans peu elle put être contenue à la faveur d'un corps ordinaire qu'elle reprit & qu'elle porta dans la ſuite : toutes les fois qu'elle le quittoit, elle ſe penchoit vers le côté droit, de ſorte que pour ſe maintenir & pour marcher avec aiſance, elle avoit beſoin de ce corps.

Autre Obſervation du même genre.

Une femme âgée d'environ ſoixante ans, domeſtique d'un Anglois, étudiant en Médecine, ſe courba extraordinairement dans l'eſpace de deux ou trois mois ; les vertèbres lombaires ſe renversèrent de droite à gauche ; celles du dos, de gauche à droite, & les vertèbres cervicales parurent preſque dans leur ſituation ordinaire.

Cette femme marchoit ſans bâton ni béquille, & elle craignoit toujours de s'affaiſſer ſur elle-même ; l'Étudiant en Médecine, qui ſuivoit mes Cours au Collège royal, me demanda mon avis ſur ce cas ; je conſeillai l'uſage du corps ordinaire pour maintenir l'épine plus ferme ; on y recourut, & j'appris que par ce moyen cette femme put remplir les fonctions de ſon état.

J'euſſe pu joindre beaucoup d'autres obſervations à celles-ci, ſi j'avois recueilli toutes celles qui m'ont été communiquées de vive voix par des Médecins célèbres ou par des perſonnes dignes de foi ; mais je me contenterai d'en rapporter quelques-unes que j'ai trouvées dans des ouvrages authentiques.

Qu'on ouvre le volume de l'Académie des Sciences, *année 1758,* & on y trouvera & des exemples qui confirment ceux que nous venons de donner, & des préceptes généraux pour maintenir l'épine des vieillards. M. le Roi, l'un de nos reſpectables Confrères, perſuadé de l'importance de cette matière, d'après des obſervations particulières qu'il avoit devers lui, m'a fort engagé à publier les miennes. Je le fais aujourd'hui avec d'autant plus de plaiſir, que je crois, comme

lui, le ſujet utile & intéreſſant. M. Winſlow qui avoit été frappé des difformités de la taille, qui ſurviennent dans un âge avancé, diſoit qu'il falloit donner des corps aux adultes & aux vieillards, plutôt qu'aux enfans. Ce grand Maître fondoit ſon opinion ſur ſa propre expérience; elle lui avoit appris que des adultes & des vieillards avoient tout d'un coup perdu leur belle taille, & étoient devenus boſſus.

Je vais rapporter un fait analogue au ſujet. Madame de Montmorenci eſt atteinte d'un cathare; bientôt ſa taille ſe déforme; elle conſulte Ranchin, pour lors Chancelier de l'Univerſité de Montpellier. Celui-ci conſeille l'uſage de quelques machines; mais leur application ne fut d'aucune utilité.

Marc-Aurèle Séverin nous apprend qu'un noble Napolitain, dont le corps étoit bien conformé, ſe plaignit d'une douleur vers l'un des os iſchium, qui le gênoit beaucoup dans la marche; on conſeilla divers remèdes, & on accuſa pluſieurs cauſes de ce mal; cependant les convulſions ſurviennent; on ſaigne le malade du pied, mais ſans ſuccès. Severinus eſt appelé, & examine l'épine, & il la trouve renverſée. Ce vice reconnu, il ne doute plus de la cauſe de la douleur; il croit la trouver dans le déplacement des vertèbres; c'eſt pourquoi il conſeille de travailler à les redreſſer. Ce grand Médecin ne nous apprend pas quels furent les moyens qu'il fit mettre en uſage, ni quel en fut le réſultat: il en a cependant dit aſſez pour nous prouver que l'épine la plus régulière peut ſe déjeter, & donner lieu à des maladies fâcheuſes.

En effet, l'obſervation nous a appris que la plupart de ceux qui ont les vertèbres lombaires renverſées à gauche, ſentent des tiraillemens dans l'aine, & quelquefois dans toute l'extrémité inférieure droite, tandis qu'ils ſe plaignent d'une certaine ſtupeur ou engourdiſſement dans l'aine & dans l'extrémité inférieure gauche. Les vertèbres lombaires ne peuvent s'incliner, qu'elles n'étendent le muſcle pſoas du côté oppoſé, & ſi cette extenſion eſt conſidérable, les nerfs eux-mêmes ſont diſtendus, parce qu'alors l'épine eſt déviée. Il eſt vrai que ceux qui ſont dans cette fâcheuſe ſituation, ont le ſoin

de fléchir la cuiſſe du côté oppoſé à celui où s'eſt fait le renverſement des vertèbres lombaires, alors les douleurs ſont moindres, parce que le muſcle pſoas & les nerfs voiſins ne ſont pas ſi tendus. Ceux qui ſont ainſi boſſus, retirent un autre avantage de cette flexion de la cuiſſe; ils raccourciſſent un peu l'extrémité inférieure, & le boſſu s'inclinant ſur elle, ramène vers l'axe du corps les vertèbres qui s'en étoient écartées.

Quant à l'engourdiſſement de la cuiſſe du côté vers lequel les vertèbres lombaires ſe ſont déjetées, il eſt la ſuite de la compreſſion que les vertèbres elles-mêmes & les fauſſes côtes font ſur les nerfs, & il eſt continu ou inſtantané, ſelon que les vertèbres lombaires ſont plus ou moins inclinées.

Voici une autre obſervation rapportée par M. Morgagni; elle prouve qu'on peut devenir boſſu dans un âge très-avancé, & lors même qu'on s'y attend le moins. Un homme, cardeur de chanvre de profeſſion, âgé de quarante-deux ans, & aſſez bien conſtitué, ſe plaint d'une élévation vers le cartilage xiphoïde; il conſulte pluſieurs perſonnes qui lui conſeillent divers topiques; il en fait uſage, mais ſans ſuccès. Deux ans après ſa tumeur augmente, & ſi vîte qu'en peu de jours elle fut deux fois plus groſſe qu'auparavant: de nouveaux accidens ſurviennent; c'eſt une tumeur & une douleur vers les vertèbres dorſales inférieures; l'épine ſe déforme; des vomiſſemens ſurviennent; les urines ſont tantôt ſupprimées, & tantôt elles coulent librement; les convulſions gagnent les extrémités ſupérieures, tandis que les inférieures tombent dans l'engourdiſſement. Le malade meurt dans cet état; on l'ouvre, & on ſe convainc que les deux tumeurs qui étoient ſurvenues au tronc étoient une ſuite du déplacement du ſternum & des vertèbres.

Indépendamment des inflexions latérales de l'épine, elle ſemble ſe tordre quelquefois, & cette eſpèce de torſion eſt très-dangereuſe; alors le cartilage xiphoïde & l'extrémité du ſternum ne répondent plus aux os pubis, mais ſe déjetent ſur le côté, & une épaule ſe porte plus en avant que l'autre. Or dans cette

eſpèce de boſſe, les parties molles ſouffrent des diſtenſions cruelles, & le ſujet a la plus grande peine de ſe tenir debout, parce que les vertèbres, ſi elles ne ſont pas enkiloſées, ne trouvant pas un point d'appui ſuffiſant ſur elles-mêmes, le prennent ſur les ligamens & ſur les muſcles; or comme ceux-ci ſont plus ou moins flexibles, les ſujets craignent toujours de s'affaiſſer ſur eux-mêmes, ou, comme je l'ai entendu dire, de ſe plier en deux.

Mais ce cas, il faut l'avouer, n'eſt point ordinaire, les autres genres de boſſes qui ſe font ſimplement ſur les côtes dans un âge avancé ſont plus communs & les dérangemens de l'épine de devant en arrière ſont ſi fréquens dans les vieilles perſonnes qu'il n'eſt pas poſſible d'en donner des exceptions : il eſt vrai que chez les uns la taille ſe courbe beaucoup plus vîte que chez les autres.

Les Médecins qui en ont recherché les raiſons en ont propoſé pluſieurs bien différentes, mais n'ont rien dit d'intéreſſant à ce ſujet. Voici ce que l'on peut établir là-deſſus. Deux cauſes concourent au déplacement de l'épine dans un âge avancé, c'eſt le raccorniſſement des ligamens antérieurs des vertèbres & la foibleſſe des muſcles du dos; par la ſuite du temps, les ligamens de l'épine ſe deſsèchent & ſe raccorniſſent, c'eſt un fait dont chacun pourra s'aſſurer, en jetant les yeux ſur l'épine des ſujets de divers âges, on verra que le grand ligament antérieur s'oſſifie très-ſouvent, & alors il perd beaucoup de ſa longueur & ploie l'épine en avant. Les petits ligamens qui ſont par-deſſus, & qui ne s'étendent que d'une vertèbre à l'autre, perdent auſſi de leur longueur; les vertèbres ſe rapprochent intérieurement; ainſi les trois courbures de l'épine changent. Les vertèbres lombaires, qui naturellement forment, lorſque le ſujet eſt debout, un cylindre convexe en avant, ne forment plus qu'une colonne droite, la concavité des vertèbres dorſales augmente, & les vertèbres cervicales ſont encore déjetées en avant : c'eſt ce que j'ai obſervé, je puis le dire, ſur beaucoup de vieillards.

Je ſavois depuis long-temps que les membranes s'épaiſ-

ſiſſent, qu'elles ſe retirent ſur elles-mêmes avec l'âge, & que les viſcères membraneux, tels que l'eſtomac & la veſſie, ſur-tout étoient moins amples chez les vieillards que dans les adultes; on ſavoit que par la ſuite des années, les ligamens capſulaires des articulations perdoient de leur ſoupleſſe, & ſe raccorniſſoient; & c'eſt d'après la connoiſſance de ces faits avérés des grands Anatomiſtes, que je crus devoir interroger la Nature, pour ſavoir ſi la cauſe du renverſement de l'épine dans les vieillards ne dépendoit pas du raccorniſſement des ligamens antérieurs de l'épine beaucoup plus forts & plus nombreux que les poſtérieurs; l'analogie me le faiſoit conjecturer, l'obſervation m'en convainquit.

Or, comme il y a trente vertèbres, & qu'outre le ligament commun qui les revêt toutes, il y a des ligamens particuliers, ſi nous ſuppoſons que chacun s'eſt raccourci d'une quantité quelconque, l'épine ſera portée en avant pour faire perdre l'équilibre au ſujet; de-là vient que pour le conſerver, les vieillards ont coutume de fléchir les genoux lorſqu'ils ſont debout, & par cette flexion, ils reculent aſſez le bas du tronc pour leur ſervir de contrepoids.

A proportion que les ligamens antérieurs de l'épine ſe deſsèchent, les corps cartilagineux interpoſés entre les vertèbres s'affaiſſent, les vertèbres s'approchent, & la hauteur totale de l'épine diminue. De-là vient que certaines perſonnes ſont obligées de faire raccourcir leurs vêtemens à proportion qu'elles vieilliſſent. Alors les muſcles du dos meuvent les vertèbres avec beaucoup plus de difficulté; car le mouvement de celles-ci eſt d'autant plus libre qu'elles ſont plus éloignées l'une de l'autre par le corps catilagineux intermédiaire. Or, comme dans les jeunes gens il eſt plus épais qu'il ne l'eſt dans un âge avancé, il faut pour que ces muſcles redreſſent l'épine dans les vieillards, qu'ils emploient plus de force dans leur contraction; mais bien loin de le pouvoir, ils ſont incapables de ſe contracter auſſi puiſſamment qu'ils le feroient dans l'âge tendre.

Dans quelques ſujets, cet affoibliſſement a plutôt lieu que

dans d'autres; les muſcles du dos, comme tous les autres muſcles, perdent leur force à meſure qu'ils ſont diſtendus; c'eſt ce qui arrive dans les longues flexions de l'épine. Ainſi les Gens de Lettres, certains ouvriers, tels que les Paveurs, & en un mot, tous ceux qui par état ſont obligés de ſe courber fréquemment, perdent leur taille plutôt que les autres.

L'exercice donne de la force aux muſcles & favoriſe leur accroiſſement; une preuve bien convaincante, c'eſt que les perſonnes qui courent beaucoup, les Tourneurs de profeſſion, par exemple, ont ordinairement les extrémités inférieures plus groſſes que les ſupérieures, tandis que les Boulangers ont celles-ci plus groſſes que les inférieures. Il eſt très-important d'obſerver que les perſonnes qui n'ont fait aucun uſage des corps, ont les muſcles du dos plus forts & plus volumineux que les autres. On peut même dire qu'on a peine à démontrer les muſcles du dos dans les femmes qui ſe ſont diſtinguées à porter des corps étroits; cependant les Dames moins jalouſes pour l'ordinaire de leur taille, lorſqu'elles ſont parvenues à un certain âge, abandonnent l'uſage des corps ou en prennent de plus grands & de plus lâches, & comme alors les muſcles du dos ſont prodigieuſement affoiblis, elles ſe voûtent ou elles s'inclinent ſur les côtés. Pluſieurs qui ſont devenues boſſues vers leur temps critique, rapportent la cauſe de leur diſtorſion à la ceſſation du flux périodique, tandis que ce n'eſt qu'à la ceſſation de l'uſage des corps, ce qui prouve qu'il eſt pernicieux d'en faire contracter l'habitude aux enfans. Les muſcles ſont chez eux aſſez forts pour maintenir & pour mouvoir l'épine; les bains froids, l'exercice même & les frictions ſur le dos pourroient ſuffire à la redreſſer; mais dans un âge avancé, les muſcles du dos, à force d'avoir été comprimés, & d'être reſtés dans l'inaction, ſont devenus incapables de maintenir le tronc en équilibre.

En même temps que les muſcles ſe ſont affoiblis, la poitrine s'eſt développée & s'eſt portée en avant malgré les corps qui la comprimoient, les viſcères de la poitrine & ceux du bas-ventre ſont devenus plus peſans, ce qui augmente la

propenſion qu'a le tronc de s'incliner en avant, & par conſéquent la réſiſtance que les muſcles du dos doivent vaincre pour le maintenir droit.

Il eſt vrai que ce ſurcroît de réſiſtance ſeroit immenſe pour les muſcles de l'épine les plus vigoureux; auſſi la Nature a-t-elle concouru à la diminuer, en augmentant les courbures de l'épine (car elle approche d'autant plus de la ligne droite que la poitrine eſt petite, c'eſt un fait dont on peut ſe convaincre, en examinant les troncs des ſujets de divers âges); mais malgré ces reſſources de la Nature, le tronc a plus de propenſion dans les adultes & dans les vieillards à tomber en devant que dans les enfans; ils ont donc un plus grand beſoin de corps, & il n'eſt pas douteux que les perſonnes qui ont malheureuſement vieilli avec des corps, ne doivent en faire uſage toute leur vie; puiſque la Nature ne peut plus ſe ſuffire à elle-même, il faut que l'art vienne à ſon ſecours. Une ancienne habitude mérite beaucoup d'être reſpectée; d'ailleurs à un âge avancé les corps ne peuvent plus s'oppoſer à l'accroiſſement des parties, les côtes & tous les os du tronc ſont aſſez fermes pour réſiſter à la compreſſion, pourvu toutefois qu'elle ſoit modérée; la poitrine eſt développée, & les quatre courbures de l'épine bien formées. Il n'en eſt pas de même dans l'enfance, on a pris un corps lorſqu'il falloit laiſſer la poitrine libre, on a comprimé les côtes & le ſternum en dedans, au lieu de faciliter leur accroiſſement en dehors; les viſcères du bas-ventre ont été refoulés vers la poitrine. Ainſi par une manœuvre mal combinée, on a nui aux plus importantes fonctions de l'économie animale. Pluſieurs perſonnes ſont mortes de phtiſie, d'autres de quelques ſquires dans le foie, dans l'épiploon ſur-tout, ou en un mot, dans quelqu'un des viſcères du bas-ventre. On a vu des ſujets périr du vomiſſement, par la compreſſion que la pointe des corps, des buſques ou des buſquières avoient faite ſur l'eſtomac ou ſur les inteſtins. J'ai ouvert il y a environ deux ans le corps d'une fille de vingt à vingt-cinq ans, qui avoit péri d'atrophie & de vomiſſemens, & qui avoit porté des corps

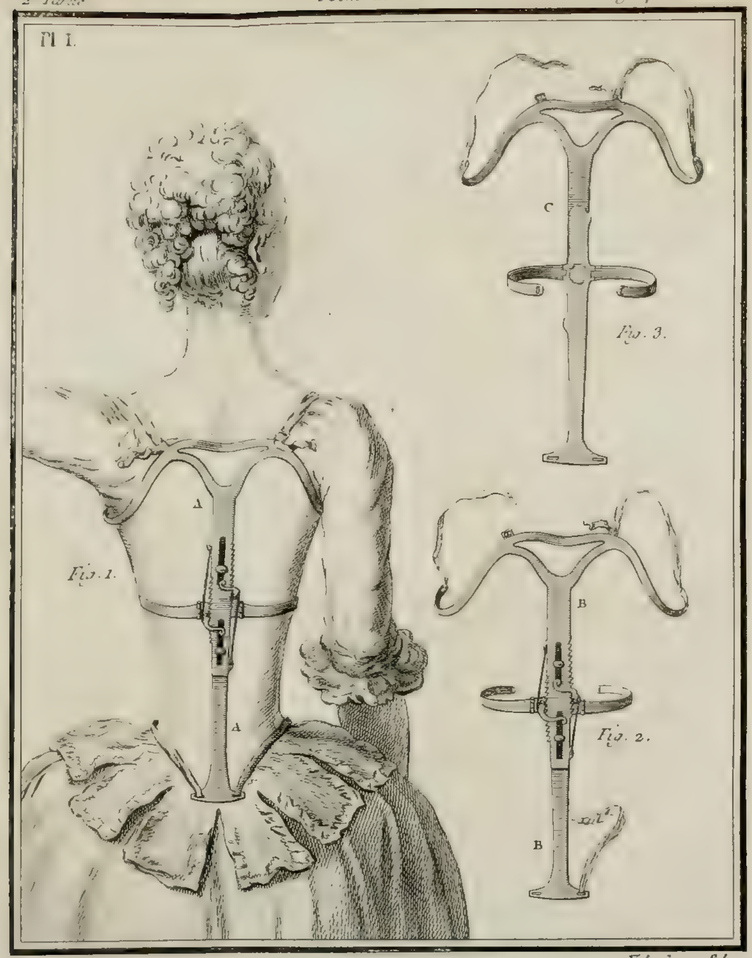
très-étroits. Je trouvai l'ileum tellement rétréci immédiatement au-deſſous de l'ombilic, qu'à peine y pouvoit-on paſſer une plume à écrire. Cette fille avoit la poitrine fort aplatie en devant, & le ſternum, chez elle, étoit courbé & déjeté en dedans. M. Morgagni nous a communiqué pluſieurs obſervations analogues.

Qu'on me permette de faire remarquer en finiſſant, que la forme qu'on a donnée aux corps eſt la plus bizarre qu'il ſoit poſſible d'imaginer. La poitrine eſt naturellement plus large en bas qu'en haut; c'eſt pour ainſi-dire, une hotte renverſée, & les corps ſont faits au rebours; le bas-ventre eſt naturellement plus ſaillant que la poitrine; mais les corps produiſent un effet contraire, ils repouſſent les viſcères & les refoulent contre le diaphragme qui s'élève dans la poitrine, & comprime les poumons. L'épine, dans l'homme le mieux fait, a quatre courbures de devant en arrière, & les corps tendent à lui donner la figure droite; de ſorte qu'outre l'inconvénient de nuire aux plus grandes fonctions, ils ont encore celui de rendre boſſues les perſonnes qui en font uſage, dans l'idée d'éviter, de corriger ou de guérir cette difformité.

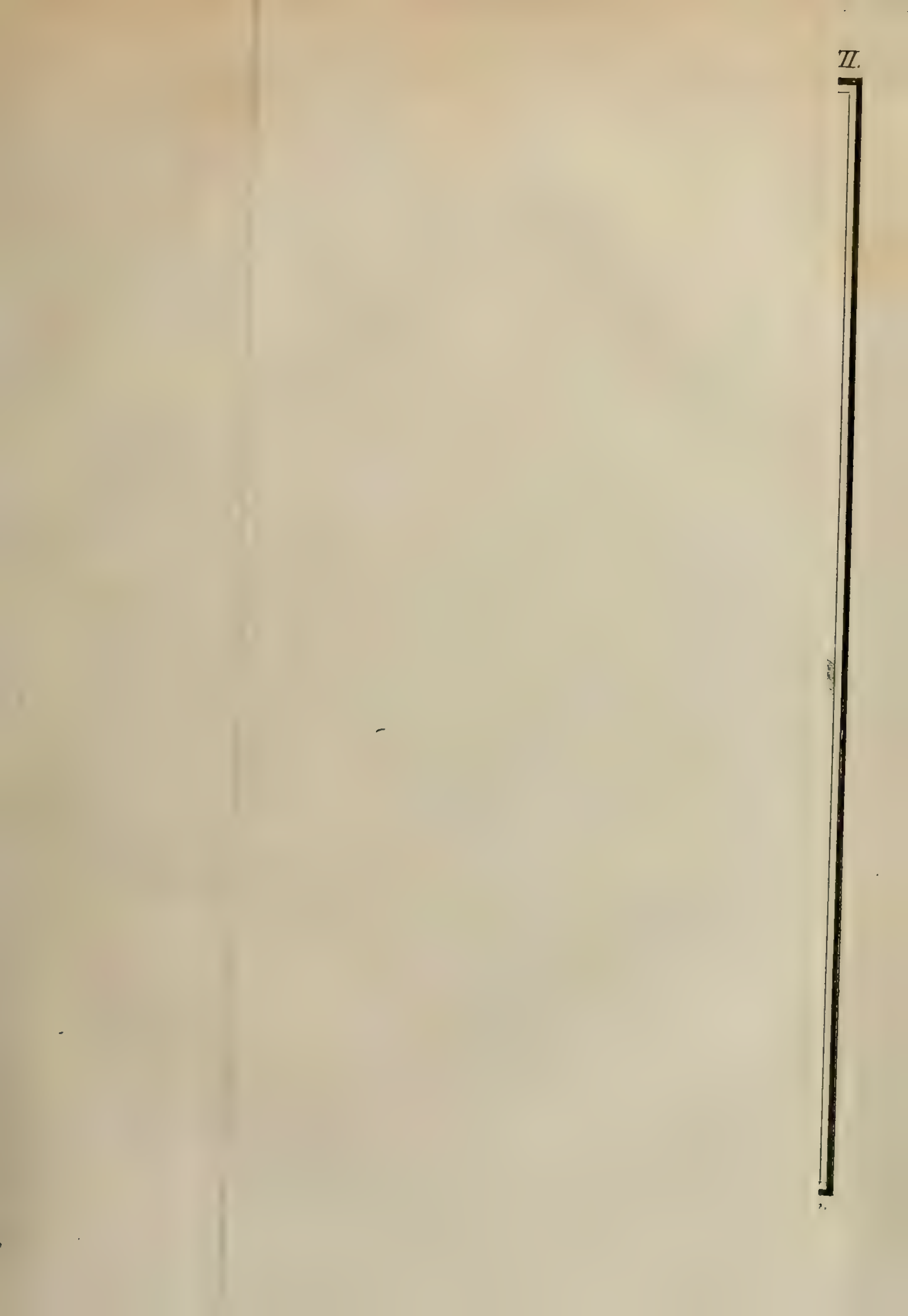
Mais dans une perſonne qui a vieilli avec des corps, la Nature a réſiſté à leurs mauvais effets, ou bien le mal eſt fait, & il en réſulteroit un plus grand d'en abandonner l'uſage; c'eſt pourquoi nous ne craindrons pas de le recommander. L'obſervation eſt pour nous, & la théorie ne nous eſt pas contraire.

Les perſonnes même qui n'ont point fait uſage des corps doivent y recourir, ſi elles ont de la foibleſſe dans les muſcles du dos, ou que par quelqu'autre cauſe, leur épine ſe courbe trop vîte: c'eſt le ſeul moyen de prévenir un plus grand dérangement de la taille. Pourquoi ne pas ſoutenir l'épine lorſqu'elle a commencé à ſe déjeter? Il eſt vrai qu'il faut varier la forme & la ſolidité des corps ſuivant les circonſtances, & qu'il faut quelquefois leur ſubſtituer les machines. Par exemple, dans un renverſement de l'épine ſur le côté, j'ai employé avec ſuccès une ſeule machine d'acier fort légère & qui ſoutint l'épine

Z.



T. le Gouaz Sculp.


II.



Fossier del. Y Gouaz Sculp

l'épine & les épaules *(a)*. Dans un autre cas où l'épine étoit plus inclinée de devant en arrière que sur les côtés, je conseillai l'usage de deux croissans *(b)*. En général, je crois qu'on peut & qu'on doit varier les moyens de redresser & de soutenir l'épine; mais ces objets sont susceptibles, & exigent même des détails dans lesquels je ne puis point entrer dans ce Mémoire.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

FIGURE 1.re A représente une machine dont on s'est servi avec succès, pour maintenir la taille d'une jeune personne qui se courboit involontairement en avant quand elle n'étoit pas soutenue.

Fig. 2. BB représentent la même machine hors de place & vue par dehors.

Fig. 3. C, la même machine par-devant.

PLANCHE II.

On voit dans la *Figure 1.re* la machine *A* représentée dans la *planche I*, à laquelle on a adapté avec succès, pour redresser l'épine, la portion cervicale, principalement une tige perpendiculaire *b*, & un demi-cercle *C* mobile, qu'on assujettit à la tête avec un ruban.

La machine *B* *(fig. 2)*, servit à maintenir une vieille femme, qui ne pouvoit marcher sans béquilles : son épine étoit singulièrement tombée sur les côtés.

Fig. 3. La machine *B* de la *figure 2*, dont on voit mieux le développement.

(a) Voyez la première Planche.
(b) Voyez la seconde Planche.



REMARQUES
SUR LA
TOISE-ÉTALON DU CHÂTELET,
Et ſur les diverſes Toiſes employées aux meſures des Degrés terreſtres & à celle du Pendule à ſecondes.

Par M. DE LA CONDAMINE.

20 Juillet 1758.

IL me ſeroit aiſé de prouver que la toiſe du Châtelet, ſi on entend par ce nom une meſure certaine & fixe, n'a jamais exiſté; mais ce qui ſuffit pour le cas préſent, & dont tout le monde convient, c'eſt qu'elle n'exiſte plus aujourd'hui: M. de Mairan, le 24 Mai dernier, avertit l'Académie, que la barre de fer ſcellée dans le mur au pied de l'eſcalier du Châtelet, pour ſervir d'*étalon* à la toiſe, étoit altérée & fauſſée, & que ſa longueur avoit changé. Il ajouta que les Magiſtrats à qui cette inſpection eſt commiſe, étoient convenus avec lui de s'en rapporter à l'Académie pour la reſtauration de cette meſure publique.

Il faut avouer qu'un étalon qui ne ſemble deſtiné qu'à la vérification juridique des toiſes ordinaires des Maçons, des Menuiſiers, ou, ſi l'on veut, des Architectes, ne paroît pas exiger des précautions bien ſcrupuleuſes. On ſait que dans le toiſé des bâtimens on néglige les lignes; quelquefois même les pouces ne tirent pas à conſéquence; mais puiſque l'on conſulte l'Académie ſur la fixation du nouvel étalon, ſans doute on en attend une exactitude digne d'elle.

Pour remplir ces vues, il faut commencer par convenir quelle eſt la toiſe employée par l'Académie dans *la meſure des Degrés de la Terre*, & cet éclairciſſement ne permet pas la plus legère négligence. La moindre erreur ſur la longueur de la toiſe ſe multiplie près de ſoixante mille fois ſur la longueur du

Degré du Méridien; un centième de ligne, si nos sens aidés des instrumens les plus parfaits peuvent atteindre jusque-là, n'est pas à négliger volontairement sur la longueur du pendule à secondes, quand il est possible d'en tenir compte. Il en résulte quelques différences dans la Figure de la Terre & dans la théorie de la gravitation, Problèmes importans pour la Physique céleste.

L'Astronomie, la Géographie, la Navigation sont donc intéressées à la fixation de la toise de l'Académie. Il s'agit sur-tout de constater les différences, s'il s'en trouve, entre les différentes toises dont on s'est servi pour les mesures des divers Degrés, & de rapporter tout à la même mesure.

Si j'ai paru vouloir retarder la décision de cette question en demandant à lire un Mémoire, ce n'est que pour mettre l'Académie en état de prononcer avec pleine connoissance de cause sur un objet dont je me suis occupé depuis long-temps, dont j'ai senti toute l'importance, sur lequel j'ai déjà fait mon possible pour fixer l'attention de l'Académie, afin de ne laisser à l'avenir aucun doute sur cette matière. En 1749, me trouvant Directeur de l'Académie, je fis nommer, par une délibération de la Compagnie, qui doit être enregistrée, des Commissaires pour aller vérifier à l'Observatoire la longueur précise de la toise avec laquelle les Degrés de France avoient été mesurés; & j'ai requis depuis, plusieurs fois, l'exécution de cette délibération. Qu'il me soit permis de dire qu'il y a plus de vingt ans que j'ai prévu la sorte d'embarras où l'on tomberoit quelque jour, qui commence à se faire sentir, & dont les conséquences pourroient avec le temps devenir plus dangereuses; il est encore temps de les prévenir. Avant que de proposer les remèdes, remontons à l'origine de l'incertitude : j'ai recueilli sur cela quelques faits dont la tradition peut s'effacer, & qui méritent l'attention de l'Académie.

De la Toise de M. Picard.

M. Picard dans son Traité latin *des Mesures*, inséré dans

le *Tome VI* des anciens Mémoires de l'Académie, dit avec ſon laconiſme ordinaire, que *l'ancienne toiſe des Maçons fut réformée & raccourcie de cinq lignes en 1668*, ſans nous apprendre aucune autre circonſtance. On ſait ſeulement par tradition que, pour donner au nouvel étalon la véritable longueur qu'il devoit avoir, on ſe ſervit de la meſure de la largeur de l'arcade ou porte intérieure du grand pavillon qui ſert d'entrée au vieux Louvre, du côté de la rue Fromenteau. Cette ouverture, ſuivant le plan, devoit avoir douze pieds de largeur; on en prit la moitié pour fixer la longueur de la nouvelle toiſe, qui ſe trouva plus courte de cinq lignes que l'ancienne.

Remarquons en paſſant que ſi cet expédient ſuffiſoit pour reconnoître une erreur de cinq lignes, il n'étoit ſûrement pas propre à retrouver la vraie longueur de la toiſe avec une grande préciſion. Car quelle ſûreté a-t-on, 1.° que la largeur de douze pieds de la porte du Louvre, probablement meſurée, lors de la conſtruction, avec un pied commun, & indiquée par deux piquets ſur le terrein, ait été déterminée plus exactement que les autres meſures fondamentales d'un bâtiment, dans leſquelles quelques lignes de plus ou de moins, pour ne pas dire quelques pouces, ſont un objet inſenſible, & ſont comptées pour rien? 2.° Suppoſant gratuitement, & contre toute vraiſemblance, que la diſtance de douze pieds entre les jambages de l'arcade ait été originairement fixée avec la dernière préciſion, comment a-t-on pu s'aſſurer depuis, à une ligne près, de la diſtance de deux murs conſtruits d'une pierre poreuſe, expoſée aux injures de l'air, couverte d'un enduit de pouſſière délayée par la pluie, & d'une boue incorporée avec la pierre même? Si quelqu'un penſe que j'exagère ici la difficulté, je l'invite à jeter les yeux, en ſortant de l'Académie, ſur l'endroit dont je parle, & je m'en rapporte à lui.

Quoi qu'il en ſoit, la toiſe ancienne du Châtelet, fut réformée en 1668; c'eſt M. Picard qui nous en aſſure, & dit qu'il ſe ſervit de la nouvelle toiſe pour la meſure de ſon

degré *(a)*, compris entre les parallèles de Paris & d'Amiens. Si la toiſe employée par M. Picard fût reſtée en dépôt à l'Académie ou à l'Obſervatoire, où M. Picard dit formellement qu'*elle ſera ſoigneuſement conſervée*, on n'eût pas manqué de la faire ſervir dans toutes les meſures de Degrés poſtérieures à la ſienne; on les eût toutes rapportées à cette toiſe, & les doutes ſurvenus depuis ſur la longueur vraie de la baſe de M. Picard, euſſent été promptement éclaircis; mais la toiſe de M. Picard ne ſubſiſte plus, & nous n'avons de monument authentique, de ſon temps, qu'une barre de fer ſcellée dans le mur au pied de l'eſcalier du grand Châtelet, terminée par deux ſaillies ou redans en retour d'équerre, & qui ſervoit d'étalon aux meſures publiques. Cet étalon avoit été groſſièrement conſtruit; ſes angles s'étoient émouſſés, & les faces intérieures des deux redans qui doivent comprendre la toiſe qu'on y préſente, n'ont jamais été polies ni limées d'équerre, & parallèlement l'une à l'autre. Il n'eſt donc pas étonnant que les toiſes étalonnées en différens temps & par différentes perſonnes ſur cet original défectueux, ne ſe trouvent pas parfaitement égales entr'elles.

Nous ne ſavons ni dans quelle ſaiſon de l'année, ni par qui le nouvel étalon du Châtelet fut poſé. Si M. Picard y eût préſidé, la circonſtance de la ſaiſon paroît trop importante pour qu'il eût négligé de nous en inſtruire. Tout ſemble annoncer qu'on abandonna ce ſoin à quelqu'ouvrier, ou du moins à quelque ſubalterne peu intelligent. Il ſeroit donc poſſible que l'étalon eût été, dès le temps qu'il fut poſé, plus long que la toiſe que M. Picard emporta pour meſurer ſon degré, ou qu'il ſe fut alongé depuis, en frappant à coups de marteau les clous qui l'attachoient au mur; d'ailleurs les deux équerres doivent s'être uſées par la rouille, par le frottement continuel des meſures préſentées, & peut-être en les dérouillant; il eſt donc fort apparent que leur diſtance s'eſt accrue: il ne ſeroit pas étonnant en ce cas que les nouvelles

(a) Meſure de la Terre de M. Picard, *art. IV.*

toises, présentées à cet étalon depuis vingt-cinq ou trente ans, fussent plus longues que celle de M. Picard, & par conséquent qu'on eut trouvé moins de toises que lui dans la mesure de sa base, entre Villejuive & Juvisy. *(Mém. de l'Acad. année 1754, p. 172).*

Il est juste de chercher tout ce qui peut excuser ce célèbre Académicien, qui ne mérite pas d'être condamné légèrement; mais il faut avouer que la conjecture précédente ne peut sauver l'erreur reconnue dans la base de Villejuive, à moins d'attribuer une autre erreur à M. Picard, puisque lui-même nous a laissé le moyen de vérifier la longueur de sa toise, *en l'attachant*, ce sont ses termes, *à un original, lequel étant tiré de la Nature même, doit être invariable & universel.* Il a trouvé que la mesure du pendule à secondes, à Paris, étoit de 36 pouces 8 lignes ½ de sa toise, & cette longueur très-peu différente de la vraie, est incompatible avec le nombre de toises qu'il donne à sa base: il faut donc convenir que M. Picard s'est trompé, soit en assignant deux cinquièmes de ligne de trop à son pendule, si sa toise étoit bonne, soit en employant une toise trop courte de plus de quatre cinquièmes de ligne, si la mesure de son pendule est exacte.

Les autres toises connues de l'Académie, & différentes de celle de M. Picard, sont 1.° celle que M.rs Godin, Bouguer & moi, avons portée au Pérou en 1735, & qui nous a servi à mesurer les trois Degrés du méridien les plus voisins de l'Équateur; 2.° la toise avec laquelle M.rs de Maupertuis, Clairaut, Camus & le Monnier ont mesuré en 1736 & 1737, le Degré du méridien qui coupe le Cercle polaire en Lapponie; 3.° la toise dont M. Cassini de Thury & M. l'abbé de la Caille, ont fait usage en 1739 & 1740, pour la vérification de la Méridienne de Paris; 4.° la toise employée par M. l'abbé de la Caille, à la mesure des 34.e & 35.e degré de latitude australe, au cap de Bonne-espérance en 1752; 5.° la toise de M. de Mairan, avec laquelle il fit ses expériences du pendule, en 1735. Toutes ces toises originairement ont eu pour modèle celle du Châtelet, qui

ne ſubſiſte plus aujourd'hui: on les a toutes ſuppoſées égales entr'elles. Si leur égalité étoit parfaite, il n'y auroit pas de choix à faire, ou ce choix ſeroit indifférent, mais dans la dernière comparaiſon, qui en fut faite en 1756, à l'occaſion de la nouvelle meſure de la baſe de Villejuive, on reconnut quelques différences entre ces différentes toiſes, & la préciſion que nous cherchons ici ne permet pas de les négliger.

Examinons donc laquelle de ces cinq toiſes mérite la préférence, & doit être cenſée la toiſe originale à laquelle il convient de rapporter les autres. Je ne parle point d'une ſixième toiſe, comparée au même étalon par feu M. du Fay, & dont j'ai fait l'acquiſition, parce qu'elle n'a ſervi qu'à des expériences particulières qui ne méritent pas qu'elle ſoit admiſe au concours.

De la Toiſe de l'Équateur.

« Nous avions emporté avec nous en 1735 *(b)*, une « règle de fer poli, de dix-ſept lignes de largeur, ſur quatre « & demie d'épaiſſeur. M. Godin aidé d'un artiſte habile (le « ſieur Langlois) avoit mis toute ſon attention à ajuſter la « longueur de cette règle, ſur celle de la toiſe *étalon*, qui avoit « été fixée en 1668 au pied de l'eſcalier du grand Châtelet « de Paris. Je prévis que cet ancien étalon, fait aſſez groſſiè- « rement, & d'ailleurs expoſé aux chocs, aux injures de l'air, « à la rouille, au contact de toutes les meſures qui y ſont pré- « ſentées, & à la malignité même de tout mal-intentionné, ne « ſeroit guère propre à vérifier dans la ſuite la toiſe qui alloit « ſervir à la meſure de la Terre, ni à devenir l'original auquel « les autres toiſes devoient être comparées. Il me parut donc « très-néceſſaire, en emportant une toiſe bien vérifiée, d'en « laiſſer à Paris une autre de même matière & de même forme, « à laquelle on pût avoir recours, s'il arrivoit quelque accident « à la nôtre pendant un ſi long voyage : je me chargeai d'office « du ſoin d'en faire faire une pareille. Cette ſeconde toiſe fut «

(b) Meſure des trois premiers Degrés du Méridien, *pages 75 & 76.*

» construite par le même ouvrier, & avec les mêmes précautions
» que la première. Les deux toises furent comparées ensemble
» dans une de nos Assemblées, & l'une des deux resta en dépôt
» à l'Académie. C'est la même qui a depuis été portée en Lapponie
» par M. de Maupertuis, & qui a été employée à toutes les opérations des Académiciens envoyés au Cercle polaire ».

Lorsque j'écrivois, en 1748, ce qui précède, & que je transcris littéralement de ma *mesure du Méridien*, je croyois que cette règle de fer, que j'appelle notre toise, étoit encore à Quito entre les mains de M. Godin, & j'ignorois qu'elle étoit à Paris depuis plusieurs mois. M. le Comte de Maurepas, alors Ministre, de l'Académie, avoit écrit en 1747, à M. Joseph de Jussieu, notre compagnon de voyage resté à Quito, & l'avoit chargé, *à ma requête*, de retirer de M. Godin une copie de ses observations, notre toise, & les autres instrumens de l'Académie, & de rapporter le tout en France, puisque M. Godin appelé dès 1747 à Lima, par le Vice-roi du Pérou, paroissoit s'être fixé dès-lors au service du roi d'Espagne. M. de Jussieu, que la lettre du Ministre atteignit au commencement de 1748, à cinquante lieues de Quito, dans la province de Canelos, prêt à s'embarquer pour revenir en France par la rivière des Amazones, revint sur ses pas à Quito, d'où il partit aussi-tôt pour se rendre à Lima, dans le dessein d'exécuter les ordres du Ministre *(c)*. Il trouva M. Godin qui se préparoit à revenir en Europe. Tous deux prirent la route de Buénos-aires par terre, après avoir embarqué sur le vaisseau *le Condé*, prêt à faire voile pour la France, un quart-de-cercle, & notre toise renfermée dans son étui. Ces instrumens arrivés à bon port à la fin de 1748, ou vers le commencement de 1749, à l'adresse de M. le Comte de Maurepas, furent portés, sans que j'en eusse connoissance, au cabinet des machines de l'Académie, transporté depuis quelques années au Jardin royal des Plantes. M. Bouguer l'ayant su, retira seulement le quart-de-cercle qui faisoit partie

(c) Journal du Voyage à l'Équateur, *1751, page 217.*

de

de l'envoi, c'étoit celui dont il s'étoit toujours servi pendant le cours du voyage. Trois ans & plus se passèrent, à compter de cette époque, sans que j'entendisse parler de notre toise, jusqu'à ce qu'en ayant demandé avec empressement des nouvelles à M. Godin, en 1752, à son arrivée d'Amérique; j'appris avec surprise que la toise étoit en France depuis près de quatre ans. Je me donnai tous les soins nécessaires pour en faire la recherche; enfin elle se trouva dans le garde-meuble du Jardin royal, en bon état, renfermée dans un étui de bois, solide & doublé de serge, où elle avoit toujours été conservée. Je ne voulus point la retirer, je réitérai seulement ma demande pour la vérification de la toise de M.rs Cassini, conservée à l'Observatoire, & pour sa comparaison à la nôtre. *

Raisons de préférence pour la toise de l'Équateur.

Je suppose le même soin & la même adresse dans tous ceux qui ont étalonné les différentes toises entre lesquelles il s'agit de décider aujourd'hui: quand l'étalon du Châtelet subsisteroit encore, il étoit si grossièrement fabriqué & si mal traité, qu'il ne seroit pas possible de reconnoître laquelle des prétendues copies étoit originairement la plus conforme au défectueux original. Il ne reste donc plus d'autre raison de préférence entre ces différentes toises, que celle de la priorité de date. La nôtre fut présentée à l'Académie dans une assemblée du mois d'Avril 1735, comparée & reconnue égale à celle que j'y laissois en dépôt. Elle fut dès-lors adoptée par l'Académie, & personne ne réclama contre cette adoption. M. Godin, en l'ajustant sur l'étalon du Châtelet, avoit remarqué le degré que marquoit le thermomètre de M. de Reaumur, c'étoit 13 au-dessus de la congélation, température moyenne, & la même à laquelle on a rapporté les dernières mesures pour la vérification de la base de Villejuive en 1756.

La décision de l'Académie portée depuis vingt-trois ans, ne doit être révoquée que pour de bonnes raisons. Dira-t-on

* Cette toise du Pérou est dans le cabinet de l'Académie *(avril 1776)*.

que notre toiſe, dans un ſi long voyage, a pu ſouffrir quelque choc & changer de longueur ? Je répondrois qu'indépendamment des précautions avec leſquelles elle a toujours été conſervée, la règle qui la forme a de longueur environ deux pouces de plus que les ſix pieds; qu'elle n'eſt coupée à la meſure d'une toiſe, que ſur la moitié de ſa largeur, & que les deux talons excédens d'environ un pouce à chaque extrémité, l'ont garantie de tout choc; que ſes arêtes ſont encore vives, & n'ont jamais été rouillées, comme il eſt aiſé de s'en convaincre au premier aſpect. Une autre preuve qu'elle ne s'eſt pas raccourcie, c'eſt qu'elle eſt plus longue que celle de M. de Mairan. Dira-t-on que les grandes chaleurs de la Zone torride peuvent au contraire l'avoir alongée ? Cette conjecture qui n'a pas la moindre vraiſemblance, eſt détruite par des faits conſtans. On n'ignore plus que le thermomètre ne monte pas ordinairement plus haut ſous la Ligne que dans les plus grandes chaleurs en France; je puis aſſurer que dans les dix années qu'a duré notre voyage, je n'ai pas vu le thermomètre de M. de Reaumur, en Amérique, paſſer 29 degrés au-deſſus de la congélation ; d'ailleurs j'ai la preuve directe, qu'une règle de fer expoſée à une chaleur conſidérable, reprend ſa longueur ordinaire, dans les expériences que j'ai faites ſur l'expanſion du fer par la chaleur, & que j'ai rapportées dans ma meſure du Méridien, *page 78.* En faiſant ces expériences à Paris en 1749, j'avois expoſé la toiſe du Nord, & non celle de l'Équateur, que je ne ſavois pas être revenue en France, au degré de chaleur indiqué par le thermomètre de M. de Reaumur, par 55 degrés au-deſſus de la congélation; chaleur plus conſidérable que toutes celles auxquelles la toiſe de l'Équateur a été expoſée; cette toiſe du Nord a repris ſa longueur ordinaire : elle eſt même tant ſoit peu plus courte aujourd'hui que la nôtre, à laquelle elle étoit égale, différence dont nous examinerons la cauſe.

Enfin notre toiſe entre aujourd'hui ſans effort dans ſon étalon, qui n'eſt pas ſorti de Paris, & le remplit exactement. Il n'y a donc aucun prétexte pour ſuppoſer qu'elle a changé de longueur.

Cette même toiſe a ſervi pour la meſure actuelle des quatre baſes ſondamentales de nos triangles, aux deux extrémités de notre arc *(voyez le Journal du voyage à l'Équateur)*. Nous avons, M.rs Godin, Bouguer & moi, déterminé ſur ces meſures la longueur d'un arc de plus de trois degrés du Méridien, & celle du pendule à Quito, par un très-grand nombre d'expériences, dont le réſultat s'accorde preſque dans le centième de ligne; toutes ces meſures ont été conſignées dans pluſieurs Ouvrages depuis dix ans, tant par les mathématiciens Eſpagnols nos compagnons de voyage, que par M. Bouguer & moi : elles ont été gravées ſur le marbre & ſur la pierre *(d)* en divers monumens, & ſi quelques-uns ne ſubſiſtent plus, les livres imprimés & les Journaux en ont conſervé la mémoire.

Si la toiſe égale à la nôtre, ajuſtée dans le même étalon & par le même artiſte, fût reſtée en dépôt à l'Académie, où je l'avois laiſſée dans cette intention, elle eût ſans doute ſervi de modèle à toutes les toiſes dont on a depuis fait uſage pour la meſure des Degrés en France & en Afrique; mais M. de Maupertuis, en partant pour le Cercle polaire, un an après notre départ de Paris, m'écrivit qu'il ne balançoit pas à ſe ſervir de notre toiſe, pour que nous euſſions une meſure commune; il ne tint que trop ſa parole; n'ayant pas eu le temps de faire faire une nouvelle toiſe égale à la toiſe dépoſée, il emporta celle-ci à Torneå, de l'aveu de l'Académie; nouvelle preuve que notre toiſe étoit regardée par l'Académie, comme celle à laquelle devoient être rapportées toutes les meſures poſtérieures.

Toiſe du Nord.

Ainſi, la toiſe même dépoſée à l'Académie, & deſtinée à retrouver la juſte longueur de la nôtre, ſi dans le tranſport il lui fût ſurvenu quelques accidens, eſt celle dont les Académiciens du Nord ont fait uſage dans toutes leurs opérations; nous ſommes par-là d'autant plus aſſurés, que la longueur des

(d) Inſcriptions laiſſées à Quito, à Tarqui & à Cotcheſqui, &c.

Degrés meſurés ſous l'Équateur & ſous le Cercle polaire, eſt déterminée par une meſure commune.

Il eſt vrai que depuis que les deux toiſes ſont revenues en France, on a cru trouver entr'elles, par une nouvelle comparaiſon, une légère différence, qu'on a jugée d'un vingtième ou d'un trentième de ligne (dont la toiſe du Nord eſt plus courte), en attendant une détermination plus préciſe *(e)*. Mais il eſt plus que probable que cette différence n'eſt ſurvenue que depuis la meſure du Degré qui coupe le Cercle polaire, & qu'elle provient du raccourciſſement de la toiſe portée au Nord: & voici comment je le prouve. On ſait que le vaiſſeau ſur lequel elle fut embarquée, au retour, fit naufrage dans le golfe de Bothnie, la toiſe fut mouillée de l'eau de la mer; c'eſt ſur-tout aux extrémités & aux arêtes d'un fer limé que la rouille s'attache. Cette rouille n'a pu être enlevée ſans que la toiſe perdît un peu de ſa longueur; elle doit donc néceſſairement être un peu plus courte aujourd'hui qu'elle n'étoit en 1735, lorſqu'elle fut comparée à la nôtre. Elle l'eſt en effet, & c'eſt une nouvelle preuve de leur égalité primitive; mais le changement ſurvenu à la toiſe du Nord, eſt poſtérieur à toutes les opérations faites en Lapponie; la baſe de 7000 toiſes qui leur a ſervi de fondement, a donc été meſurée avec une toiſe égale à la nôtre; la longueur du Degré du Nord, & celle de nos trois Degrés voiſins de l'Équateur, ont donc été déterminées par une meſure commune. Les expériences ſur la gravité faites par les Académiciens du Nord; leurs meſures du pendule à ſecondes, & toutes les nôtres ont donc été rapportées à la longueur de notre toiſe, à laquelle la leur étoit alors égale. Tous ces réſultats ſont publiés depuis vingt ans dans les livres ſur la Figure de la Terre, de M. de Maupertuis & de M. Clairaut, dans la relation de M. l'abbé Outhier, dans la meſure du Degré entre Paris & Amiens, dans les

---

(e) Voyez le rapport des quatre Commiſſaires, inſéré dans les Mémoires de l'Académie de l'*année 1754, p. 178;* & le Journal des opérations de M. le Monnier, imprimé au Louvre en 1757, *page 8, ligne 11.*

Ouvrages des Mathématiciens de l'Europe qui ont traité de cette matière, & dans les Journaux Littéraires de toutes les Nations.

Toise de l'Observatoire ou des Degrés de France.

Les Degrés du Méridien, mesurés en France, surpassent en nombre la somme des Degrés mesurés ailleurs. La toise avec laquelle ils ont été mesurés en France, a donc eu plus de part que toutes les autres à la mesure de la Terre, & mérite par conséquent la plus grande attention.

En 1739 & 1740, M. Cassini de Thury & M. l'Abbé de la Caille vérifièrent de nouveau la Méridienne qui traverse la France, & qui comprend 8 degrés & demi depuis Dunkerque jusqu'à Collioure, en passant par l'Observatoire royal. Ils partirent sans mesurer de base, & calculèrent d'abord tous leurs triangles d'après l'ancienne base de Villejuive à Juvisi, mesurée par M. Picard. Arrivés à Bourges, ils mesurèrent sur le terrein une nouvelle base pour vérifier leurs opérations. Ils la trouvèrent, par leur mesure actuelle, notablement plus courte que par le calcul fondé sur la longueur qu'ils attribuoient, d'après M. Picard, à la base de Villejuive. Alors, pour la première fois, ils commencèrent à soupçonner cette base d'erreur. Ce soupçon communiqué par eux à feu M. Cassini, ne fit aucune impression sur lui; prévenu comme tout le monde en faveur de l'exactitude de M. Picard, & personnellement intéressé à croire exactement mesurée une base qu'il avoit prise pour fondement de toutes les mesures de l'ancienne Méridienne, il rejeta d'abord toute l'erreur sur les opérations de M. son fils & de M. l'Abbé de la Caille. Il les exhorta l'un & l'autre à revoir leurs calculs, & à répéter la mesure de leurs angles, & celle de leur base de Bourges. Tout cela fut fait: ils trouvèrent le même résultat. M. Cassini se vit alors obligé de vérifier à son tour la base de Villejuive. Il ne s'y détermina qu'à la dernière extrémité: ce ne fut même qu'après l'avoir mesurée trois fois, & l'avoir toujours trouvée plus courte que M. Picard d'environ une toise par mille, qu'il prit enfin sur lui d'en parler à l'Académie, & de demander

des Commiſſaires pour en conſtater contradictoirement la meſure. Encore la répéta-t-il une quatrième fois en particulier, avant la cinquième meſure dont les Commiſſaires nommés par l'Académie furent témoins.

On ſait ce qui s'eſt paſſé depuis, & les dernières vérifications faites en 1756. S'il reſte encore quelque doute à cet égard, ce ne peut être que ſur le plus ou le moins; mais on s'accorde à conclure que M. Picard a compté trop de toiſes dans ſa baſe. Les quatre Commiſſaires trouvent, comme M.rs de Thury & de la Caille, que c'eſt preſque une toiſe ſur 1000 ou 56 toiſes ſur le Degré, que M. Picard a compté de trop. Ils trouvent cependant la différence moins grande que M. de Thury, d'un dixième de toiſe ſur la baſe; ſavoir, 5748 toiſes 7 pouces & demi, au lieu de 5748 toiſes tout juſte *(f)*, ce qui fait une toiſe de moins ſur le degré. M. le Monnier trouve que l'erreur de M. Picard n'eſt que de $\frac{3}{4}$ de toiſe par mille & un peu moins, ce qui ne feroit que 42 toiſes ſur le Degré pour l'erreur dans la meſure géodéſique de M. Picard, au lieu de 56 qu'ont trouvé les quatre Commiſſaires.

Les trois règles de fer de 20 pieds dont M. Caſſini s'étoit ſervi pour vérifier la baſe de Villejuive en 1740, avoient été réglées avec deux toiſes de fer conſervées à l'Obſervatoire, dont l'une à quatre faces égales, avoit appartenu à feu M. de la Hire; la meſure de la même baſe par les quatre Commiſſaires, dont le rapport eſt imprimé *(g)*, fut faite avec la toiſe du Nord, en 1756. Cette meſure s'accorde à un demi-pied près avec la meſure moyenne de M. Caſſini, qui l'avoit répétée cinq fois en 1740, & celle-ci ſert de fondement à toutes les diſtances conclues dans le Livre de la Méridienne de Paris, vérifiée. Cette comparaiſon tient lieu de la vérification ordonnée par la délibération de l'Académie, dont j'ai parlé plus haut, & de laquelle j'ai ſollicité pluſieurs fois l'exécution, pour connoître le rapport de la toiſe de l'Obſer-

---

(f) Voyez Mérid. vérif. *page 36*, & le rapport des Commiſſaires, *page 21*.
(g) Voyez le rapport des Commiſſaires, imprimé *in-8.°* réimprimé dans les Mémoires de l'Académie, *année 1754*, *page 172*.

vatoire, ou de M. Caſſini, à la nôtre; puiſque par la nouvelle meſure de 1756, exécutée avec la toiſe du Nord, on a trouvé le même nombre de toiſes & de pieds à la baſe de Villejuive, qu'avoient trouvé feu M. Caſſini & M. de la Caille en 1740, avec leur toiſe; il s'enſuit que la toiſe de l'Obſervatoire, avec laquelle les Degrés de France ont été meſurés, ne diffère pas ſenſiblement de la toiſe du Nord, & celle-ci, malgré ſon raccourciſſement, ne diffère aujourd'hui de la nôtre que d'un 25.e de ligne (la différence peut être vérifiée encore plus exactement, ainſi que celle de l'une & l'autre de ces deux toiſes à celle qui a ſervi à la meſure des Degrés de France), qui ne produiroit que deux toiſes & demie de différence ſur la longueur du Degré, quand on négligeroit d'en tenir compte. La toiſe employée aux meſures des Degrés de France, peut donc être priſe pour la nôtre.

J'avoue qu'en commençant ce Mémoire, je ne ſongeois qu'à prouver que la toiſe de l'Équateur, adoptée dès le mois d'Avril 1735, par l'Académie, & celle du Nord qui lui étoit parfaitement égale, lorſqu'elle a ſervi à meſurer le Degré ſous le Cercle polaire, étoient les originaux auxquels toutes les autres toiſes employées poſtérieurement, devoient être rapportées, d'autant plus que feu M. Caſſini, préſent lorſque nous préſentames notre toiſe à l'Académie en partant pour l'Équateur, & que nous en laiſſames un modèle, ne parla point de la ſienne, que nous aurions priſe volontiers, n'ayant alors aucune raiſon pour préférer la nôtre. Ce n'eſt qu'en examinant la choſe en détail, que j'ai reconnu, comme je viens de le prouver, que la toiſe de l'Obſervatoire, avec laquelle les Degrés de France ont été meſurés, & de laquelle je deſirois & craignois la comparaiſon avec la nôtre, en différoit ſi peu qu'il n'étoit guère permis d'eſpérer un pareil accord de deux meſures qui n'ont pas été conſtruites ſur un même étalon; en ſorte que la réduction du Degré de France, pour les rapporter à notre toiſe, peut être négligée.

Toiſe du Cap de Bonne-eſpérance.

M. l'Abbé de la Caille nous apprend, dans les Mémoires

de l'Académie, pour l'*année 1751*, que la toiſe qu'il avoit portée au cap de Bonne-eſpérance, & dont il s'eſt ſervi pour la meſure de ſes deux Degrés en 1752, *étoit vérifiée ſur l'étalon du ſieur Langlois, qui a ſervi à fixer la longueur préciſe des autres toiſes portées au Pérou & en Lapponie (h).* Cette toiſe, apportée par M. de la Caille à l'Académie, en 1756, pour la comparer aux autres lors de la dernière vérification de la baſe de Villejuive, ne s'eſt plus retrouvée; mais ayant été conſtruite par le ſieur Langlois, alors fort exercé dans ce genre de travail, & ſur le même étalon que les toiſes de l'Équateur & du Nord, lequel eſt exiſtant; on ne peut que ſuppoſer cette toiſe égale à la nôtre.

Voilà donc quatre meſures des Degrés terreſtres exécutées en divers climats, par neuf Académiciens, avec la même toiſe ou des toiſes égales. Il ne faut donc plus demander laquelle des quatre eſt la véritable; le choix entre la toiſe de l'Équateur, celle du Nord, celle de l'Obſervatoire & celle du Cap, devient indifférent, puiſque leur longueur eſt la même.

Toiſe de M. de Mairan.

Il nous reſte à parler de la toiſe de M. de Mairan, très-connue de l'Académie. Elle n'a pas été employée aux meſures des Degrés de nos Académiciens; mais elle eſt célèbre par les expériences du pendule portées à la plus grande préciſion, & dont M. de Mairan a rendu compte à l'Académie le 19 Novembre 1735. On y lit *(i)*, que ſa toiſe eſt *une règle de fer toute pareille à celle qui a été emportée au Pérou, & dont on a laiſſé le modèle à l'Académie*, & qu'il l'avoit vérifiée ſur l'étalon du Châtelet; mais ſoit que cette vérification ait été faite par une température d'air fort différente de celle de 13 degrés du thermomètre de M. de Reaumur, qu'obſerva M. Godin, lorſqu'il compara la toiſe de fer que nous portames à l'Équateur, ſoit, comme il eſt plus vraiſemblable, que la différence vienne uniquement de la groſſièreté de l'étalon;

(h) Mémoires de l'Académie, *année 1751, page 433.*
(i) Mémoires de l'Académie, *année 1735, page 157.*

l'étalon, telle, comme je l'ai déjà remarqué, que le même Obſervateur, en comparant deux fois la même toiſe, trouveroit des réſultats différens; la toiſe de M. de Mairan eſt d'environ un dixième de ligne plus courte que la nôtre, par la confrontation immédiate qui en a été faite; elle a été jugée en 1756 d'un 15.e de ligne au moins plus courte que la toiſe du Nord, qui dans ſon état préſent eſt plus courte d'un 25.e de ligne que celle de l'Équateur. La toiſe de l'Équateur eſt donc plus longue que celle de M. de Mairan d'un 15.e au moins, plus $\frac{1}{25}$, ce qui fait $\frac{8}{75}$ au moins, ou plus d'un 10.e, & par conſéquent, que toutes celles qui lui ſont égales, & qui ſont conſacrées par les meſures des Degrés du Méridien en Lapponie, en France & en Afrique, comme la nôtre par les trois Degrés meſurés en Amérique.

Conclusion.

Après les faits que je viens d'expoſer, qui ſe ſont paſſés ſous nos yeux, que chacun peut ſe rappeler, & dont les preuves par écrit ſont entre les mains de tout le monde, peut-on mettre en queſtion quelle eſt la toiſe de l'Académie? La toiſe de l'Académie eſt ſans contredit celle qu'ont employée dans leurs opérations les Académiciens chargés de la meſure des Degrés terreſtres. Elle eſt déſignée ſous ce nom dans tous les ouvrages des Mathématiciens de l'Europe; & c'eſt ce même nom que Mrs Hellot & Camus lui donnoient il y a douze ans, dans leur rapport ſur la vérification de l'aune *(k)*; il eſt vrai qu'ils ſuppoſoient que la toiſe de M. de Mairan étoit égale, je l'ai ſuppoſé moi-même dans mon Mémoire ſur la *Meſure univerſelle (l)*; j'ai depuis réglé la demi-toiſe que j'ai portée en Italie, ſur la toiſe de M. de Mairan. Tant que celle-ci a paſſé pour être égale à la nôtre, elle a pu être priſe pour la toiſe de l'Académie : aujourd'hui que l'on ſait qu'elle en diffère, elles ne peuvent plus être priſes l'une pour l'autre,

(k) Mémoires de l'Académie, *année 1746, page 610.*

(l) Voyez les Mémoires de l'Académie, *année 1747, page 499.*

quand il ſera queſtion de préciſion. Il y a moins d'inconvéniens ſans doute à retrancher trois ou quatre centièmes de ligne, ſur la longueur du ſeul pendule de Paris, que M. de Mairan a rapporté à ſa toiſe particulière, qu'à changer non-ſeulement les réſultats de toutes les expériences du pendule faites à Saint-Domingue, à Portobelo, à Panama, à Manta, à Quito, à Pitchincha, au Para, à Cayenne, à Torneå & au cap de Bonne-eſpérance, mais encore toutes les longueurs des Degrés meſurés en diverſes parties de la Terre, par neuf Académiciens chargés de ce travail par ordre du Roi.

S'il y avoit des différences ſenſibles entre les toiſes dont les divers Académiciens ont fait uſage pour la meſure de leurs Degrés, au Pérou, en Lapponie, en France & au Cap, la toiſe que nous fimes approuver par l'Académie en 1735, & dont M. de Mairan reconnoît que nous laiſſames le modèle, mériteroit la préférence, comme la plus authentique; mais j'ai prouvé que des quatre toiſes employées par nos Académiciens à la meſure de la Terre, trois ſont identiquement la même que celle de l'Équateur, & que la quatrième n'en diffère que d'une quantité qui peut être négligée. On peut donc dire que nous avons trois témoins, & même quatre, qui dépoſent en faveur de la toiſe de l'Équateur; outre ſon droit que je viens d'établir, elle a vingt-trois ans de poſſeſſion: l'Académie, après l'avoir adoptée ſans que perſonne y mît oppoſition, ne peut aujourd'hui, ſans tomber en contradiction avec elle-même, en adopter une autre pour la ſienne; ſon premier jugement, s'il étoit rétracté, contre toute vraiſemblance, après un ſi long temps, pourroit faire craindre que la ſeconde déciſion ne fût pas plus irrévocable que la première.

Je ne m'oppoſe point à ce que la toiſe du Châtelet ſoit étalonnée ſur celle de M. de Mairan; mais en ce cas, il faudroit ſe ſouvenir que la toiſe du Châtelet ne ſera pas exactement celle de l'Académie; cependant la réformation de l'étalon public ne doit pas ſe faire au nom de l'Académie, à moins que l'Académie n'emploie ſa propre toiſe, celle qui a ſervi à la meſure des Degrés.

Des moyens de conserver la longueur de la toise de l'Académie.

Il ne suffit pas de constater, par une nouvelle délibération, la longueur de la toise académique ; il s'agit encore de conserver cette toise d'une manière invariable. Un étalon de fer ou d'acier ne suffit pas pour cela. Un autre moyen dont on devoit attendre plus de solidité, n'a pas été plus utilement pratiqué par feu M. Cassini. Aidé de M. l'abbé de la Caille, il avoit, en 1740, marqué sur des pierres très-unies qui sont le pavé de la grande salle de l'Observatoire, où est la méridienne, la longueur de dix toises que formoit l'assemblage des trois règles de vingt pieds, avec laquelle il vérifia depuis la base de M. Picard. Le trait qui terminoit les dix toises subsiste encore sur le carreau; mais l'autre terme de la mesure, un mur de sept pieds d'épaisseur qui paroissoit inébranlable, s'est séparé du pavé, & laisse un vide de plus d'une ligne.

Pour mettre le nouvel étalon de la toise de l'Académie à l'abri des injures des temps & des accidens, il faut qu'il soit non-seulement d'une seule pièce, mais d'une matière sur laquelle la rouille n'ait point de prise. On pourroit faire cet étalon de marbre, mais cette pierre n'est pas assez dure; elle seroit sujette à s'user par le contact des mesures présentées. Le porphyre est une matière trop rare en France ; mais nous avons des granites en Normandie, sur lesquels la lime n'a point de prise. Les anciens obélisques Égyptiens, transportés à Rome, sont de cette matière, & la plupart se sont conservés sains & entiers depuis près de quatre mille ans.

J'estime donc qu'au défaut du porphyre, le nouvel étalon devroit être creusé dans une table ou tablette de granite. Deux saillies d'équerre & dont les faces intérieures seroient parallèles & polies, comprendroient exactement la longueur de la toise de l'Académie. Les toises de fer, ou d'autres matières, qu'on demande de plusieurs endroits de l'Europe où l'on projette de mesurer les Degrés, ou celles que l'on enverroit désormais aux Académies étrangères, seroient ajustées

ſur cet étalon, ſans qu'il y eût à craindre que dans pluſieurs ſiècles, il pût recevoir quelqu'altération; on y feroit entrer exactement une règle de fer, qui ſerviroit au Châtelet de *verge conſervatrice*, pour le nouvel étalon publiquement expoſé; ſans préjudice d'un autre étalon pareil, que M. de Mairan propoſe de renfermer & de laiſſer à la garde des Magiſtrats, pour ne ſervir qu'une fois l'année.

Pour donner la facilité de prendre la longueur de la toiſe entre les pointes d'un compas, il ſeroit à propos de tracer avec le diamant ſur la tablette de granite, une ligne fine parallèle à la longueur de l'étalon, terminée par deux points, & diviſée au moins par les deux extrémités, en pouces & en lignes. On pourroit auſſi, ſur cette même ligne ou ſur une autre voiſine & parallèle, marquer la longueur du pendule.

A cette occaſion, je ne puis m'empêcher de remarquer que la circonſtance préſente, où l'Académie eſt conſultée pour réformer l'étalon de la meſure publique, ſeroit très-favorable pour propoſer l'uſage d'une meſure univerſelle ſi deſirable, & dont la moindre attention peut faire ſentir les avantages *(m)*.

M. Mouton, Chanoine de Lyon, eſt le premier, que je ſache, qui propoſa cette meſure tirée du pendule; ce fut en 1670 *(n)*. Il y a bien de l'apparence que ſi cette idée heureuſe, adoptée par M. Picard, en 1672 (dans ſa Meſure de la Terre); & par M. Huygens, en 1673 *(de Horologio oſcillatorio)*, eût été connue dès 1668, lors de la réformation de la toiſe du Châtelet, au lieu de raccourcir de 5 lignes l'ancienne toiſe, comme on le fit alors, M. Picard, qui fut conſulté ſur cette toiſe, eût au contraire propoſé de l'alonger, pour lui donner, par un changement à peine ſenſible, une longueur double du pendule à ſecondes. Il ſuffiſoit alors d'ajouter 9 lignes $\frac{1}{2}$ à l'ancienne toiſe, pour rendre la demi-toiſe égale au pendule équinoxial qui bat les ſecondes, & dont la longueur excède à peine 36 pouces 7 lignes; aujour-

---

(m) Voyez le Mémoire ſur cette matière, dans le Recueil de l'Académie, *année 1747*.

(n) *Obſervationes diam. Sol. Lun.* Lyon, publiées en *1670*.

d'hui que la toise du Châtelet est raccourcie de 5 lignes, il faudroit l'alonger d'un peu plus de 14 lignes.

Quoique ce changement de la toise puisse paroître considérable, les avantages de la mesure, que j'ai détaillés ailleurs, se feroient bientôt sentir. La réduction de toutes les mesures de France à celle que je propose avoit été agréée par le Gouvernement, sous le ministère de feu M. Orry; & si une mort prématurée n'eût enlevé M. du Fay, la demi-toise de France seroit aujourd'hui la mesure commune de toutes les Académies de l'Europe, en attendant qu'elle devînt celle de toutes les Nations.

Notes sur ce Mémoire.

La proposition d'adopter la toise du Pérou, que faisoit M. de la Condamine en 1758, dans le Mémoire qui précède, n'eut pas d'abord d'exécution, par l'opposition de M. de Mairan: mais le 16 Mai 1766, il y eut une Déclaration du Roi, rendue par les soins de M. Trudaine de Montigny, en exécution de laquelle M. Tillet, de l'Académie des Sciences, a fait faire environ quatre-vingts toises semblables à celle qui avoit servi sous l'Équateur, qu'on a envoyées, de même que l'aune de Paris & le poids de marc, au Châtelet de Paris & aux Procureurs généraux des différens Parlemens: ainsi, la toise que M. de la Condamine décrit dans ce Mémoire, se trouve multipliée actuellement & ne sauroit plus se perdre. On l'a envoyée également en Guyanne, en Corse, à Vienne en Autriche, à Turin, à Florence, & M. Maskelyne y a rapporté la mesure du Degré faite dans l'Amérique angloise, *(Philosophical Transact.* année *1768, p. 326).* L'original de toutes ces toises est déposé au cabinet de l'Académie.

Celle de M. de Mairan a été acquise par M. de la Lande, qui l'a trouvée d'environ un douzième de ligne plus petite que celle du Pérou, actuellement adoptée; mais on se propose de faire bientôt la comparaison authentique & exacte de ces deux toises avec celle du Nord, qui a servi à la vérification de 1756, & qui est entre les mains de M. le Monnier.



MÉMOIRE

Sur le changement qu'éprouve l'Os de la partie des pieds de certains Quadrupèdes, appelé le Canon.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

J'AI communiqué en 1758, à l'Académie, une Remarque ſur le changement qu'éprouvent les os d'une partie des pieds des bœufs & des moutons, que l'on nomme *le canon*, & je l'ai donnée au Public en 1759, dans un Ouvrage que je fis imprimer, & qui a pour titre : *Mémoire ſur les os, pour ſervir de Réponſe aux Objections propoſées contre le ſentiment de M. Duhamel du Monceau*, imprimé chez *Guerin* & *Delatour.* Ce fait ſingulier, dont je vais parler, que j'ai le premier obſervé, méritoit d'être ſuivi plus particulièrement. Avant de rapporter mon nouveau travail, je vais tranſcrire ce que j'ai dit dans les Mémoires que je viens de citer, ſur ce changement dans l'os du pied de certains animaux.

Dans les cochons parvenus à leur dernier terme d'accroiſſement, les pieds de ces animaux ſont terminés par quatre os longs, dont deux répondent aux deux pinces, les deux autres forment les phalanges de ce qu'on nomme l'*argot.*

Dans les bœufs, vaches, moutons, &c. lorſqu'on examine l'avant-dernière portion de la jambe de ces animaux, qui porte les pinces *(a, pl. I.re, fig. 1, 2, 3, 4 & 5)*, que l'on nomme le *canon,* avant que cette partie ſoit parvenue à ſon dernier terme d'accroiſſement, on la voit compoſée d'un ſeul os *(fig. 11)*, ſur lequel paroît extérieurement un ſillon *b b*, profond, qui n'a point échappé à M. Daubenton, dans la deſcription qu'il a donnée de cette partie du bœuf *(a)*; mais voici ce qui m'a paru digne d'être remarqué, & qui n'avoit point été vu par les Naturaliſtes & les Anatomiſtes.

(a) Hiſtoire Naturelle, *Tome IV, page 527, in-4.° édit. 1753.*

Dans les fœtus des vaches & des brebis, dès que le canon *(a, fig. 1)*, commence à prendre de la dureté, & que la charpente de l'animal se charge de la substance osseuse, on le voit composé *(fig. 2, a)* de deux os longs, cylindriques *(a, fig. 3)*, séparés l'un de l'autre *(a, fig. 4)*, & revêtus d'un périoste épais qui enveloppe comme d'une espèce de gaine ces deux os, mais que l'on a peine à distinguer dans la partie intermédiaire où ces os se touchent *(fig. 8, b)*. Ces deux os augmentent en grosseur & en longueur *(fig. 6, 7 & 8, a)*; les épiphyses deviennent adhérentes. Nous ne suivrons pas plus loin, & dans plus de détails, les progrès de cette ossification, mais nous dirons que dans ce moment les deux os dont nous venons de parler, peuvent encore se séparer; & que quelque temps après, ces deux cylindres osseux qui avoient été si distincts, se réunissent dans leur partie moyenne; que cette réunion se prolonge ensuite sur toute l'étendue des deux os, & qu'il est impossible pour lors de les séparer l'un de l'autre. Si dans ce temps on scie transversalement l'os, on voit encore distinctement dans son intérieur *(fig. 9)* les deux cylindres, & au milieu la partie intermédiaire, qui, dans ce moment, forme une double cloison. Quelques mois après, & à mesure que l'animal devient plus âgé, cette cloison perd de son épaisseur *(fig. 10)*; elle ne forme plus qu'un tissu réticulaire, qui, avec le temps, s'évanouit entièrement. La cloison se perd, 1.° dans la partie moyenne de l'os; 2.° vers les épiphyses; enfin cette partie du pied de ces animaux, après leur dernier terme d'accroissement, n'est plus composée que d'un seul os; & si l'on coupe transversalement, dans cette circonstance, le canon, on n'y voit qu'une cavité intérieure *(fig. 11)*: s'il subsiste quelque vestige de son ancienne forme, ce n'est que dans un sillon profond *b b*, sur la surface extérieure de cet os, qui a frappé les Naturalistes, sans qu'il ait pu les instruire de ce qui l'avoit produit, de manière qu'aucun n'avoit encore parlé des deux os qui formoient, dans le premier âge, cette partie des animaux à pieds fourchus.

Le squelette du corps humain est peut-être le seul que l'on

ait étudié depuis le fœtus jusqu'à l'état qui précède sa destruction. On s'est assuré de quelques changemens qu'il éprouve ; on en a découvert dans les parties molles ; on a aussi trouvé de nouvelles ossifications ou des changemens dans certains os, considérés en différens temps de la vie ; mais je crois que l'on n'a vu de comparable au fait dont nous parlons, que la destruction de quelques cloisons osseuses dans la mâchoire & dans les sinus de l'homme, qui s'effacent avec le temps. Le changement considérable que nous venons de décrire dans le canon des animaux à pieds fourchus, ne semble-t-il pas nous promettre de nouvelles connoissances, si l'on étudioit plus particulièrement l'anatomie des animaux ; & plus encore, si l'on examinoit, & si l'on comparoit le squelette d'un animal, dans différens âges, & dans les états par où il passe pendant le court temps de sa vie?

J'ai pensé que le fait singulier dont je viens de parler, méritoit d'être suivi, & je me suis proposé, 1.° d'examiner le plus de fœtus d'animaux à pieds fourchus qu'il me seroit possible, pour juger s'il falloit restreindre cette singularité, ou la regarder comme presque générale aux espèces de cette classe.

2.° de m'assurer comment se faisoit le changement dans ces os, qui originairement séparés, se réunissent après, & n'en forment plus qu'un seul. Je croyois ce changement aisé à suivre dans les pieds des quadrupèdes, & je me flattois qu'en augmentant nos connoissances, je pourrois encore les rendre utiles à l'humanité, sans m'apercevoir que mes foibles lumières en Anatomie me faisoient labourer inutilement un champ où des personnes plus consommées auroient pu faire d'abondantes récoltes.

Maintenant j'avoue que malgré des dépenses & des soins, je ne puis exposer que des faits qui ne me conduisent pas à tirer des conclusions à l'abri de tout doute.

Pour m'assurer si ce changement dans les os du canon, étoit seulement attaché à quelques espèces de quadrupèdes de la classe des pieds fourchus, ou s'il étoit général, ou presque général à la classe, je me suis procuré le plus qu'il m'a

m'a été possible de fœtus de ces animaux; & je puis assurer maintenant qu'il n'est pas particulier à ceux des vaches & des brebis, mais qu'il est commun aux fœtus de la chèvre, de la biche, du daim, du chevreuil, de sorte que ce fait semble si général aux pieds fourchus, qu'on peut plutôt citer les espèces de cette classe qui y feroient une exception, comme les porcs, les sangliers. Sur quoi il est bon d'observer que les sangliers-porcs sont les seuls dans la classe des pieds fourchus, (au moins dans nos contrées) qui ne ruminent point.

Je devois examiner cet os dans les différens états par où il passe avant d'arriver à son dernier terme d'accroissement, & comparer, avec le plus grand soin, tous ses changemens.

Voici les remarques que j'ai faites en comparant la même partie du bœuf, & l'examinant en différens temps de sa vie.

Le sentiment le plus général des Anatomistes, est que dans les os longs, le canal médullaire augmente en diamètre, tant que l'os acquiert de l'épaisseur; mais je me suis assuré que le canal médullaire dans l'os du canon, augmente seulement jusqu'au terme où la cloison commence à se dissiper.

C'est environ neuf à dix semaines après la naissance de l'animal, que les os du canon sont joints, & que la cloison commence à s'anéantir; alors le canal médullaire paroît avoir, autant que l'on en peut juger, les mêmes dimensions qu'il aura, lorsque l'animal sera entièrement formé. Je m'en suis assuré en sciant un jeune os dans son milieu à égale distance de ses épiphyses, & un pareil os qui a pris son accroissement à égale distance de ses extrémités.

Je me crois aussi fondé à dire que l'os du canon doit son augmentation en grosseur à l'addition de nouvelles couches osseuses qui recouvrent le cylindre, sans se charger intérieurement de nouvelles lames osseuses qui rétréciroient nécessairement le diamètre du canal médullaire; ce qui ne s'accorde pas avec le fait.

J'ai pensé qu'en décomposant l'os du canon dans le temps où la cloison commence à s'évanouir, & dans le moment où elle perd de son épaisseur, il me seroit possible de juger

(par la texture de la partie cartilagineuſe de cet os privé de la terre qui lui donne du ſoutien), comment cet os acquert ſon épaiſſeur par l'addition de nouvelles couches qui contournent & enveloppent le cylindre.

J'ai mis dans un acide adouci un des deux os, non encore réunis, qui dans le pied d'un jeune veau forment le canon. Les lames paroiſſoient ſe ſuivre également dans cet os, tant intérieurement que dans ſon extérieur, & les lames tant internes qu'externes contournoient tout le cylindre oſſeux.

J'ai coupé une portion d'un os d'un canon dans le temps où les deux cylindres ne faiſant qu'un; on voyoit dans ce cylindre la cloiſon qui, déjà diminuée d'épaiſſeur, commençoit à ſe perdre.

J'ai mis cet os ſe décompoſer dans un acide affoibli, pour examiner enſuite le cartilage qui en forme la charpente; les lames extérieures contournoient entièrement le cylindre oſſeux; mais intérieurement les lames n'étoient pas auſſi fortes aux endroits où portoit la cloiſon : on y voyoit des fibres qui ſe portoient dans cette cloiſon & dans toute l'épaiſſeur de cet os. Les fibres n'étoient point liées auſſi intimement; on voyoit à l'endroit où étoit la cloiſon diminuée d'épaiſſeur, une déſunion dans les fibres que je ne puis mieux comparer qu'à une étoffe dont la chaîne ou la trame ſeroient interrompues ſur quelques fils; & l'on remarquoit ce même dérangement dans les deux parties du cylindre oſſeux où portoit la cloiſon.

Si les os longs, à meſure qu'ils croiſſent, devoient leur plus grande épaiſſeur à une addition de nouvelles couches oſſeuſes qui ſe fît ſeulement extérieurement, & ſi le canal médullaire ne devoit ſes plus grandes dimenſions qu'à l'extenſion des lames oſſeuſes internes, je crois qu'il ſeroit aiſé de rendre raiſon, & d'expliquer comment la cloiſon diminue d'épaiſſeur, & comment elle ſe diſſipe entièrement. Les nouvelles lames oſſeuſes qui recouvrent les deux cylindres extérieurement & qui interrompent le paſſage de la matière terreuſe dans la cloiſon intermédiaire, celles internes qui

s'étendent & donnent au canal médullaire un eſpace plus grand, expliqueroient clairement la diminution d'épaiſſeur de cette cloiſon qui ne recevant plus de matière crétacée, & la nourriture qui lui eſt propre, après avoir diminué ainſi d'épaiſſeur, ſe diſſiperoit entièrement. Cette manière de rendre raiſon de ce fait, paroît conforme aux obſervations que je viens d'expoſer.

Voici encore une autre difficulté qui s'offre dans le changement de ces deux os en un ſeul. Dans les premiers temps de la vie du bœuf, cette partie de ſa jambe eſt compoſée de deux os remplis de moelle. Suivant les Anatomiſtes, cette moelle a dû avoir ſa gaine; mais dans la ſuite cette cloiſon s'étant perdue, & ne reſtant plus qu'un canal médullaire, il n'y a plus qu'une moelle contenue par conſéquent dans une ſeule gaine. Comment ce changement s'eſt-il fait? Eſt-ce par un déchirement de ces deux gaines médullaires? Combien de faits intéreſſans pourrions-nous apprendre, s'ils ne ſe refuſoient pas autant à nos obſervations? Je n'oſe pas prétendre expliquer ces faits; je me borne à expoſer les difficultés qui s'offrent, à qui voudroit en donner des raiſons.

J'ai ouvert un os du canon d'un veau qui avoit la cloiſon intermédiaire, & j'ai trouvé chaque canal rempli de moelle; j'ai ſuivi cette moelle dans le même os d'un bœuf, & je n'ai vu qu'une moelle contenue dans une ſeule gaine, excepté vers l'épiphyſe ſupérieure où la cloiſon ſubſiſte toujours, & où l'os conſervant les deux tuyaux, la moelle ſe bifurque pour garnir les deux eſpaces.

L'obſervation & la comparaiſon de ces os en différens temps de la vie du bœuf, l'examen de la partie molle de l'os & de ſa charpente, dénuée de la partie terreuſe qui en fait un corps ſolide, ne m'inſtruiſant pas autant que je le deſirois, je réſolus de faire des plaies à de jeunes animaux vivans, pour découvrir comment s'opéroit cette mutation & ce paſſage de deux os en un ſeul. J'ai cru devoir préférer des agneaux pris peu d'heures après leur naiſſance, en

choiſiſſant les plus vigoureux. Malgré mon exactitude à porter l'attention & les ſoins multipliés qu'exigeoient ces animaux délicats auxquels je faiſois des bleſſures, j'en ai perdu pluſieurs qui, étant morts peu de temps après les opérations, n'ont pu contribuer à mon inſtruction. Auſſi n'en parlerai-je point ici; & ſi ce travail a eu quelque ſuccès, je le dois encore à M. Dupas, Chirurgien de la ville de Pithiviers, qui m'a aidé dans ces expériences, & qui s'y eſt prêté par le ſeul motif qu'il eſpéroit augmenter nos connoiſſances en Anatomie.

Voici le raiſonnement d'après lequel j'ai commencé ces expériences; je diſois, la Nature preſque toujours conſtante & régulière dans ſa marche, a donné aux pieds des ſangliers & des cochons domeſtiques deux os dont chacun répond à l'une des deux pinces; elle en a auſſi pourvu les moutons & les bœufs, & je crois pouvoir préſumer que, ſi ces deux os ſe changent en un ſeul dans ces derniers animaux, ce changement pourroit n'être dû qu'à leur poſition, à leur preſſion & à la contraction produite par les membranes qui recouvrent ces os. Si au contraire ils ne ſe réuniſſent pas dans les porcs, ſangliers, &c. j'augurois pouvoir penſer que la graiſſe empêche leur réunion immédiate; & en laiſſant une libre circulation à la matière oſſeuſe, elle donne naiſſance à l'exception que font ces animaux, à ce qui ſe paſſe aſſez généralement dans les pieds des animaux à pieds fourchus. J'attendois que l'expérience, le meilleur guide & le plus ſûr, détruisît ou me confirmât dans l'idée que j'avois priſe.

I.re Expérience. J'ai fait choiſir dans le troupeau de mon fermier, un agneau de deux jours de naiſſance, & qui paroiſſoit bien conſtitué; je préférai pour mon expérience un des pieds de derrière, parce que le canon eſt plus long que celui des jambes de devant; l'autre jambe de derrière devoit me ſervir d'objet de comparaiſon.

M. Dupas leva avec la plus grande attention la peau, les tégumens, en gênant le moins qu'il étoit poſſible les nerfs & les ligamens tendineux du pied; mon deſſein étoit de paſſer une lame mince de plomb entre les deux os du canon qui

devoient être encore tendres & non liés, je croyois qu'il étoit poſſible de les ſéparer avec le ſecours d'un ſcalpel, & d'obliger les os de ſe déſunir aſſez dans leur partie moyenne pour permettre qu'on introduiſît cette lame entre les deux cylindres oſſeux. Je deſirois voir ſi ce corps étranger, placé entre les deux cylindres, nuiroit au changement qui devoit s'opérer dans cette partie: deux mois après, j'ai fait tuer l'animal, & voici l'état où j'ai trouvé le canon de ſon pied.

J'ai diſſéqué premièrement le pied de derrière ſur lequel on n'avoit point opéré, pour juger avec plus de certitude de l'état naturel de cet os, & par conſéquent des changemens que l'opération avoit produit ſur l'autre.

Les deux os qui originairement formoient le canon, étoient réunis & extérieurement paroiſſoient ne plus former qu'un ſeul os; mais en le ſciant ſuivant ſa longueur, on pouvoit s'aſſurer que la cloiſon ſubſiſtoit dans toute l'étendue de l'os; elle étoit ſeulement diminuée d'épaiſſeur. J'avois ſéparé cet os longitudinalement, de façon que toute la cloiſon ſe trouvoit ſur une des diviſions, tandis que l'autre partie étoit creuſe & ſans cloiſon.

J'ai examiné enſuite le pied que l'on avoit opéré *(Pl. II, fig. 1.ere & 2e, a)*; l'expérience n'avoit pas réuſſi, comme je l'avois deſiré. On avoit fait ſeulement une ouverture à l'un des deux cylindres, mais qui ne l'avoit pas ſéparé de part en part, & l'ouverture *(a)* ſe trouvoit un peu en dehors de la cloiſon. L'os étoit creuſé, enfoncé dans cette partie, & la lame que l'on y avoit introduite, au lieu de ſe trouver placée, comme je l'aurois deſiré, entre les deux cylindres, avoit fait ſeulement l'office d'une pointe ou d'un clou.

J'ai ſéparé ce canon longitudinalement; les os étoient réunis dans toute leur longueur, ainſi que je les avois trouvés à l'autre pied du même animal; la cloiſon étoit auſſi épaiſſe, mais le cylindre oſſeux, à l'endroit qui avoit été piqué, étoit beaucoup plus épais; la cloiſon l'étoit auſſi davantage à cet endroit, & il s'étoit formé une oſſification nouvelle qui bouchoit preſqu'entièrement le canal d'un des

deux cylindres à l'endroit où on l'avoit blessé, que l'on reconnoissoit, comme je l'ai déjà dit, à la surface extérieure de l'os par un enfoncement *(fig. 2, a).* Cette ossification nouvelle dans un des deux cylindres s'étoit jointe à la cloison intermédiaire, & ne me donnoit aucune nouvelle connoissance; j'y voyois ce qui arrive aux os, ou piqués ou fracturés; mais rien ne m'y apprenoit ce que seroit devenu la cloison dont je voulois connoître la destruction; je résolus donc de répéter cette expérience, en faisant plus d'attention à l'endroit où l'on poseroit la lame, & en l'introduisant dans une plus grande ouverture; c'est-à-dire, en faisant son possible pour séparer dans une plus grande étendue les deux os l'un de l'autre, & plaçant entre les deux une lame de plomb plus forte & plus large que n'étoit la première; mon dessein étoit encore dans cette seconde expérience de laisser vivre plus de temps l'animal, avant de m'assurer des changemens qu'auroit pu occasionner la lame.

II.e Expérience. L'animal a été opéré deux jours après sa naissance: on fit alors une plus large ouverture, & son possible pour placer la lame dans la partie moyenne de l'os, & à l'endroit où l'on jugeoit que devoit être la cloison intermédiaire, on y introduisit cette lame; trois mois après, je fis tuer l'animal, & voici l'état où je trouvai le canon de la jambe opérée *(fig. 3),* la comparant à celle du même animal à laquelle je n'avois pas touché.

La jambe saine avoit perdu presqu'entièrement la cloison; au moins cette cloison ne subsistoit plus dans la partie moyenne de l'os; le canal médullaire de celle dans laquelle j'avois introduit la lame de plomb, s'étoit presqu'entièrement bouché par une nouvelle substance osseuse: le corps étranger introduit dans l'os, les efforts que l'on avoit fait pour former une ouverture, & y interposer la lame, avoient produit un dérangement *(fig. 4)* dans la substance même du corps de l'os. La cloison, si elle subsistoit, étoit au milieu d'une matière osseuse parmi laquelle il étoit impossible de la reconnoître. Ces tentatives infructueuses & qui m'avoient fait

perdre plusieurs agneaux peu de jours après l'opération, me firent recourir à un autre moyen pour m'apprendre ce que devenoit la cloison.

Je regardai la lame placée entre les deux jeunes os du canon d'un agneau peu propre à m'instruire de ce que devenoit la cloison, & de ce qui pouvoit la forcer de s'anéantir.

Je disois, si le changement des deux os en un seul n'est dû qu'à la liaison étroite, qu'à la pression des deux cylindres osseux par les membranes qui les environnent, en coupant dans le jeune âge une portion de l'un des deux cylindres, & enlevant cette portion, la pression d'un os contre son voisin n'existant plus dans l'endroit coupé, la cloison subsistera dans cet endroit, même dans l'animal parvenu à l'âge le plus avancé, tandis qu'elle s'évanouira dans les parties de ces deux os que je laisserai subsister.

Je destinai donc encore un agneau à mon instruction. Nous sacrifions tant d'animaux à notre sensualité, je croyois les faire servir plus utilement encore à l'humanité. C'étoit ce seul motif qui pouvoit me faire surmonter la répugnance que j'avois à faire souffrir ces animaux.

M. Dupas fit cette opération sur un jeune agneau de vingt-quatre ou trente heures de naissance; il enleva une partie d'un des os du canon de cet animal, de la longueur environ de huit à dix lignes entre deux traits de scie; il voulut bien panser la plaie de cet animal, & le conduire jusqu'à son entière guérison, ce qui exigea de grands soins; je les multiplois à mesure que le terme où il devoit servir à mon instruction approchoit : enfin au bout de six mois, je fis tuer l'animal; voici l'état où je trouvai cette partie du pied malade, toujours la comparant au pied de derrière auquel on n'avoit pas touché. III.e Expérience.

Le canon du pied sain avoit perdu presqu'entièrement sa cloison intermédiaire; elle ne subsistoit plus que d'environ cinq lignes vers l'épiphyse supérieure, & de six lignes vers la jointure inférieure. Ces portions restantes de la cloison

étoient très-minces; les bords de la portion ſupérieure étoient réticulaires (*fig. 6*).

L'os du canon de l'autre jambe s'étoit régénéré dans la partie où une portion avoit été enlevée, la lame oſſeuſe étoit plus épaiſſe dans la partie du nouvel os (*fig. 5, a, b*), & la cloiſon vers l'épiphyſe à l'articulation ſupérieure de cet os, étoit à peu-près de la même longueur que nous l'avons trouvée ſur l'os de la première jambe; mais au-deſſous de la plaie (*b, fig. 7*), la partie de la cloiſon qui reſtoit étoit beaucoup plus longue, plus épaiſſe que l'os de l'autre jambe. Vers le bas de la plaie, il ſubſiſtoit encore des filets oſſeux longs, & qui ne tenoient que foiblement à la portion de l'os qui avoit été endommagée; de ſorte que l'on voyoit aiſément que la plaie faite à l'os avoit nuit eſſentiellement, principalement au-deſſous de la portion qui avoit été emportée, à la deſtruction de la cloiſon, qui peut-être encore a eu lieu d'une façon plus complète ſeulement depuis la régénération de la nouvelle portion du canon.

J'ai dit que mes expériences ne me mettoient pas encore en état de prononcer ſur la façon dont s'évanouiſſoit cette cloiſon intermédiaire; mais en m'appuyant des obſervations des Anatomiſtes ſur la régénération des os, en conſultant ce qu'ont écrit M.rs du Hamel & de Haller, ſur leur formation, M. Hériſſant, ſur leurs parties conſtituantes; & en réſumant ce que j'ai obſervé ſur ce même os plus ou moins jeune, comparé avec un os qui a acquis ſon terme d'accroiſſement, je vois évidemment une circulation de la partie terreuſe dans la ſubſtance cartilagineuſe qui forme la charpente de l'os. Dans le cas des deux os que j'obſerve ici, la Nature n'eſt point ſortie de la route frayée, elle a mis deux os à l'animal, à qui elle avoit donné deux pinces ou deux doigts; mais ces deux os, par leur poſition, n'étoient point deſtinés à conſerver leur forme. Dans les parties où les os doivent conſerver leurs liaiſons & leur mouvement avec les os voiſins, la ſinovie ſert à leur entretien; ici au contraire, il arrive que, lorſque ce qui eſt néceſſaire à l'entretien de ce mouvement

mouvement vient à manquer dans deux os qui ſont voiſins, & qui ſont deſtinés à être ſéparés, il ſe forme une liaiſon contraire à l'état ordinaire; & peut-être par la ſuite ces os malades ſe réuniroient-ils au point, comme ici, de ne faire qu'un ſeul os.

J'imagine que la preſſion que doit éprouver cette cloiſon intermédiaire par les nouvelles couches oſſeuſes qui ſe forment & qui donnent une plus grande épaiſſeur à ces deux os en les enveloppant, empêche la matière terreuſe de circuler dans cette partie de ces os. La lame que j'ai introduite dans la ſeconde expérience entre les deux canons, a arrêté la circulation de cette ſubſtance terreuſe, & il s'eſt formé un amas de ſuc terreux le long de la lame. Dans la troiſième expérience, la plaie que j'ai faite à une partie du canon ayant oblitéré les paſſages de cette ſubſtance crétacée, la cloiſon a ſubſiſté plus long-temps au-deſſous de la plaie.

Ces expériences me paroiſſent encore indiquer le chemin que parcourt la matière terreuſe qui donne de la ſolidité aux os, & comment ils perdent leur conſiſtance, lorſque cette terre les abandonne. Quand on donne ouverture aux tuyaux qui lui ſervent de paſſage, elle s'extravaſe en forme de concrétions organiſées ſi elle ſe dépoſe dans des lames de perioſte déjà tuméfiées, & elle ne laiſſe qu'un amas terreux ſans organiſation lorſqu'elle n'eſt point diſtribuée dans des membranes du périoſte.

Dans le cas des deux os que nous examinons, où de nouvelles couches oſſeuſes contournent & enveloppent les premières déjà formées, alors la matière terreuſe ne rentre plus dans la cloiſon intermédiaire, & elle ſe détruira avec le temps.

Que les Anatomiſtes conſultent les Mémoires dans leſquels M. du Hamel traite de la formation & de la régénération des os, il leur ſera aiſé de faire l'application de ce qu'il a dit à ce qui ſe paſſe ici. L'on expliquera pour lors facilement comment ſe fait la réunion des deux os du canon dans les animaux à pieds fourchus, & le changement de ces deux os en un ſeul.

tandis que ce même fait contribuera encore à confirmer le ſentiment de cet Académicien, qu'il a développé dans les différens Mémoires que je viens de citer.

La matière colorante de la garance, qui a été ſi utile à M. du Hamel, pour ſuivre le progrès de l'oſſification, ne pouvoit m'être d'aucun ſecours. Il s'agit ici non d'une formation nouvelle, mais d'une deſtruction. D'ailleurs, comment s'en ſervir pour des agneaux qu'il faudroit ſoumettre à cette nourriture dans leur premier âge? Je me renferme donc dans les bornes que je me ſuis preſcrites; j'annonce ce que j'ai fait; j'ajoute même que je n'ai pas réuſſi comme je l'eſpérois, en n'épargnant ni les ſoins ni la dépenſe; je deſire que des perſonnes éclairées en Anatomie ſoient aſſez frappées de l'utilité que l'on pourroit retirer du principe de ce fait ſingulier, pour tenter encore de nouvelles expériences.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

FIGURE 1.re La jambe entière d'un fœtus de mouton. *(a)* la partie du pied que l'on nomme le canon.

Fig. 2. Ce pied dont la peau eſt ôtée pour faire voir le canon *(a)* dans la place qu'il occupe.

Fig. 3. Ce canon *(a)* ſéparé.

Fig. 4. Les deux os qui compoſent ce canon *(a)*.

Fig. 5. Le pied d'un jeune veau.

Fig. 6. Le canon de ce fœtus.

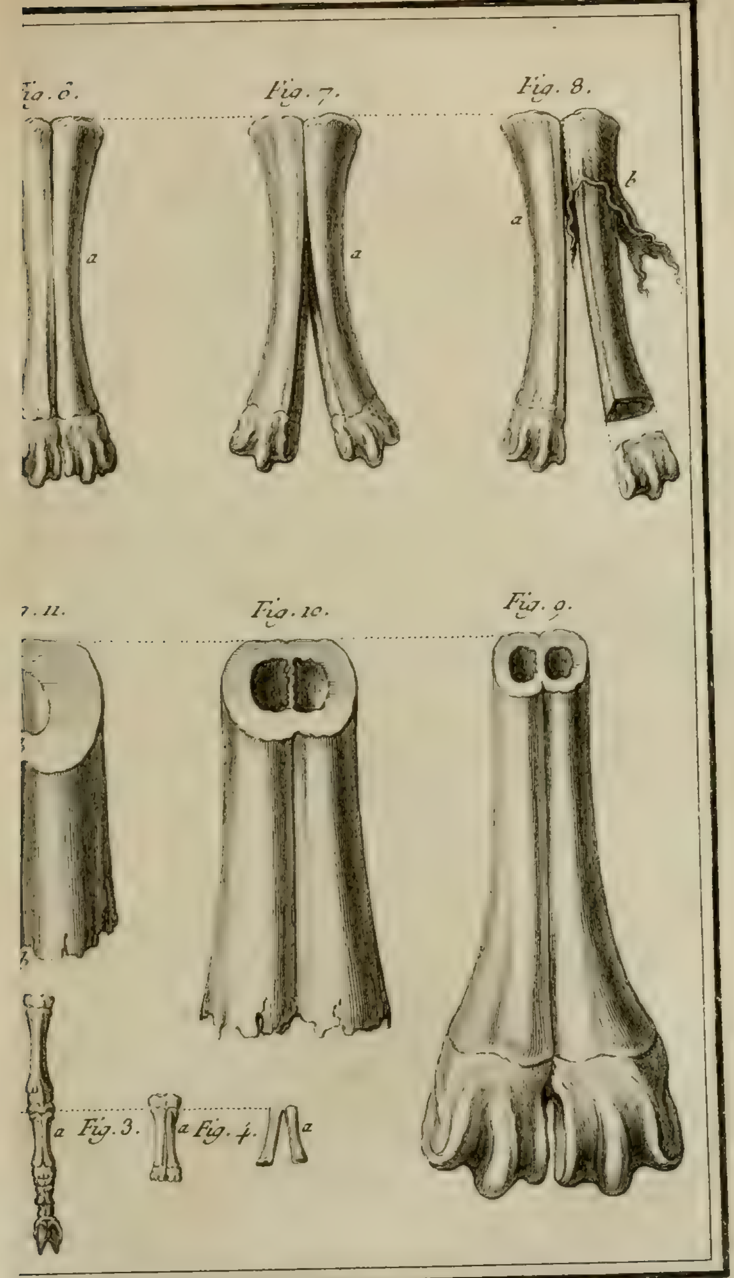
Fig. 7. Les deux os ſéparés qui le compoſent.

Fig. 8. Ces deux os avec le périoſte qui les recouvre.

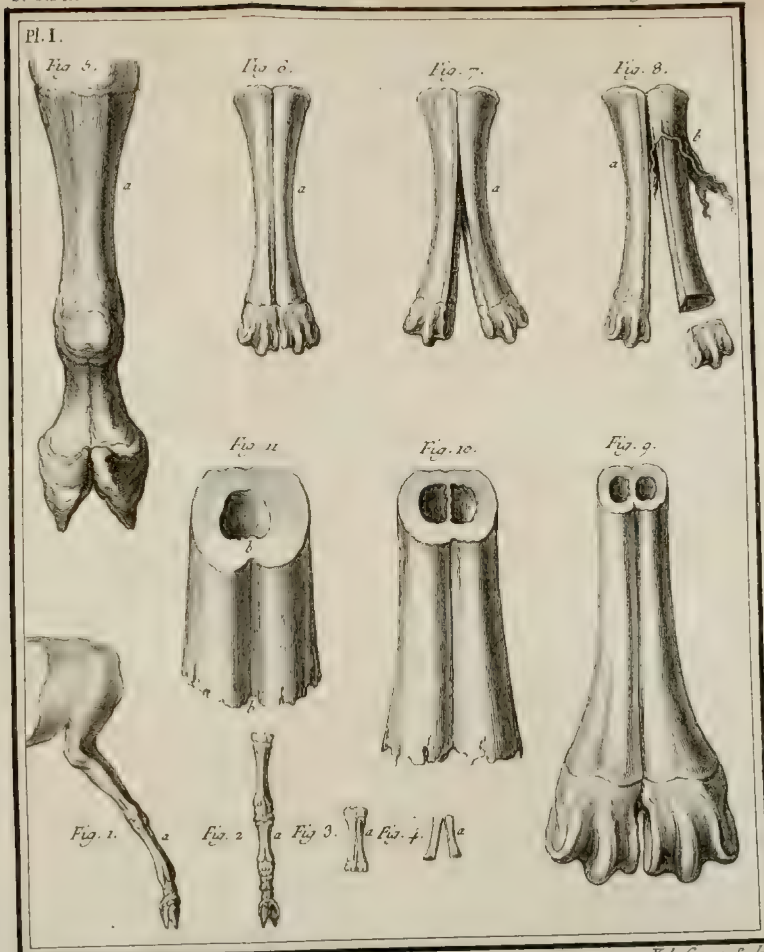
Fig. 9. Ces deux os qui dans un âge plus avancé ſe réuniſſent, & ne forment plus qu'un ſeul os diviſé cependant par une cloiſon.

Fig. 10. L'os du canon dans un âge encore plus avancé. La cloiſon diminue d'épaiſſeur.

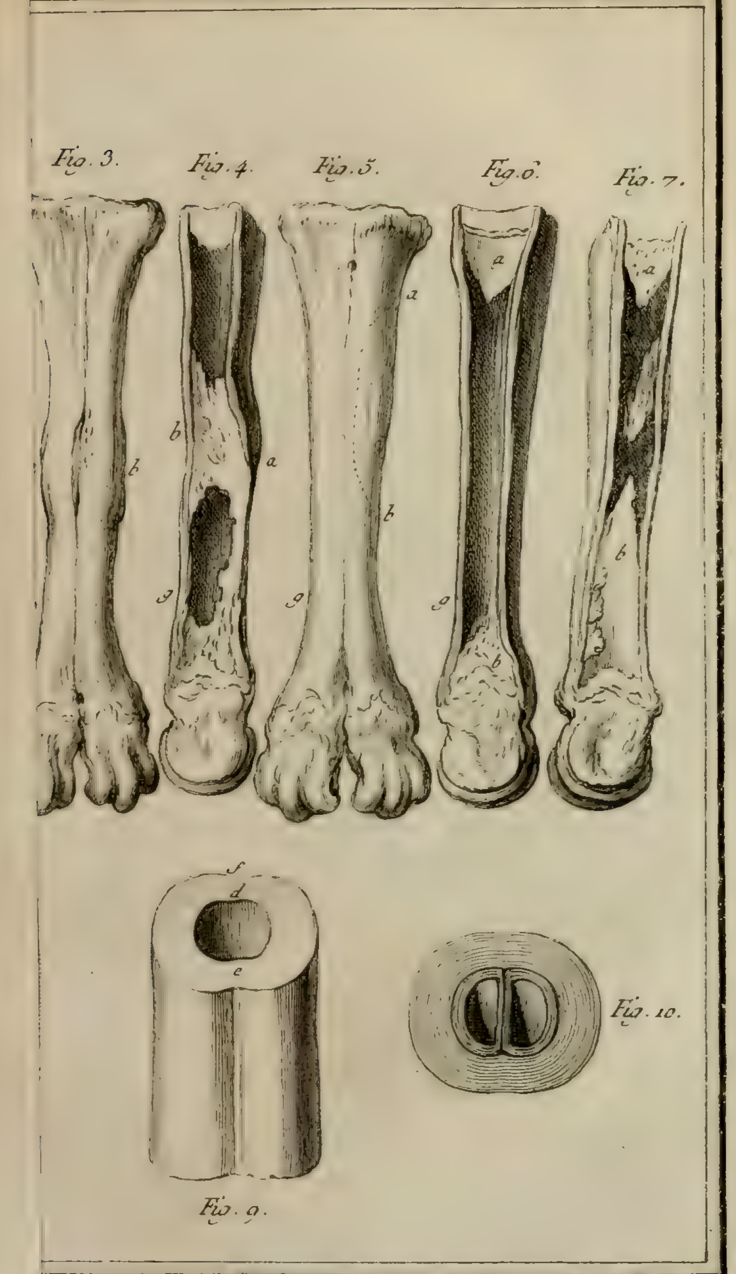
Fig. 11. Cet os parvenu à ſon dernier terme d'accroiſſement. On ne voit plus de cloiſon, mais ſeulement à l'extérieur un ſillon profond *(b b)*.



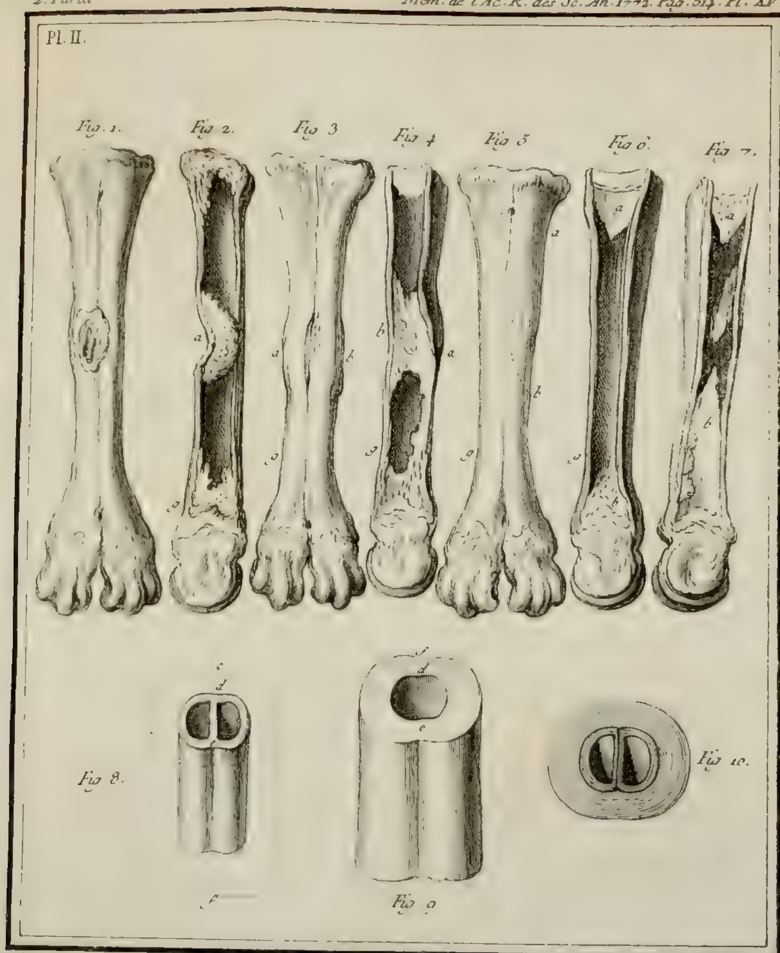
Y. le Gouaz Sculp.



Ingram del. Y. le Gouaz Sculp.



E. le Gouaz Sculp.



Fossier del.   E. le Gouaz Sculp.

PLANCHE II.

Fig. 1. L'os du canon d'un agneau dans lequel on vouloit introduire une lame de métal.

Fig. 2. Cet os ouvert ſuivant ſa longueur *(a)*. La matière oſſeuſe nouvellement formée.

Fig. 3. L'os du canon d'un agneau dans lequel on a introduit une lame de plomb entre les deux os *(a, b)* qui compoſoient dans le jeune âge le canon de l'animal.

Fig. 4. Cet os ouvert ſuivant ſa longueur. L'os *(a, b)* a changé de forme. Il s'eſt fait une nouvelle oſſification en *a* & *b*.

Fig. 5. Le canon d'un agneau dont un des deux os a été coupé en ſifflet depuis *a*, juſqu'en *b*.

Fig. 6. L'os de la jambe de cet animal qui n'a point été opérée, & que l'on a coupé ſuivant ſa longueur, pour le pouvoir comparer à l'os de la jambe qui a ſouffert l'opération. *a*, *b*, les reſtes de la cloiſon.

Fig. 7. Le canon de la jambe opérée. *a*, la cloiſon preſque détruite. *b*, la cloiſon beaucoup plus longue & plus apparente qu'elle ne l'eſt en *b* dans la *figure 6*.

Fig. 8. Un os de veau de neuf à dix ſemaines. Le canal médullaire *de*, auſſi grand qu'il le ſera dans un âge plus avancé *(fig. 9)*, mais il devient plus épais avec l'âge, ce qui eſt exprimé par les traits ponctués *cf*. Lorſqu'on a décompoſé l'os par un acide, cette cloiſon ſe détruit, & il reſte en *de* deux eſpèces de rainures.

Fig. 9. Un os parvenu à ſon dernier terme d'accroiſſement. *de*, le canal médullaire; *df*, l'épaiſſeur de l'os. Après avoir laiſſé quelque temps cet os dans un acide, on le voit compoſé de couches ou de lames qui ſe couvrent les unes les autres.

Fig. 10. La coupe d'un os pour montrer la différence que l'on croit avoir remarquée entre l'arrangement des lames d'un jeune os, & de celles d'un os parvenu à ſon dernier terme d'accroiſſement.



MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION*.

Par M. VANDERMONDE.

LE terme de toutes les Recherches générales sur l'Élimination des inconnues dans les équations algébriques, ou sur l'art de ramener les équations qui renferment plusieurs inconnues, à des équations qui n'en renferment qu'une, seroit d'obtenir une formule d'élimination générale & unique, sous la forme la plus concise & la plus commode, & où le nombre d'équations & leurs degrés fussent désignés par des lettres indéterminées. Nous sommes sans doute très-éloignés de ce terme, mais on peut entrevoir quelque possibilité de l'atteindre. C'est ce que je me propose de faire sentir dans ce Mémoire. Je donnerai pour un nombre n d'équations du premier degré, une formule d'élimination qui est une espèce de fonction de n, & dont la forme est très-concise & très-commode; & je ferai voir que les formules connues d'élimination entre deux équations de degrés élevés, paroissent propres à recevoir une forme systématique, & à devenir une espèce de fonction de leur degré commun. J'ai été bientôt arrêté dans cette recherche, & il sera facile d'en sentir la raison. Parmi les ressources qui nous manquent pour faire des progrès en ce genre, la plus indispensable seroit, sans doute, de réunir un nombre suffisant de coopérateurs.

* Ce Mémoire a été lû pour la première fois à l'Académie le 12 Janvier 1771. Il contenoit différentes choses que j'ai supprimées ici, parce qu'elles ont été publiées depuis par d'autres Géomètres.

ARTICLE I.er

Des Équations du premier degré.

Je suppose que l'on représente par $\overset{1}{1}$, $\overset{2}{1}$, $\overset{3}{1}$, &c. $\overset{1}{2}$, $\overset{2}{2}$, $\overset{3}{2}$, &c. $\overset{1}{3}$, $\overset{2}{3}$, $\overset{3}{3}$, &c. &c. autant de différentes quantités générales, dont l'une quelconque soit $\overset{\alpha}{a}$, une autre quelconque soit $\overset{\beta}{b}$, &c. & que le produit des deux soit désigné à l'ordinaire par $\overset{\alpha}{a} \cdot \overset{\beta}{b}$.

Des deux nombres ordinaux α & a, le premier, par exemple, désignera de quelle équation est pris le coëfficient $\overset{\alpha}{a}$, & le second désignera le rang que tient ce coëfficient dans l'équation, comme on le verra ci-après.

Je suppose encore le système suivant d'abréviations, & que l'on fasse

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b} = \overset{\alpha}{a}.\overset{\beta}{b} - \overset{\alpha}{b}.\overset{\beta}{a}$$

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} = \overset{\alpha}{a}.\,\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} + \overset{\alpha}{b}.\,\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a} + \overset{\alpha}{c}.\,\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}$$

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = \overset{\alpha}{a}.\,\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} - \overset{\alpha}{b}.\,\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{a} + \overset{\alpha}{c}.\,\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b} - \overset{\alpha}{d}.\,\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c}$$

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e} = \overset{\alpha}{a}.\,\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e} + \overset{\alpha}{b}.\,\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{e}\Big|\frac{\varepsilon}{a} + \overset{\alpha}{c}.\,\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{e}\Big|\frac{\delta}{a}\Big|\frac{\varepsilon}{b}$$

$$+ \overset{\alpha}{d}.\,\frac{\beta}{e}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b}\Big|\frac{\varepsilon}{c} + \overset{\alpha}{e}.\,\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c}\Big|\frac{\varepsilon}{d}$$

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\zeta}{f} = \overset{\alpha}{a}.\,\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\zeta}{f} - \overset{\alpha}{b}.\,\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{e}\Big|\frac{\varepsilon}{f}\Big|\frac{\zeta}{a} + \text{\&c.}$$

Le ſymbole $-|-|-|-$ ſert ici de caractériſtique.

Les ſeules choſes à obſerver ſont l'ordre des ſignes, & la loi des permutations entre les lettres *a, b, c, d,* &c. qui me paroiſſent ſuffiſamment indiqués ci-deſſus.

Au lieu de tranſpoſer les lettres *a, b, c, d,* &c. on pouvoit les laiſſer dans l'ordre alphabétique, & tranſpoſer au contraire les lettres α, β, γ, δ, &c. les réſultats auroient été parfaitement les mêmes; ce qui a lieu auſſi par rapport aux concluſions ſuivantes.

Premièrement, il eſt clair que $\frac{\alpha}{\text{a}}\Big|\frac{\beta}{\text{b}}$ repréſente deux termes différens, l'un poſitif, & l'autre négatif, réſultans d'autant de permutations poſſibles de *a* & *b;* que $\frac{\alpha}{\text{a}}\Big|\frac{\beta}{\text{b}}\Big|\frac{\gamma}{\text{c}}$ en repréſente ſix, trois poſitifs & trois négatifs, réſultans d'autant de permutations poſſibles de *a, b* & *c;* que $\frac{\alpha}{\text{a}}\Big|\frac{\beta}{\text{b}}\Big|\frac{\gamma}{\text{c}}\Big|\frac{\delta}{\text{d}}$ en repréſente vingt-quatre, douze poſitifs & douze négatifs, réſultans d'autant de permutations poſſibles entre *a, b, c* & *d;* & ainſi de ſuite.

Mais de plus, la formation de ces quantités eſt telle que l'unique changement qui puiſſe réſulter d'une permutation, quelle qu'elle ſoit, faite entre les lettres du même alphabet, dans l'une de ces abréviations, ſera un changement dans le ſigne de ſa première valeur.

La démonſtration de cette vérité & la recherche du ſigne réſultant d'une permutation déterminée, dépendent généralement de deux propoſitions qui peuvent être énoncées ainſi qu'il ſuit, en ſe ſervant de nombres pour indiquer le rang des lettres.

La première eſt que

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{3}\Big|\frac{\dots}{\dots}\Big|\frac{m}{m}\Big|\frac{m+1}{m+1}\Big|\frac{\dots}{\dots}\;\frac{n}{n} = \pm\;\frac{1}{m}\Big|\frac{2}{m+1}\Big|\frac{3}{m+2}\Big|\frac{\dots}{\dots}\Big|\frac{n-m+1}{n}\Big|\frac{n-m+2}{1}\Big|\frac{n-m+3}{2}\Big|\frac{\dots}{\dots}\Big|\frac{n}{m-1},$$

le signe — n'ayant lieu que dans le cas où n & m sont l'un & l'autre des nombres pairs.

La seconde est que

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{3}\Big|\frac{\ldots}{\ldots}\Big|\frac{m}{m}\Big|\frac{m+1}{m+1}\Big|\frac{\ldots}{\ldots}\Big|\frac{n}{n} = -\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{3}\Big|\frac{\ldots}{\ldots}\Big|\frac{m-1}{m-1}\Big|\frac{m}{m+1}\Big|\frac{m+1}{m}\Big|\frac{m+2}{m+2}\Big|\frac{\ldots}{\ldots}\Big|\frac{n}{n}.$$

Il sera facile de voir que, la première équation supposée, celle-ci n'a besoin d'être prouvée que pour un seul cas, comme, par exemple, celui de $m = n - 1$, c'est-à-dire, celui où les deux lettres transposées sont les deux dernières.

Au lieu de démontrer généralement ces deux équations, ce qui exigeroit un calcul embarrassant plutôt que difficile, je me contenterai de développer les exemples les plus simples; cela suffira pour saisir l'esprit de la démonstration.

Selon l'une & l'autre équation, on a

$$\frac{\alpha}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{b}} = -\frac{\alpha}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{a}}$$

mais selon l'ordre de formation prescrit ci-dessus, $\frac{\alpha}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{a}}$ $= \frac{\alpha\,\beta}{\mathrm{b}.\mathrm{a}} - \frac{\alpha\,\beta}{\mathrm{a}.\mathrm{b}}$ qui égale en effet $-\frac{\alpha}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{b}}$.

Selon la première équation, on a

$$\frac{\alpha}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{c}} = \frac{\alpha}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{c}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{a}} = \frac{\alpha}{\mathrm{c}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{b}},$$

mais selon l'ordre de formation,

$$\frac{\alpha}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{c}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{a}} = \frac{\alpha}{\mathrm{b}}.\frac{\beta}{\mathrm{c}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{a}} + \frac{\alpha}{\mathrm{c}}.\frac{\beta}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{b}} + \frac{\alpha}{\mathrm{a}}.\frac{\beta}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{c}},$$

&

$$\frac{\alpha}{\mathrm{c}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{b}} = \frac{\alpha}{\mathrm{c}}.\frac{\beta}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{b}} + \frac{\alpha}{\mathrm{a}}.\frac{\beta}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{c}} + \frac{\alpha}{\mathrm{b}}.\frac{\beta}{\mathrm{c}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{a}},$$

qui ne diffèrent du développement ci-dessus de $\frac{\alpha}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{c}}$, que par une simple transposition entre les termes.

Selon la ſeconde, on a

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} = -\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b};$$

mais on a déjà ſelon la première $\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b}$; donc il ſuffit de prouver que ſelon l'ordre de formation $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b}$: or on a

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b} = \frac{\alpha}{a}.\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b} + \frac{\alpha}{c}.\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{b}.\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c}$$

(qui en ſuppoſant $\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2} = -\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{1}$, comme cela a été prouvé ci-deſſus) eſt,

$$= -\frac{\alpha}{a}.\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} - \frac{\alpha}{c}.\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b} - \frac{\alpha}{b}.\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}.$$

Quant à $\frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{a}$, il égale par conſéquent $-\frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}$, ou $-\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}$.

On a de même ſelon notre première équation,

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = -\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{a} = \frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b} = -\frac{\alpha}{d}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c}.$$

Et en effet, ſelon l'ordre de formation, on a, par exemple,

$$\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{a} = \frac{\alpha}{b}.\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{a} - \frac{\alpha}{c}.\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b} + \frac{\alpha}{d}.\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c} - \frac{\alpha}{a}.\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}$$

qui ne diffère du développement ci-deſſus de $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}$ que par une ſimple tranſpoſition entre les termes & le ſigne du tout.

Selon la ſeconde équation, on a

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = -\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{d} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{c}.$$

&

& il s'agit de prouver seulement que $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = - \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|d|c}$, ou que $\frac{1|2|3|4}{1|2|3|4} = - \frac{1|2|3|4}{1|2|4|3}$; car selon notre première équation

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{b|a|c|d} = \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{c|d|b|a} = - \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{c|d|a|b} = - \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|c|b|d} = - \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{d|a|c|b} = \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{d|a|b|c} = - \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d};$$

or

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|d|c} = \frac{\alpha}{a}.\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|d|c} - \frac{\alpha}{b}.\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|c|a} + \frac{\alpha}{d}.\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|a|b} - \frac{\alpha}{c}.\frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|d}.$$

Je considère dans ce développement, d'abord les deux derniers termes, & ensuite les premiers.

Comme selon notre première équation $\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|a|b} = \frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c}$, & $\frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|d} = \frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b}$, il est clair que les deux derniers termes comparés à ceux du développement de $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$, sont les mêmes, mais de signe contraire; quant aux premiers, pour qu'ils soient aussi les mêmes, mais de signe contraire, il faut que $\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|d|c} = - \frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d}$ & $\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|c|a} = - \frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a}$; or, $\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|c|a} = \frac{\beta|\gamma|\delta}{c|a|d}$, il suffit donc (notre première équation supposée) que l'on ait $\frac{1|2|3}{1|2|3} = - \frac{1|2|3}{1|3|2}$ pour avoir $\frac{1|2|3|4}{1|2|3|4} = - \frac{1|2|3|4}{1|2|4|3}$; or, c'est ce qui a lieu en effet. On tirera de-là ce qui résulte de toutes les autres permutations de a, b, c & d; & si l'on procède semblablement pour le cas de cinq lettres du même alphabet, &c. On verra

qu'en général la démonſtration de notre ſeconde équation pour le cas de $n = a$, dépend de cette même équation pour le cas de $n = a - 1$, quel que ſoit a; d'où il ſuit que puiſque $\frac{1|2}{1|2} = -\frac{1|2}{2|1}$, elle eſt généralement vraie.

Cela ſuppoſe la vérité de la première qui eſt manifeſte d'après l'ordre de formation.

Ceux qui ont connoiſſance des ſymboles abrégés que j'ai nommés *types partiels de combinaiſon*, dans mon *Mémoire ſur la réſolution des équations* *, reconnoîtront ici la formation du *type partiel* dépendant du ſecond degré, pour un nombre quelconque de lettres; ils verront ſans peine qu'en prenant ici nos α, β, γ, δ, &c. par exemple, pour des expoſans, tous les termes de même ſigne, dans le développement de l'une de nos abréviations, ſeront auſſi le développement du *type partiel* dépendant du ſecond degré, & formé d'un pareil nombre de lettres; ce que démontrent nos opérations précédentes.

De ce que nous avons dit juſqu'ici, *il ſuit que*

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = 0,$$

ſi deux lettres quelconques du même alphabet ſont égales entr'elles; car quelque part que ſoient les deux lettres égales, on peut les tranſpoſer aux deux dernières places de leur rang, ce qui ne fera au plus que changer le ſigne de la valeur; alors, de leur permutation particulière, il ne peut, d'une part, réſulter aucun changement, puiſqu'elles ſont égales; d'autre part, ſelon notre ſeconde équation ci-deſſus, il doit en réſulter un changement de ſigne; cette contradiction ne peut être levée qu'en ſuppoſant la valeur zéro. En effet, $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\alpha}{b} = 0$,

* Voyez les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1771, page 365.*

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\beta}{c} = \overset{\alpha}{a}.\ \frac{\beta}{b}\Big|\frac{\beta}{c} + \overset{\alpha}{b}.\ \frac{\beta}{c}\Big|\frac{\beta}{a} + \overset{\alpha}{c}.\ \frac{\beta}{a}\Big|\frac{\beta}{b} = 0, \ \&c.$$

Tout cela poſé ; puiſque l'on a identiquement,

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3} = \overset{1}{1}.\ \frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3} + \overset{1}{2}.\ \frac{1}{3}\Big|\frac{2}{1} + \overset{1}{3}.\ \frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2} = 0,$$

$$\frac{2}{1}\Big|\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3} = \overset{2}{1}.\ \frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3} + \overset{2}{2}.\ \frac{1}{3}\Big|\frac{2}{1} + \overset{2}{3}.\ \frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2} = 0,$$

Si l'on propoſe de trouver les valeurs de $\xi 1$ & de $\xi 2$ qui ſatisfont aux deux équations

$$\overset{1}{1}.\xi 1 + \overset{1}{2}.\xi 2 + \overset{1}{3} = 0$$

$$\overset{2}{1}.\xi 1 + \overset{2}{2}.\xi 2 + \overset{2}{3} = 0,$$

on pourra comparer, & l'on aura

$$\xi 1 = \frac{\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3}}{\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}}, \quad \xi 2 = \frac{\frac{1}{3}\Big|\frac{2}{1}}{\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}}$$

De même, puiſque l'on a identiquement,

$$\frac{1|1|2|3}{1|2|3|4} = \overset{1}{1}.\ \frac{1|2|3}{2|3|4} - \overset{1}{2}.\ \frac{1|2|3}{3|4|1} + \overset{1}{3}.\ \frac{1|2|3}{4|1|2} - \overset{1}{4}.\ \frac{1|2|3}{1|2|3} = 0,$$

$$\frac{2|1|2|3}{1|2|3|4} = \overset{2}{1}.\ \frac{1|2|3}{2|3|4} - \overset{2}{2}.\ \frac{1|2|3}{3|4|1} + \overset{2}{3}.\ \frac{1|2|3}{4|1|2} - \overset{2}{4}.\ \frac{1|2|3}{1|2|3} = 0,$$

$$\frac{3|1|2|3}{1|2|3|4} = \overset{3}{1}.\ \frac{1|2|3}{2|3|4} - \overset{3}{2}.\ \frac{1|2|3}{3|4|1} + \overset{3}{3}.\ \frac{1|2|3}{4|1|2} - \overset{3}{4}.\ \frac{1|2|3}{1|2|3} = 0;$$

Si l'on propoſe de trouver les valeurs de $\xi 1$, $\xi 2$ & $\xi 3$, qui ſatisfont aux trois équations

$$\overset{1}{1}.\xi 1 + \overset{1}{2}.\xi 2 + \overset{1}{3}.\xi 3 + \overset{1}{4} = 0,$$

$$\overset{2}{1}.\xi 1 + \overset{2}{2}.\xi 2 + \overset{2}{3}.\xi 3 + \overset{2}{4} = 0,$$

$$\overset{3}{1}.\xi 1 + \overset{3}{2}.\xi 3 + \overset{3}{3}.\xi 3 + \overset{3}{4} = 0;$$

on pourra comparer, & l'on aura

$$\xi 1 = \frac{-\frac{1|2|3}{2|3|4}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}}, \quad \xi 2 = \frac{\frac{1|2|3}{3|4|1}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}}, \quad \xi 3 = \frac{-\frac{1|2|3}{4|1|2}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}},$$

&c.

Il est clair que ces valeurs n'ont point de facteurs inutiles; mais pour les rendre aussi commodes qu'il est possible dans les applications, & particulièrement dans celles où l'on veut faire usage des logarithmes, il sera bon d'y employer le plus qu'il se pourra, la multiplication des facteurs complexes. J'observe donc 1.° que si l'on substitue dans le développement de $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$, les valeurs des $\frac{\alpha|\beta\ \gamma}{a|b|c}$ en $\frac{\alpha|\beta}{a|b}$, on aura, en réduisant & ordonnant, d'après les observations ci-dessus,

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = \left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha|\beta}{a|b}.\frac{\gamma|\delta}{c|d} - \frac{\alpha|\beta}{a|c}.\frac{\gamma|\delta}{b|d} + \frac{\alpha|\beta}{a|d}.\frac{\gamma|\delta}{b|c} \\ + \frac{\alpha|\beta}{b|c}.\frac{\gamma|\delta}{a|d} - \frac{\alpha|\beta}{b|d}.\frac{\gamma|\delta}{a|c} \\ + \frac{\alpha|\beta}{c|d}.\frac{\gamma|\delta}{a|b} \end{array}\right.$$

si de même on substitue dans le développement de $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|b|c|d|e|f}$, les valeurs des $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\epsilon}{a|b|c|d|e}$ en $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$, on aura, en réduisant & ordonnant, d'après les observations ci-dessus,

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|d|e|f} = \left\{\begin{array}{l}
\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\zeta}{f} - \frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\zeta}{f} + \frac{}{a}\Big|\frac{}{d} \cdot \frac{}{b}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{e}\Big|\frac{}{f} \\
+ \frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\varepsilon}{e}\Big|\frac{\zeta}{f} - \frac{}{b}\Big|\frac{}{d} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{e}\Big|\frac{}{f} + \frac{}{b}\Big|\frac{}{e} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{d}\Big|\frac{}{f} \\
+ \frac{}{c}\Big|\frac{}{d} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{b}\Big|\frac{}{e}\Big|\frac{}{f} - \frac{}{c}\Big|\frac{}{e} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{b}\Big|\frac{}{d}\Big|\frac{}{f} + \frac{}{c}\Big|\frac{}{f} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{b}\Big|\frac{}{d}\Big|\frac{}{e} \\
+ \frac{}{d}\Big|\frac{}{e} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{b}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{f} - \frac{}{d}\Big|\frac{}{f} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{b}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{e} \\
+ \frac{}{e}\Big|\frac{}{f} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{b}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{d}. \\
\qquad\qquad - \frac{}{a}\Big|\frac{}{e} \cdot \frac{}{b}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{d}\Big|\frac{}{f} + \frac{}{a}\Big|\frac{}{f} \cdot \frac{}{b}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{d}\Big|\frac{}{e} \\
\qquad\qquad - \frac{}{b}\Big|\frac{}{f} \cdot \frac{}{a}\Big|\frac{}{c}\Big|\frac{}{d}\Big|\frac{}{e}
\end{array}\right.$$

La loi des permutations & des ſignes eſt aſſez manifeſte dans ces exemples, pour qu'on en puiſſe conclure des développemens pareils pour les cas de huit & dix lettres, &c. du même alphabet: alors, en employant les premiers développemens pour les cas d'un nombre impair de ces lettres, on aura les formules d'élimination du premier degré, ſous la forme la plus conciſe qu'il ſoit poſſible.

Si l'on veut exprimer ces formules, généralement pour un nombre n d'équations,

$$\overset{1}{1}.\xi 1 + \overset{1}{2}.\xi 2 + \overset{1}{3}.\xi 3 + \ldots + \overset{1}{m}.\xi m + \ldots + \overset{1}{n}.\xi n + (\overset{1}{n+1}) = 0,$$

$$\overset{2}{1}.\xi 1 + \overset{2}{2}.\xi 2 + \overset{2}{3}.\xi 3 + \ldots\ldots + \overset{2}{m}.\xi m + \ldots\ldots + \overset{2}{n}.\xi n + (\overset{2}{n+1}) = 0,$$

&c.

La valeur de l'inconnue quelconque ξm, ſera renfermée dans l'équation ſuivante, à une ſeule inconnue.

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{3}\Big|\frac{\cdots}{\cdots}\Big|\frac{n}{n} . \xi m \pm \frac{1}{m+1}\Big|\frac{2}{m+2}\Big|\frac{3}{m+3}\Big|\frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots,}\Big|\frac{n-m}{n}\Big|\frac{n-m+1}{n+1}\Big|\frac{n-m+2}{1}\Big|\frac{n-m+3}{2}\Big|\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\Big|\frac{n}{m-1} = 0,$$

le ſigne + ayant lieu ſeulement dans le cas où m & n ſont impairs l'un & l'autre.

ARTICLE II.

De l'Élimination entre deux Équations de degrés élevés.

Si l'on a deux équations du degré m, & repréſentées; l'une par $\overset{1}{1}.x^{m} + \overset{1}{2}.x^{m-1} + \overset{1}{3}.x^{m-2} + \&c. = 0$; l'autre par $\overset{2}{1}.x^{m} + \overset{2}{2}.x^{m-1} + \overset{2}{3}.x^{m-2} + \&c. = 0$; & qu'afin de ſimplifier davantage, on écrive,

$$\overline{a|b} \text{ pour } \frac{1}{a}\Big|\frac{2}{b}, \text{ ou pour } \overset{1}{a}.\overset{2}{b} - \overset{1}{b}.\overset{2}{a}.$$

On aura, ſi les équations ſont du ſecond degré, ou ſi $m = 2$; l'équation

$$\left.\begin{matrix}\overline{1|3}\cdot\overline{1|3}\\ -\overline{1|2}\cdot\overline{2|3}\end{matrix}\right\} = 0.$$

Si $m = 3$, on aura

$$\overline{1|4}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\\ -2.\overline{1|2}\cdot\overline{3|4}\end{matrix}\right\} - \overline{1|3}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{1|4}\cdot\overline{2|4}\\ -\overline{1|3}\cdot\overline{3|4}\end{matrix}\right\} + \overline{1|2}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{2|4}\cdot\overline{2|4}\\ -\overline{2|3}\cdot\overline{3|4}\end{matrix}\right\} = 0.$$

Si $m = 4$, on aura,

$$\left.\begin{matrix}
\overline{1|5}\cdot\left(\begin{matrix}\overline{1|5}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}\cdot\overline{1|5}\\ -3\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\ -\overline{1|3}\left\{\begin{matrix}2\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{3|5}\\ -3\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\ +3\cdot\overline{1|2}\left\{\begin{matrix}\overline{2|5}\cdot\overline{3|5}\\ -\overline{2|4}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right) - \overline{1|4}\cdot\left(\begin{matrix}\overline{2|5}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}\cdot\overline{1|5}\\ -2\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\ -\overline{1|4}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}\cdot\overline{3|5}\\ -\overline{1|4}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\ +2\cdot\overline{1|2}\left\{\begin{matrix}\overline{3|5}\cdot\overline{3|5}\\ -\overline{3|4}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right)\\
+\overline{1|3}\cdot\left(\begin{matrix}\overline{2|5}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}\cdot\overline{2|5}\\ -2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\ -\overline{2|4}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}\cdot\overline{3|5}\\ -\overline{1|4}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\ +\overline{1|3}\left\{\begin{matrix}\overline{3|5}\cdot\overline{3|5}\\ -\overline{3|4}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right) - \overline{1|2}\cdot\left(\begin{matrix}\overline{2|5}\left\{\begin{matrix}\overline{2|5}\cdot\overline{2|5}\\ -2\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\ -\overline{2|4}\left\{\begin{matrix}\overline{2|5}\cdot\overline{3|5}\\ -\overline{2|4}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\ +\overline{2|3}\left\{\begin{matrix}\overline{3|5}\cdot\overline{3|5}\\ -\overline{3|4}\cdot\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right)
\end{matrix}\right\} = 0.$$

On obſervera que les nombres hors du ſigne $\overline{\;|\;}$, & qu'on a diſtingués ici & dans la ſuite par un plus gros caractère, ſont des nombres nombrans, ou des coëfficiens numériques & déterminés. Il faudroit en trouver la loi avant de parvenir à une formule générale d'élimination qui fut fonction du degré *m*.

J'avois trouvé ſans peine les formes précédentes, & dans le deſſein de découvrir une loi, j'entrepris de chercher une forme ſemblable pour le cas de $m = 5$. Les difficultés que j'ai rencontrées, & qui m'ont fait abandonner cette recherche, pourront être vaincues; c'eſt pourquoi je vais en donner une idée, & indiquer les procédés que j'ai ſuivis.

Je ſuppoſe nos formules toutes calculées & miſes en facteurs de la forme $\overline{a|b}$, telles que les donnent pluſieurs méthodes connues; & qu'il n'eſt plus queſtion que de les réduire au moindre nombre de termes, comme le ſont celles que nous venons de voir, ce qui eſt néceſſaire pour les mettre ſous la forme ſyſtématique en queſtion.

J'obſerve d'abord qu'il ne peut y avoir de réduction qu'entre des termes compoſés des mêmes coëfficiens; c'eſt-à-dire ici, entre des termes où il n'entre que les mêmes nombres ordinaux, répétés le même nombre de fois, tels que ceux-ci.

$$
\begin{aligned}
&- \quad \overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \\
&- \quad 2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\
&+ \quad \overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|3},
\end{aligned}
$$

où 1 ſe trouve deux fois, 2 une fois, 3 une fois, & 4 deux fois.

Si donc on ſe propoſe une réduction à faire, il faut raſſembler les termes entre leſquels elle peut avoir lieu, & ne conſidérer que ceux-là.

Le fondement de toutes les réductions poſſibles entre des termes de cette eſpèce ſe trouve, comme on le verra bientôt, dans une ſuite d'équations données par M. Fontaine, au commencement de ſa ſeconde méthode de calcul intégral, dans le Recueil de ſes Mémoires. Elles ſe réduiſent à cette

propoſition identique, facile à vérifier généralement,

$$\overline{a|b}\cdot\overline{c|d} - \overline{a|c}\cdot\overline{b|d} + \overline{a|d}\cdot\overline{b|c} = 0.$$

Les trois termes ci-deſſus, par exemple, ſont viſiblement réductibles; car on a,

$$\overline{1|2}\cdot\overline{3|4} - \overline{1|3}\cdot\overline{2|4} + \overline{1|4}\cdot\overline{2|3} = 0,$$

qui étant multiplié par $-\overline{1|4}$, & ajouté aux trois termes, donne,

$$-2\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4}$$
$$-\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4},$$

pour réſultat.

Mais il eſt évident qu'il y a ici un choix arbitraire des termes à faire évanouir, & qu'on peut s'égarer de deux manières, lorſqu'il y a beaucoup de termes; l'une, en s'éloignant de la route qui mène à en faire évanouir le plus qu'il eſt poſſible; l'autre, en amenant un réſultat qui, quoique du moindre nombre de termes, ne ſoit cependant pas propre à la forme ſyſtématique.

Quelques eſſais me firent ſoupçonner d'abord que j'éviterois ces deux inconvéniens en faiſant uſage du procédé ſuivant.

J'ai ſuppoſé $\overset{1}{a}.\overset{2}{\alpha} - \overset{1}{\alpha}.\overset{2}{a} = \overline{a|\alpha}$.

Je ſuppoſe de nouveau

$$\overset{1}{a}.\overset{1}{b}.\overset{2}{\alpha}.\overset{2}{\beta} + \overset{1}{\alpha}.\overset{1}{\beta}.\overset{2}{a}.\overset{2}{b} = \overline{ab|\alpha\beta},$$

$$\overset{1}{a}.\overset{1}{b}.\overset{1}{c}.\overset{2}{\alpha}.\overset{2}{\beta}.\overset{2}{\gamma} - \overset{1}{\alpha}.\overset{1}{\beta}.\overset{1}{\gamma}.\overset{2}{a}.\overset{2}{b}.\overset{2}{c} = \overline{abc|\alpha\beta\gamma},$$

$$\overset{1}{a}.\overset{1}{b}.\overset{1}{c}.\overset{1}{d}.\overset{2}{\alpha}.\overset{2}{\beta}.\overset{2}{\gamma}.\overset{2}{\delta} + \overset{1}{\alpha}.\overset{1}{\beta}.\overset{1}{\gamma}.\overset{1}{\delta}.\overset{2}{a}.\overset{2}{b}.\overset{2}{c}.\overset{2}{d} = \overline{abcd|\alpha\beta\gamma\delta};$$

&c.

d'où il ſuit que $\overline{\alpha|a} = -\overline{a|\alpha}$, $\overline{\alpha\beta|ab} = \overline{ab|\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\beta\gamma|abc} = -\overline{abc|\alpha\beta\gamma}$, &c. & que les permutations entre les lettres qui ſont d'un même côté du ſigne $\overline{\,|\,}$, ſont indifférentes relativement à la valeur de l'abréviation.

Cela poſé, l'on a

$$\overline{a|\alpha}\cdot\overline{b|\beta} = \overline{ab|\alpha\beta} - \overline{a\beta|\alpha b}$$

$$\overline{a|\alpha}\cdot\overline{b|\beta}\cdot\overline{c|\gamma} = \overline{abc|\alpha\beta\gamma} - \overline{ab\gamma|\alpha\beta c} - \overline{a\beta c|\alpha b\gamma} + \overline{a\beta\gamma|\alpha bc},$$

&c. ce

ce qui revient à avoir le résultat des multiplications indiquées, quoique l'on n'en écrive que la moitié des termes.

Étant donc proposée une suite de termes composés de facteurs de la forme $\overline{a|\alpha}$, on peut développer tous les produits & opérer comme dans l'exemple suivant. On aura, toute réduction faite dans le second membre,

$$\left.\begin{array}{l} - \quad \overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \\ - 2\;\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ + \quad \overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|3} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} - \quad \overline{112|344} \\ - 2\cdot\overline{113|244} \\ + 3\cdot\overline{114|234} \\ + 3\cdot\overline{123|144} \\ - \quad \overline{124|134} \end{array}\right.$$

Si l'on compare le terme $\overline{112|344}$ avec celui $\overline{abc|\alpha\beta\gamma}$, pris dans l'une des formules ci-dessus, on aura

$$\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} = \overline{112|344} - \overline{114|234} - \overline{124|134} - \overline{123|144},$$

& substituant, l'on a

$$\left.\begin{array}{l} - \quad \overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \\ - 2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ + \quad \overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|3} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} - \quad \overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ - 2\cdot\overline{113|244} \\ + 2\cdot\overline{114|234} \\ + 2\cdot\overline{123|144} \\ - 2\cdot\overline{124|134} \end{array}\right.$$

comparant de nouveau $\overline{113|244}$ avec $\overline{abc|\alpha\beta\gamma}$, & substituant, on aura, comme ci-dessus,

$$\left.\begin{array}{l} - \quad \overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \\ - 2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ - \quad \overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|3} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} - \quad \overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ - 2\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \end{array}\right.$$

Maintenant, ce qu'avoit de particulier le procédé dont je viens de parler, consistoit à choisir toujours entre les termes de la forme $\overline{abc\ldots|\alpha\beta\gamma\ldots}$, restans dans le second membre, celui où les nombres de l'un des côtés du signe étoient les plus petits, pour le comparer à $\overline{abc\ldots|\alpha\beta\gamma\ldots}$

Le succès de ce procédé empirique n'a commencé à se

démentir que dans un petit nombre de réductions de la formule pour le cinquième degré ; & il se peut que celles-ci tiennent à quelqu'autre observation de cette espèce, qui ne s'est pas présentée à moi.

La méthode directe que je vais exposer lèveroit toute difficulté, si elle étoit praticable; mais je n'ai pas vu de moyens de la rendre telle. L'exemple suivant suffira pour la faire entendre.

Je suppose que l'on ait à réduire la quantité

$$\begin{array}{l} -\ 4\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{3|5}\cdot\overline{4|5} \\ -\ 3\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{3|4}\cdot\overline{3|5} \\ -\ 3\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{4|5} \\ -\ \overline{1|5}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{3|4} \end{array}$$

& soit cette quantité désignée par M; on a les cinq équations identiques,

$$\begin{array}{l} \overline{1|2}\cdot\overline{3|4} - \overline{1|3}\cdot\overline{2|4} + \overline{1|4}\cdot\overline{2|3} = 0, \\ \overline{1|2}\cdot\overline{3|5} - \overline{1|3}\cdot\overline{2|5} + \overline{1|5}\cdot\overline{2|3} = 0, \\ \overline{1|2}\cdot\overline{4|5} - \overline{1|4}\cdot\overline{2|5} + \overline{1|5}\cdot\overline{2|4} = 0, \\ \overline{1|3}\cdot\overline{4|5} - \overline{1|4}\cdot\overline{3|5} + \overline{1|5}\cdot\overline{3|4} = 0, \\ \overline{2|3}\cdot\overline{4|5} - \overline{2|4}\cdot\overline{3|5} + \overline{2|5}\cdot\overline{3|4} = 0, \end{array}$$

Il faut multiplier chacune de ces cinq équations par le facteur le plus général qui puisse donner pour produit une expression où les nombres ordinaux soient les mêmes que dans M, & répétés le même nombre de fois. Multipliant donc

la première par... $\alpha\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{3|5}$,

la seconde par... $\beta 1\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{4|5} + \beta 2\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|5} + \beta 3\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{3|4}$;

la troisième par... $\gamma\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{3|5}$,

la quatrième par... $\delta 1\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{3|5} + \delta 2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{2|5} + \delta 3\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}$;

& la cinquième par $\varepsilon\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|5}$;

ajoutant ces produits à la quantité M, & égalant cette ſomme, qui eſt M, à l'expreſſion

$$\begin{array}{llll} & a1 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{3|5} \cdot \overline{4|5} & + & a6 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{4|5} \\ + & a2 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{1|4} \cdot \overline{3|5} \cdot \overline{3|5} & + & a7 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|4} \cdot \overline{3|5} \\ + & a3 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{3|4} \cdot \overline{3|5} & + & a8 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{3|4} \\ + & a4 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{4|5} & + & a9 \cdot \overline{1|4} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{3|5} \\ + & a5 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|4} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{3|5} & + & a10 \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{3|4} \end{array}$$

qui eſt la plus générale que l'on puiſſe former avec les nombres ordinaux qui entrent dans M; on trouve après avoir tiré les valeurs de α, $\beta 1$, $\beta 2$, &c. que pour que M ſoit égale à cette expreſſion générale, il ſuffit que les quatre équations ſuivantes aient lieu,

$$\begin{array}{c} a1 + a2 + a4 + a5 + 4 = 0, \\ a1 + a2 - a6 - a7 - a9 + 1 = 0, \\ a2 + a3 + a5 + a7 + a8 + 3 = 0, \\ a2 + a3 - a9 - a10 + 2 = 0. \end{array}$$

Il s'agit donc de ſatisfaire à ces quatre équations, en faiſant zéro le plus de ces dix indéterminées qu'il ſe pourra, ce qui eſt toujours poſſible, en épuiſant toutes les combinaiſons. On trouvera que l'on peut en faire ſept égales à zéro, & non pas huit. On ſatisfait, par exemple, en faiſant $a1 = -1$, $a5 = -3$, $a10 = 2$; ou en faiſant $a2 = -2$, $a4 = -2$, $a7 = -1$; &c. Il reſte à faire un choix entre toutes ces manières, relativement à la forme ſyſtématique; ce qui peut ſe faire encore, en épuiſant toutes les combinaiſons: mais on ſent combien cette exhauſtion entraîneroit de longueurs. Elle devient tout-à-fait impraticable pour le cinquième degré. Pour réduire, par exemple, la quantité

$$- \quad \overline{1|5}\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{2|6}\cdot\overline{2|5}\cdot\overline{4|6}$$

$$- \quad 3\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{2|6}\cdot\overline{2|5}\cdot\overline{5|6}$$

$$- \quad 3\cdot\overline{1|5}\;\overline{1|2}\cdot\overline{2|5}\cdot\overline{3|6}\cdot\overline{4|6}$$

$$- \quad 8\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{2|6}\cdot\overline{3|4}\cdot\overline{5|6}$$

$$+ \quad \overline{1|6}\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{4|5}\cdot\overline{5|6}$$

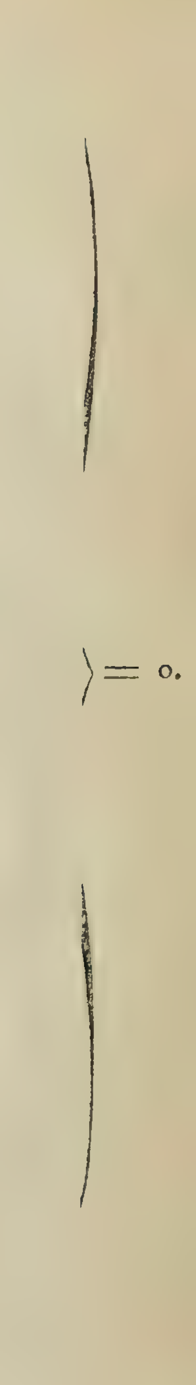
$$+ \quad \overline{1|2}\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{3|4}\cdot\overline{5|6}\cdot\overline{5|6}$$

que l'on trouvera à ſon rang ci-après, il faut ſatisfaire à neuf équations entre quarante-ſix indéterminées, ce qu'on ne peut pas ſe propoſer de faire par cette méthode.

La formule pour le cinquième degré, ou pour le cas de $m = 5$, dans nos équations en x, devra être réduite à cent vingt termes, avant de pouvoir être miſe ſous une forme ſyſtématique analogue à celles ci-deſſus. On la trouvera dans la Table ci-jointe, réduite à cent vingt-quatre : mes eſſais n'ont pas été plus loin.

Nota. M. l'Abbé de Gua, Membre de l'Académie, a calculé de ſon côté, dans des vues & par des méthodes qui lui ſont particulières, les formules d'élimination entre deux équations du ſecond, du troiſième, du quatrième & du cinquième degré. Il a cherché auſſi à les réduire au moindre nombre de termes, & y eſt parvenu pour le quatrième degré & les degrés inférieurs. Dans un manuſcrit de ſa formule pour le cinquième, qu'il a bien voulu me communiquer, elle étoit réduite à cent vingt-cinq termes, mais il croit l'avoir ramenée dans le temps à cent vingt-quatre, ainſi que moi ; ce qui peut être remarquable, en ce que, quoique M. l'Abbé de Gua n'ait fait ce calcul particulier que plus de deux ans après la première lecture de mon Mémoire, il n'a eu cependant aucune connoiſſance de mes réſultats, juſqu'au moment de l'impreſſion.




= o.

$$\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|6\cdot1|6\cdot1|6}$$
$$-\ \overline{1|6\cdot1|6\cdot1|6\cdot1|5\cdot2|6}$$
$$-\ 4\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|6\cdot1|2\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|6\cdot1|4\cdot3|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|6\cdot1|3\cdot4|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|6\cdot1|5\cdot1|5\cdot3|6}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|5\cdot1|3\cdot5|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|5\cdot1|4\cdot4|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|4\cdot1|4\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|6\cdot1|5\cdot1|5\cdot1|5\cdot4|6}$$
$$-\ 4\cdot\overline{1|6\cdot1|5\cdot1|5\cdot1|4\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|5\cdot1|5\cdot1|5\cdot1|5\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|6\cdot1|4\cdot2|6\cdot2|6}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|2\cdot2|6\cdot4|6}$$
$$-\ \overline{1|6\cdot1|5\cdot1|2\cdot2|6\cdot5|6}$$
$$+\ 6\cdot\overline{1|6\cdot1|2\cdot1|2\cdot5|6\cdot5|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|3\cdot2|6\cdot3|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|2\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|6\cdot1|5\cdot2|6\cdot3|4}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|4\cdot2|5\cdot3|6}$$
$$-\ 5\cdot\overline{1|6\cdot1|6\cdot1|3\cdot2|4\cdot5|6}$$
$$-\ 5\cdot\overline{1|6\cdot1|5\cdot1|2\cdot3|6\cdot4|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|5\cdot1|3\cdot2|5\cdot5|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|6\cdot1|5\cdot1|2\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$-\ 5\cdot\overline{1|5\cdot1|3\cdot1|2\cdot5|6\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|6\cdot1|4\cdot1|4\cdot2|6\cdot4|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|6\cdot1|4\cdot1|2\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|5\cdot1|4\cdot2|6\cdot4|5}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|6\cdot1|4\cdot1|4\cdot2|5\cdot5|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|5\cdot1|2\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|5\cdot1|4\cdot1|2\cdot4|6\cdot5|6}$$

$$-\ \overline{1|5\cdot1|5\cdot1|4\cdot2|5\cdot5|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|5\cdot1|2\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|6\cdot1|5\cdot1|3\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|6\cdot1|3\cdot1|3\cdot3|6\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|4\cdot1|4\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|4\cdot1|3\cdot3|6\cdot4|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|6\cdot1|3\cdot1|3\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|5\cdot1|5\cdot1|3\cdot3|6\cdot4|6}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|5\cdot1|4\cdot1|3\cdot3|6\cdot5|6}$$
$$-\ 5\cdot\overline{1|5\cdot1|3\cdot1|3\cdot4|6\cdot5|6}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|4\cdot1|3\cdot1|3\cdot5|6\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|5\cdot1|5\cdot1|3\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|4\cdot1|4\cdot3|6\cdot5|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|4\cdot1|3\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ \overline{1|6\cdot1|4\cdot1|4\cdot3|5\cdot4|6}$$
$$+\ \overline{1|5\cdot1|4\cdot1|4\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|4\cdot1|3\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|4\cdot1|4\cdot1|4\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ \overline{1|4\cdot1|4\cdot1|4\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|6\cdot1|3\cdot2|6\cdot2|6\cdot2|6}$$
$$-\ 4\cdot\overline{1|6\cdot1|2\cdot2|6\cdot2|6\cdot3|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|6\cdot1|2\cdot2|6\cdot2|4\cdot5|6}$$
$$-\ 6\cdot\overline{1|2\cdot1|2\cdot2|6\cdot4|6\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|5\cdot1|2\cdot2|6\cdot2|6\cdot4|6}$$
$$-\ 4\cdot\overline{1|6\cdot1|2\cdot2|5\cdot2|5\cdot5|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|2\cdot2|5\cdot2|6\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|5\cdot2|6\cdot2|3\cdot3|6}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|6\cdot1|2\cdot2|5\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|3\cdot1|3\cdot2|6\cdot2|6\cdot5|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|3\cdot1|2\cdot2|6\cdot3|6\cdot5|6}$$

$$+\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|3\cdot2|6\cdot2|6\cdot4|6}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot2|6\cdot3|6\cdot4|6}$$
$$-\ 5\cdot\overline{1|3\cdot1|2\cdot2|6\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|2\cdot1|2\cdot3|6\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ \overline{1|5\cdot1|3\cdot2|6\cdot2|5\cdot4|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|4\cdot1|3\cdot2|6\cdot2|5\cdot5|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|2\cdot2|5\cdot3|6\cdot4|6}$$
$$-\ 8\cdot\overline{1|5\cdot1|2\cdot2|6\cdot3|4\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|2\cdot2|3\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|2\cdot1|2\cdot3|4\cdot5|6\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|5\cdot1|3\cdot2|5\cdot2|5\cdot5|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|2\cdot2|5\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|2\cdot2|4\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot2|5\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|5\cdot1|2\cdot2|4\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot2|5\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|6\cdot1|3\cdot2|4\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|3\cdot1|3\cdot2|6\cdot3|6\cdot4|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot3|6\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|3\cdot1|3\cdot2|6\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|3\cdot1|3\cdot2|5\cdot3|6\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|6\cdot1|3\cdot2|4\cdot3|5\cdot4|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|3\cdot2|4\cdot3|6\cdot5|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|3\cdot1|3\cdot2|5\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot3|5\cdot3|6\cdot4|6}$$
$$+\ 4\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot3|4\cdot3|6\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|5\cdot1|3\cdot2|4\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot3|5\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|3\cdot1|3\cdot2|5\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|4\cdot1|3\cdot2|4\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot3|4\cdot4|6\cdot4|6}$$

$$+\ \overline{1|4\cdot1|3\cdot2|4\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|4\cdot1|2\cdot3|4\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|3\cdot1|3\cdot3|6\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$-\ \overline{1|3\cdot1|3\cdot3|6\cdot3|5\cdot4|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|3\cdot1|3\cdot3|6\cdot3|4\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|3\cdot1|3\cdot3|5\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|3\cdot1|3\cdot3|4\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ \overline{1|3\cdot1|3\cdot3|4\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|2\cdot2|6\cdot2|6\cdot2|6\cdot2|6}$$
$$-\ \overline{1|2\cdot2|6\cdot2|6\cdot2|5\cdot3|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|2\cdot2|6\cdot2|6\cdot2|3\cdot5|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|2\cdot2|6\cdot2|6\cdot2|4\cdot4|6}$$
$$+\ \overline{1|2\cdot2|6\cdot2|5\cdot2|5\cdot4|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|2\cdot2|6\cdot2|5\cdot2|4\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|2\cdot2|5\cdot2|5\cdot2|5\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|2\cdot2|6\cdot2|4\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$+\ 3\cdot\overline{1|2\cdot2|6\cdot2|3\cdot3|6\cdot4|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|2\cdot2|5\cdot2|3\cdot3|6\cdot5|6}$$
$$-\ 3\cdot\overline{1|2\cdot2|6\cdot2|3\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|2\cdot2|6\cdot2|4\cdot3|5\cdot4|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|2\cdot2|5\cdot2|3\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ 2\cdot\overline{1|2\cdot2|4\cdot2|4\cdot3|6\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|2\cdot2|5\cdot2|4\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|2\cdot2|5\cdot2|3\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$+\ \overline{1|2\cdot2|4\cdot2|4\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$-\ \overline{1|2\cdot2|4\cdot2|4\cdot4|5\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|2\cdot2|3\cdot3|6\cdot3|6\cdot3|6}$$
$$+\ \overline{1|2\cdot2|3\cdot3|6\cdot3|5\cdot4|6}$$
$$+\ 2\cdot\overline{1|2\cdot2|3\cdot3|6\cdot3|4\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|2\cdot2|3\cdot3|5\cdot3|5\cdot5|6}$$
$$-\ \overline{1|2\cdot2|3\cdot3|4\cdot4|6\cdot4|6}$$
$$+\ \overline{1|2\cdot2|3\cdot3|4\cdot4|5\cdot5|6}$$

$$= 0.$$

ADDITIONS

Aux recherches ſur le Calcul intégral & ſur le ſyſtème du Monde.*

Par M. DE LA PLACE.

Ces additions ont pour objet, 1.° l'éclairciſſement d'une difficulté que préſente la méthode d'approximation expoſée au commencement de ces recherches; 2.° quelques nouvelles recherches ſur l'équilibre des ſphéroïdes homogènes.

I.

Sur les Approximations.

La méthode que nous avons donnée pour cela, conſiſte à faire varier les conſtantes arbitraires dans les intégrales approchées. Reprenons le premier exemple auquel nous l'avons appliquée dans l'*article 1.er des Recherches citées;* (il eſt néceſſaire d'avoir cet article ſous les yeux). Nous ſommes parvenus aux deux équations $\delta p = \frac{\alpha}{4} T . q$; $\delta q = \frac{\alpha}{4} T . p$; δp étant la variation de p après l'intervalle T, & δq celle de q après le même intervalle. Pour tirer de ces équations les valeurs de p & de q, nous avons obſervé qu'en nommant $'p$ & $'q$, ce que deviennent p & q, après l'intervalle T, & faiſant $\frac{\alpha}{4} . T = x$, $'p$ & $'q$ étoient fonctions de x, & que l'on avoit

$$'p = p + x . \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} . \frac{\partial\partial p}{\partial x^2} + \&c.$$

$$'q = q + x . \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} . \frac{\partial\partial q}{\partial x^2} + \&c.$$

donc $\delta p = x . \frac{\partial p}{\partial x} + \&c.$ & $\delta q = x . \frac{\partial q}{\partial x} + \&c.$

* Voyez ci-deſſus, *pages 267 & ſuiv.*

partant on a, en comparant les termes multipliés par x, $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, & $\frac{\partial q}{\partial x} = p$; mais on doit remarquer que p, q, $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, ne sont point fonctions de x, puisque ce sont les valeurs de $'p$, $'q$, $\frac{\partial 'p}{\partial x}$, $\frac{\partial 'q}{\partial x}$, lorsque $x = 0$; cependant en intégrant, comme nous l'avons fait dans l'article cité, les équations $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, & $\frac{\partial q}{\partial x} = p$, nous avons regardé ces quantités comme fonctions de x.

Pour résoudre cette difficulté, & pour répandre en même temps un nouveau jour sur la méthode dont il s'agit, nous allons faire voir que les équations $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, & $\frac{\partial q}{\partial x} = p$, ont également lieu, x étant quelconque, & le raisonnement que nous allons faire, pouvant s'appliquer généralement à tous les exemples que nous avons intégrés, servira non-seulement à mettre cette méthode hors de toute atteinte, mais encore à présenter une idée nette du principe métaphysique sur lequel elle est fondée.

Si l'on fait dans l'équation (1) de l'article cité, $t = T + t_{,}$, on parviendra à l'équation (3), & si l'on fait $t = T + T' + t_{,,}$, on aura une expression de y, semblable à celle que donne l'équation (3), en écrivant dans celle-ci $''p$ au lieu de $'p$, $''q$ au lieu de $'q$, $t_{,,}$ au lieu de $t_{,}$ & $T + T'$ au lieu de T; $''p$ & $''q$ étant deux nouvelles constantes arbitraires, que l'on déterminera au moyen des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t_{,,}}$, lorsque $t_{,,} = 0$. Cela posé, si l'on compare cette nouvelle expression de y, avec celle que donne l'équation (3), on aura $''p - 'p = \frac{\alpha}{4} T' \cdot 'q$, & $''q - 'q = \frac{\alpha}{4} T' \cdot 'p$; donc si l'on fait $\frac{\alpha}{4} T' = x'$, on aura, comme dans l'article cité, $\frac{\partial 'p}{\partial x'} = 'q$, & $\frac{\partial 'q}{\partial x'} = 'p$, $'p$ & $'q$ étant fonctions de $\frac{\alpha}{4} T$, ou de x; partant si l'on fait, comme cela est permis, $\partial x' = \partial x$,

on aura $\frac{\partial' p}{\partial x} = {}'q$, & $\frac{\partial' q}{\partial x} = p$, c'eſt-à-dire que les équations $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, & $\frac{\partial q}{\partial x} = p$, ont lieu, x étant quelconque, & qu'ainſi on peut, en les intégrant, regarder p & q comme fonctions de x.

Un avantage particulier à la méthode précédente, & qui la rend d'un uſage extrêmement ſimple, conſiſte en ce que, par les méthodes ordinaires, on peut pouſſer auſſi loin que l'on veut les approximations, en conſervant les arcs-de-cercle, & qu'il ſuffit enſuite, d'une ſeule opération, pour les faire diſparoître, comme nous l'avons fait voir dans le ſecond article des recherches citées; or, on peut encore appliquer à ce cas le raiſonnement que nous venons de faire, en ſorte qu'il ne doit reſter aucune difficulté ſur cet objet.

Ayant envoyé cette méthode à M. de la Grange, il me fit l'honneur de me répondre, qu'il en avoit pareillement imaginé une qui y a rapport; comme tout ce qui ſort de la plume de ce grand Analyſte, ne peut qu'intéreſſer les Sciences, & que d'ailleurs cette méthode n'eſt point connue, je penſe que les Géomètres la verront ici avec plaiſir; je vais donc la donner telle que M. de la Grange me l'a envoyée.

« Ayant l'équation $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y + \Omega = 0$, où y eſt ſuppoſé très-petit, & où Ω eſt une fonction rationelle & « entière de y & de $\text{ſin.}\, t$, $\text{coſ.}\, t$, &c. j'obſerve que les deux « premiers termes donnent $y = p \,.\, \text{ſin.}\, t + q \,.\, \text{coſ.}\, t$; p & q « étant des conſtantes. Je fais maintenant $y = p \,.\, \text{ſin.}\, t + q \,.\, \text{coſ.}\, t + z$, & je regarde p & q comme variables, j'ai la « transformée «

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + z + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - 2\frac{\partial q}{\partial t}\right) . \text{ſin.}\, t + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 2\frac{\partial p}{\partial t}\right) . \text{coſ.}\, t + \Omega = 0. \text{ «}$$

Je fais $= 0$, les termes affectés de ſin. t & de coſ. t, & « d'où réſulteroient des arcs-de-cercle dans l'intégrale, j'ai deux « équations qui ſerviront à déterminer p & q; on peut étendre « cette méthode à tant d'équations qu'on voudra, & lui donner « toute l'exactitude qu'on deſirera. »

Cette méthode conduit à deux équations différentielles du ſecond ordre entre p & q, mais on verra avec un peu d'attention, que les termes $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ & $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$ ſont d'un ordre moindre que $\frac{\partial p}{\partial t}$ & $\frac{\partial q}{\partial t}$, & qu'ainſi ils peuvent être négligés; les équations différentielles du ſecond ordre s'abaiſſent par-là au premier ordre, & rentrent dans celles que donne notre méthode.

I I.

De l'Équilibre des Sphéroïdes homogènes.

Les Géomètres qui ſe ſont occupés de cet objet, ont ſuppoſé au ſphéroïde une figure déterminée, & ils ont cherché ſi l'équilibre pouvoit ſubſiſter avec cette figure. Je me propoſe ici de réſoudre le problème inverſe, & de chercher directement la figure qui convient à l'équilibre. Je ne fais d'autres ſuppoſitions que les deux ſuivantes; ſavoir, que le ſphéroïde eſt un ſolide de révolution, & qu'il diffère infiniment peu de la ſphère. En partant de ces ſuppoſitions, je parviens à une équation différentielle très-ſimple, mais d'un degré infini, & qui embraſſe généralement toutes les figures qui conviennent à l'équilibre; la figure elliptique ſatisfait viſiblement à cette équation différentielle; mais quoique je démontre l'impoſſibilité de l'équilibre pour un très-grand nombre de figures, & que je n'en connoiſſe aucune autre que celle de l'ellipſoïde avec laquelle il ſoit poſſible, je n'oſe cependant aſſurer qu'elle ſoit la ſeule. Il faudroit pour cela connoître en termes finis l'intégrale complète de l'équation différentielle du Problème, & je n'ai pu encore y parvenir. Au reſte, ſi mes recherches ne m'ont pas conduit à trouver généralement la figure du Méridien, & par conſéquent la loi de la variation des degrés de l'Équateur aux Pôles, elles m'ont fait connoître celle de la variation de la peſanteur, & j'ai trouvé ce théorème remarquable, ſavoir, que

que *ſur un ſphéroïde homogène, quelle que ſoit ſa figure, pourvu qu'elle tienne le ſphéroïde en équilibre, la variation de la peſanteur de l'Équateur aux Pôles, ſuit préciſément la même loi que ſur le ſphéroïde elliptique homogène.*

PROBLÈME.

Déterminer l'attraction d'un ſphéroïde de révolution infiniment peu différent de la ſphère, ſur un point quelconque pris dans ſon intérieur.

SOLUTION.

Soit $AMBmA$ la courbe qui par ſa révolution autour de l'axe AB, engendre le ſphéroïde, & $ANBnA$, un cercle décrit ſur AB, comme diamètre; que l'on faſſe $CA = a$, & l'angle $NCA = \theta$, C étant le milieu de AB, on aura viſiblement $NC = a$; enſuite MN eſt infiniment petit par la condition du problème; repréſentant donc par α une quantité infiniment petite, on pourra ſuppoſer MN de l'ordre α. Si l'on fait maintenant θ négatif, & tel que l'on ait $AN = An$, on a non-ſeulement $CN = Cn$, mais encore $CM = Cm$; donc $MN = mn$; repréſentant donc MN par une fonction quelconque de l'angle θ, cette fonction doit être telle qu'elle reſte la même en changeant le ſigne de θ; & comme le coſinus de l'angle θ a cette propriété, il en réſulte qu'on peut généralement repréſenter MN par une fonction quelconque de a coſ. θ; déſignant donc par φ $(a$ coſ. $\theta)$ une fonction de a coſ. θ, on pourra ſuppoſer $MN = \alpha a \,.\, \varphi(a \text{ coſ. } \theta)$, en ſorte que l'on aura

$$CM = a[1 + \alpha\varphi(a \text{ coſ. } \theta)],$$

& cette équation peut repréſenter toutes les courbes rentrantes, compoſées de deux parties égales, & ſemblablement placées de part & d'autre de l'axe AB.

Avant que d'aller plus loin, il ne ſera pas inutile de faire la remarque ſuivante.

Si l'on change le ſigne de θ ſans changer ſa valeur, coſ. θ

reſte de même valeur & de même ſigne; partant toute fonction de ce coſinus ſera conſtamment la même; cependant le ſinus de θ peut toujours être donné en fonction du coſinus de cet angle, d'où il ſembleroit qu'il ne doit point changer de valeur, en faiſant θ négatif, ce qui n'eſt pas. Pour réſoudre cette difficulté, j'obſerve qu'on a $\text{ſin.}\,\theta = \pm \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\theta^2)}$; ainſi à cauſe de l'ambiguité de ſigne, l'expreſſion analytique de ſin. θ a deux valeurs; or la condition qui détermine laquelle de ces valeurs il faut employer, eſt que le ſinus étant une perpendiculaire abaiſſée de l'extrémité de l'arc ſur le diamètre, on doit prendre le radical en $+$ ou en $-$, ſuivant que cette extrémité eſt au-deſſus ou au-deſſous du diamètre; ce n'eſt donc point parce que la fonction qui exprime la valeur du ſinus en coſinus change de valeur, lorſqu'on fait θ négatif, mais parce qu'elle change de forme, que ſin. θ devient de poſitif, négatif. On doit dire la même choſe de l'arc, & généralement de toutes les quantités qui dépendantes de l'angle θ, & pouvant être conſéquemment exprimées par une fonction de ſon coſinus, changent de valeur en faiſant θ négatif. Les fonctions tranſcendantes, telles que l'expreſſion de l'arc par le coſinus, ne diffèrent à cet égard des fonctions algébriques, telles que l'expreſſion du ſinus par le coſinus, qu'en ce qu'elles renferment une infinité de formes différentes, au lieu que le nombre des dernières eſt limité.

La fonction $\varphi\,(a\ \text{coſ.}\,\theta)$ doit toujours reſter la même, tant que la quantité a coſ. θ, enveloppée ſous le ſigne φ, reſte la même. Cette fonction ne doit donc être ſujette à aucune ambiguité de formes, & ſi, par exemple, on prend pour elle $\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\theta^2)}$, il faut prendre conſtamment le radical ſoit en plus, ſoit en moins. Cela poſé,

T étant un point quelconque placé ſur le plan AMB dans l'intérieur du ſphéroïde, ſoit $TC = h$, & conſidérons une molécule quelconque du ſphéroïde, ſituée au point R dont Z eſt la projection ſur le plan AMB; ſoit $TR = r$, & par le point T ſoient menées les deux droites TI & TQ, la première dans le plan AMB, & perpendiculairement à

la droite TC; la seconde perpendiculairement au plan AMB; soit p l'angle QTR, & q l'angle ZTI; on aura

$$TZ = r \,.\, \text{sin.}\, p, \;\&\; ZR = r \,.\, \text{cos.}\, p,$$

en sorte que la position du point R sera déterminée par les trois quantités p, q & r.

r & p restant invariables, si l'on fait varier q, de la différence ∂q, on aura un nouveau point R' dont Z' sera la projection sur le plan AMB; & il est clair que l'on aura $ZZ' = RR'$; or on a $ZZ' = r\partial q \,.\, \text{sin.}\, p$; donc $RR' = r\partial q \,.\, \text{sin.}\, p$.

Si l'on fait ensuite varier r, de la quantité ∂r, p & q étant constans, on aura un troisième point R'', tel que $RR'' = \partial r$.

Enfin si l'on fait varier p, de la quantité ∂p, r & q étant constans, on aura un quatrième point R''', tel que $RR''' = r\partial p$.

Maintenant les trois lignes RR', RR'', RR''', étant perpendiculaires entre elles, leur produit formera un parallélipipède que nous pouvons prendre pour la molécule même placée au point R; or ce produit est r^2 sin. $p \,.\, \partial p \,.\, \partial q \,.\, \partial r$, & en le divisant par le quarré r^2 de la distance r du point T à la molécule, on aura sin. $p \,.\, \partial p \,.\, \partial q \,.\, \partial r$ pour l'action suivant TR de la molécule placée en R, sur le point T.

Je décompose cette action en trois autres; la première, perpendiculairement au plan AMB, & dont il est inutile de tenir compte, parce qu'elle est détruite par l'action d'une autre molécule égale à la molécule R, & semblablement placée par rapport au point T, au-dessous de ce plan; la seconde, suivant le rayon TC, & la troisième, perpendiculairement à ce rayon dans le plan AMB.

Si du point Z, on abaisse ZL perpendiculairement sur TC, il est visible que l'expression de la force suivant TC sera sin. $p \,.\, \partial p \,.\, \partial q \,.\, \partial r \,.\, \frac{TL}{TR}$; or on a $\frac{TL}{TR} = \text{sin.}\, p \,.\, \text{sin.}\, q$; ainsi la force suivant TC, est égale à $\partial p \,.\, \partial q \,.\, \partial r \,.\, \text{sin.}\, p^2 \,.\, \text{sin.}\, q$.

L'expreſſion de la force perpendiculaire à TC, & agiſſante de T vers I, eſt $\text{ſin.}\, p \,.\, \partial p \,.\, \partial q \,.\, \partial r \,.\, \frac{ZL}{TR}$; or on a $\frac{ZL}{TR} = \text{ſin.}\, p \,.\, \text{coſ.}\, q$; ainſi la force perpendiculaire à TC eſt $\partial p \,.\, \partial q \,.\, \partial r \,.\, \text{ſin.}\, p^2 \,.\, \text{coſ.}\, q$.

Pour avoir préſentement l'attraction entière du ſphéroïde, il faut prendre les intégrales $\int\int\int \partial p \,.\, \partial q \,.\, \partial r \,.\, \text{ſin.}\, p^2 \,\text{ſin.}\, q$, & $\int\int\int \partial p \,.\, \partial q \,.\, \partial r \,.\, \text{ſin.}\, p^2 \,.\, \text{coſ.}\, q$, pour toute l'étendue du corps, en intégrant ſucceſſivement par rapport aux trois variables r, q & p.

En intégrant d'abord par rapport à r, elles deviennent

$$\int\int \partial p \,.\, \partial q \,.\, (r^1 + r) \,.\, \text{ſin.}\, p^2 \,.\, \text{ſin.}\, q,$$

&

$$\int\int \partial p \,.\, \partial q \,.\, (r^1 + r) \,.\, \text{ſin.}\, p^2 \,.\, \text{coſ.}\, q,$$

en repréſentant par r^1 le rayon TR prolongé depuis T juſqu'au point où il ſort du ſphéroïde; & par r, ce même rayon prolongé de l'autre côté de TC, juſqu'au point de ſortie; d'où l'on voit que r eſt négatif.

Pour intégrer préſentement les différentielles $\partial p \,\partial q (r^1 + r)$ $\text{ſin.}\, p^2 \,.\, \text{ſin.}\, q$, & $\partial p \,.\, \partial q \,.\, (r^1 + r) \,.\, \text{ſin.}\, p^2 \,.\, \text{coſ.}\, q$, par rapport aux variables p & q, il faut connoître r^1 & r en fonctions de p & de q. Je ſuppoſe conſéquemment le point R à la ſurface du ſphéroïde; en menant de ce point à l'axe AB la perpendiculaire RK, on aura par la nature de la courbe génératrice AMB, $\overline{RC}^2 = a^2 [1 + \alpha\varphi(CK)]^2$; & ſi, comme je le ferai toujours dans la ſuite, on néglige les quantités de l'ordre α^2, on aura $\overline{RC}^2 = a^2 [1 + 2\alpha\varphi(CK)]$. Cherchons préſentement les expreſſions de RC & de CK.

On a, par ce qui précède, $ZL = r \,.\, \text{ſin.}\, p \,.\, \text{coſ.}\, q$, & $TL = r \,.\, \text{ſin.}\, p \,.\, \text{ſin.}\, q$; donc, $LC = h - r \,.\, \text{ſin.}\, p \,.\, \text{ſin.}\, q$, & ſi l'on mène LH perpendiculairement ſur CA, on aura,

$$CH = LC \,.\, \text{coſ.}\, \theta = (h - r \,.\, \text{ſin.}\, p \,.\, \text{ſin.}\, q) \,.\, \text{coſ.}\, \theta.$$

Si du point Z on abaiſſe ZS perpendiculairement ſur

LH, on aura $ZS = ZL \,.\, \text{fin.}\,\theta = r \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{cof.}\,q \,.\, \text{fin.}\,\theta$; or ZK étant perpendiculaire fur AB, on a $ZS = KH$; donc $KH = r \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{cof.}\,q \,.\, \text{fin.}\,\theta$; partant

$CK = CH + HK = h \,.\, \text{cof.}\,\theta + r \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, (\text{fin.}\,\theta\, \text{cof.}\,q - \text{cof.}\,\theta \,.\, \text{fin.}\,q)$,

ou $CK = h \,.\, \text{cof.}\,\theta + r \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,(\theta - q)$.

Préfentement, on a $\overline{ZC}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{LZ}^2 = (h - r\,\text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,q)^2 + r^2 \,.\, \text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{cof.}\,q^2$, & $\overline{RZ}^2 = r^2\, \text{cof.}\,p^2$, donc $\overline{RC}^2 = (h - r\,\text{fin.}\,p\,\text{fin.}\,q)^2 + r^2 \,.\, \text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{cof.}\,q^2 + r^2\,\text{cof.}\,p^2 = h^2 - 2hr \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,q + r^2$; l'équation

$$\overline{RC}^2 = a^2 [1 + 2\alpha\varphi(CK)],$$

devient donc $r^2 - 2hr \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,q = a^2 - h^2 + 2\alpha a^2 \varphi \,.\, [h\,\text{cof.}\,\theta + r \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,(\theta - q)]$;

partant

$$r = h \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,q \pm \sqrt{\{a^2 - h^2 + h^2\,\text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2 + 2\alpha a^2 \varphi \,.\, [h \,.\, \text{cof.}\,\theta + r\,\text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,(\theta - q)]\}},$$

ou

$$r = h \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,q \pm \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2\,\text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2)} \pm \frac{\alpha a^2 \varphi \,.\, [h\,\text{cof.}\,\theta + r\,\text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,(\theta - q)]}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2\,\text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2)}}.$$

Il eft aifé de voir que l'on aura r', en prenant le radical en $+$, & en fubftituant fous le figne φ, au lieu de r la valeur que l'on auroit en fuppofant $\alpha = 0$, & prenant le radical en $+$, ce qui donne

$$r' = h \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,q + \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2\,\text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2)}$$
$$+ \alpha \,.\, a^2 \,.\, \frac{\varphi \,.\, [h \,.\, \text{cof.}\,\theta + (h \,.\, \text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q + \text{fin.}\,p \,.\, \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2\,\text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2)}) \,.\, \text{fin.}\,(\theta - q)]}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \,.\, \text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2)}},$$

on trouvera pareillement,

$$r = h \,.\, \text{fin.}\,p \,.\, \text{fin.}\,q - \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \,.\, \text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2)}$$
$$- \alpha \,.\, a^2 \,.\, \frac{\varphi \,.\, [h \,.\, \text{cof.}\,\theta + (h\,\text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q - \text{fin.}\,p \,.\, \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \,.\, \text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2)}) \,.\, \text{fin.}\,(\theta - q)}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2\,\text{fin.}\,p^2 \,.\, \text{fin.}\,q^2)}};$$

On aura ainfi, pour l'attraction du fphéroïde fuivant TC,

$$\iint \partial p \partial q (r' + r) . \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q = \iint 2 h \partial p \partial q . \text{fin.} p^3 . \text{fin.} q^2$$

$$+ \iint \frac{\alpha \partial p . \partial q . \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q . a^2}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q^2)}} . \left\{ \begin{array}{l} \varphi [h . \text{cof.} \theta + (h . \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q + \text{fin.} p . \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q^2)}) . \text{fin.} (\theta - q)] \\ - \varphi [h . \text{cof.} \theta + (h . \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q - \text{fin.} p . \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q^2)}) . \text{fin.} (\theta - q)] \end{array} \right. ;$$

& pour l'attraction fuivante TI,

$$\iint \partial p . \partial q (r' + r) . \text{fin.} p^2 . \text{cof.} q = \iint 2 h \partial p \partial q . \text{fin.} p^3 . \text{fin.} q . \text{cof.} q$$

$$+ \iint \frac{\alpha \partial p . \partial q . \text{fin.} p^2 . \text{cof.} q . a^2}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 . \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q^2)}} . \left\{ \begin{array}{l} \varphi [h \text{cof.} \theta + (h \text{fin.} p^2 \text{fin.} q + \text{fin.} p . \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \text{fin.} p^2 . \text{fin.} q^2)}) . \text{fin.} (\theta - q)] \\ - \varphi [h \text{cof.} \theta + (h \text{fin.} p^2 \text{fin.} q - \text{fin.} p . \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \text{fin.} p^2 .)}) . \text{fin.} (\theta - q)] \end{array} \right. .$$

Il faut préfentement intégrer ces quantités depuis $q = 0$ & $p = 0$, jufqu'à $q = 180^d$, & $p = 180^d$, & l'on aura l'action entière du fphéroïde fur le point T; de-là il fuit que dans le développement de ces différentielles, on peut négliger les termes dans lefquels cof. q fe trouve élevé à une puiffance impaire; car foit $P . \partial q . \text{cof.} q$, un de ces termes, P étant une fonction quelconque de fin. q & de cof. q^2, il eft clair que P fera le même pour deux valeurs de q, prifes à égale diftance de 90^d; mais cof. q fera le même avec des fignes contraires; d'où l'on voit que la fomme des deux différentielles, $P \partial q . \text{cof.} q$, correfpondantes, l'une à $q = 90^d - q'$; & l'autre à $90^d + q'$, fera nulle, & qu'ainfi l'intégrale entière, $\int P \partial q . \text{cof.} q$, fera zéro, en la prenant depuis $q = 0$, jufqu'à $q = 180^d$.

I I I.

Si le point T eft à la furface du fphéroïde, & tombe par conféquent fur le point M, il eft vifible que l'action du fphéroïde fur un point quelconque pris dans fon intérieur, & infiniment voifin de M, eft la même que fur M; ainfi les formules de l'*article précédent*, ont également lieu pour ce cas; mais on peut obferver qu'alors la différence de a & de h, étant de l'ordre α, on peut, dans les termes multipliés par α, fubftituer a au lieu de h; de plus on a, par l'*article I*, $h = a \; [1 + \alpha \varphi (a \, \text{cof.} \theta)]$, & fi l'on intègre depuis

$q = 0$, jufqu'à $q = 180^d$, on a $\iint 2h\partial p \partial q \,.\, \text{fin.} p^3 \,.\, \text{fin.} q^2$ $= \iint h\partial p \,.\, \text{fin.} p^3 (\partial q - \partial q \,.\, \text{cof.}\, 2q) = \pi \,.\, \int h\partial p \,.\, \text{fin.} p^3$, en déſignant par π le rapport de la circonférence au diamètre; or en intégrant depuis $p = 0$ jufqu'à $p = 180^d$, on a $\int \partial p \,.\, \text{fin.} p^3 = \frac{4}{3}$, donc $\iint 2h\partial p \partial q \,.\, \text{fin.} p^3 \,.\, \text{fin.} q^2 = \frac{4}{3} h\pi$ $= \frac{4}{3} a\pi \,.\, [1 + \alpha\varphi(a\,\text{cof.}\,\theta)]$; on a pareillement $\iint \partial p \partial q \,.\, \text{fin.} p = 2\pi$, & $\iint 2h\partial p \partial q \,.\, \text{fin.} p^3 \,\text{fin.} q \,.\, \text{cof.} q = 0$; donc fi l'on fait pour plus de fimplicité, $a = 1$, on aura pour l'attraction du fphéroïde fur le point M, fuivant MC,

$$\iint (r' + r)\partial p \,.\, \partial q \,.\, \text{fin.} p^2 \,.\, \text{fin.} q = \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi \,.\, \alpha \,.\, \varphi(\text{cof.}\,\theta)$$
$$+ \iint \alpha\partial p \partial q \,.\, \text{fin.} p \,.\, \varphi[\text{cof.}\,\theta + 2\,\text{fin.} p^2 \,.\, \text{fin.} q \,.\, \text{fin.}(\theta - q)];$$

je nomme A cette quantité.

On aura enfuite, pour l'action du fphéroïde fuivant MO perpendiculaire à MC,

$$\iint (r' + r)\partial p \partial q \,.\, \text{fin.} p^2 \,.\, \text{cof.} q = \iint \frac{\alpha\partial p \partial q \,.\, \text{fin.} p \,.\, \text{cof.} q}{\text{fin.} q} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} \varphi \,.\, [\text{cof.}\,\theta + 2\,\text{fin.} p^2 \,\text{fin.} q \,.\, \text{fin.}(\theta - q)] \\ - \varphi \,.\, (\text{cof.}\,\theta) \end{array} \right. ,$$

je nomme αB cette quantité, & j'obferve qu'elle peut être mife fous une forme plus fimple; car, en intégrant par rapport à p, on a,

$$B = -\,\text{cof.} p \int \frac{\partial q \,.\, \text{cof.} q}{\text{fin.} q} \left\{ \begin{array}{l} \varphi[\text{cof.}\,\theta + 2\,\text{fin.} p^2 \,.\, \text{fin.} q \,.\, \text{fin.}(\theta - q)] \\ - \varphi(\text{cof.}\,\theta) \end{array} \right\} + C$$
$$+ \iint 4\partial p \partial q \,.\, \text{fin.} p \,.\, \text{cof.} p^2 \,.\, \text{cof.} q \,.\, \text{fin.}(\theta - q) \,.\, \varphi'[\text{cof.}\,\varphi + 2\,\text{fin.} p^2 \,.\, \text{fin.} q \,.\, \text{fin.}(\theta - q)]$$

en déſignant par $\varphi'(\theta)$, la différence de $\varphi(\theta)$, divifée par $\partial \,.\, \text{cof.}\,\theta$; la conftante arbitraire C doit être déterminée par la condition que l'intégrale commence lorfque $p = 0$, & cette intégrale doit fe terminer lorfque $p = 180^d$; or on a dans ces deux cas,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \,.\, [\text{cof.}\,\theta + 2\,\text{fin.} p^2 \,.\, \text{fin.} q \,.\, \text{fin.}(\theta - q)] \\ - \varphi \,.\, (\text{cof.}\,\theta) \end{array} \right\} = 0;$$

donc $C = 0$, partant,

$$B = \int\int 4\partial p\,\partial q\,.\,\text{fin.}\,p\,.\,\text{cof.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,q\,.\,\text{fin.}\,(\theta - q)\,.$$
$$\varphi^{\text{I}}\,[\text{cof.}\,\theta + 2\,\text{fin.}\,p^2\,.\,\text{fin.}\,q\,.\,\text{fin.}\,(\theta - q)];$$

or on a, $2\,\text{cof.}\,q\,.\,\text{fin.}\,(\theta - q) = \text{fin.}\,\theta + \text{fin.}\,(\theta - 2q)$, & $2\,\text{fin.}\,q\,.\,\text{fin.}\,(\theta - q) = \text{cof.}\,(\theta - 2q) - \text{cof.}\,\theta$,

donc, $B = \int\int 2\partial p\,.\,\partial q\,.\,\text{fin.}\,p\,.\,\text{cof.}\,p^2\,.\,\text{fin.}\,\theta\,.$

$$\varphi^{\text{I}}.\,[\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,(\theta - 2q) - \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,\theta]$$
$$+ \int\int 2\partial p\,\partial q\,.\,\text{fin.}\,p\,.\,\text{cof.}\,p^2\,.\,\text{fin.}\,(\theta - 2q)$$
$$\varphi^{\text{I}}.\,[\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,(\theta - 2q) - \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,\theta].$$

J'obſerve maintenant que l'on a en intégrant par rapport à q,

$$\int 2\partial q\,.\,\text{fin.}\,p^2\,.\,\text{fin.}\,(\theta - 2q)\,.\,\varphi^{\text{I}}.\,[\text{cof.}\,\theta - \text{fin.}\,p^2\,\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,p^2.\,\text{cof.}\,(\theta - 2q)]$$
$$= \varphi\,.\,[\text{cof.}\,\theta - \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,(\theta - 2q)] + C;$$

la conſtante doit ſe déterminer par cette condition que l'intégrale eſt nulle, lorſque $q = 0$, ce qui donne $C = -\varphi\,(\text{cof.}\,\theta)$; de plus, l'intégrale doit ſe terminer lorſque $q = 180^d$; or on a dans ce cas, $\text{cof.}\,(\theta - 2q) = \text{cof.}\,\theta$; partant *(article I)* $\varphi\,[\text{cof.}\,\theta - \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,p^2\,\text{cof.}\,(\theta - 2q)] = \varphi\,(\text{cof.}\,\theta)$; donc,

$$\int 2\partial q\,.\,\text{fin.}\,p^2\,.\,\text{fin.}\,(\theta - 2q)\,.$$
$$\varphi^{\text{I}}\,[\text{cof.}\,\theta - \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,(\theta - 2q)]$$
$$= \varphi\,(\text{cof.}\,\theta) - \varphi\,(\text{cof.}\,\theta) = 0.$$

L'expreſſion précédente de B ſe réduira donc à celle-ci,

$$B = \int\int 2\partial p\,.\,\partial q\,.\,\text{fin.}\,p\,.\,\text{cof.}\,p^2\,.\,\text{fin.}\,\theta\,.$$
$$\varphi^{\text{I}}\,.\,[\text{cof.}\,\theta - \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,(\theta - 2q)].$$

Cette expreſſion de B nous fournit un rapport remarquable & qui nous ſera très-utile dans la ſuite, entre les deux quantités A & B. En effet, ſi l'on différentie par rapport à θ,

à θ, l'expreſſion précédente de A, après y avoir ſubſtitué cof. $(\theta - 2q) - \text{cof.}\,\theta$, au lieu de $2\,\text{ſin.}\,q\,.\,\text{ſin.}\,(\theta - q)$, on aura,

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{2}{3}\,\pi\,.\,\alpha\,.\,\text{ſin.}\,\theta\,.\,\varphi^{\text{I}}\,.\,(\text{cof.}\,\theta)$$

$$- \iint \alpha\,\partial p\,\partial q\,.\,\text{ſin.}\,p\,.\,[\text{ſin.}\,\theta\,.\,\text{cof.}\,p^2 + \text{ſin.}\,p^2\,.\,\text{ſin.}\,(\theta - 2q)]$$

$$\varphi^{\text{I}}\,.\,[\text{cof.}\,\theta + \text{ſin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,(\theta - 2q) - \text{ſin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,\theta]\,;$$

or on a, comme on vient de le voir, $\iint 2\,\partial q\,.\,\text{ſin.}\,p^2\,.\,\text{ſin.}\,(\theta - 2q)$ $\varphi^{\text{I}}\,.\,[\,\text{cof.}\,\theta + \text{ſin.}\,p^2\,.\,\text{cof.}\,(\theta - 2q) - \text{ſin.}\,p^2\,\text{cof.}\,\theta] = 0$; partant,

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{2}{3}\,\alpha\,\pi\,.\,\text{ſin.}\,\theta\,.\,\varphi^{\text{I}}(\text{cof.}\,\theta) - \frac{\alpha B}{2};\ (V).$$

I V.

Pour qu'un ſphéroïde homogène ſoit en équilibre, il ſuffit que la direction de la peſanteur ſoit perpendiculaire à ſa ſurface; cette propoſition ſe trouve démontrée dans différens endroits *(voyez ſur-tout l'excellent Ouvrage de M. Clairaut ſur la figure de la Terre)*. Or il faut pour cela que la force dont le point M eſt animé, ſuivant la tangente MV, ſoit nulle; cela poſé, la force αB, dirigée ſuivant MO, donne, en négligeant les quantités de l'ordre α^2, une force égale à αB, ſuivant MV, parce que le ſphéroïde différant infiniment peu de la ſphère, l'angle OMV, eſt de l'ordre α. De plus, en faiſant toujours $MC = h$, on a $\text{cof.}\,VMC = \frac{\partial h}{h\,\partial \theta} = -\alpha.\text{ſin.}\,\theta.\varphi'(\text{cof.}\,\theta)$, en ſubſtituant au lieu de h, $1 + \alpha\,\varphi\,(\text{cof.}\,\theta)$, & négligeant les quantités de l'ordre α^2; or la force A dirigée ſuivant MC, donne ſuivant MV, une force égale à $A\,.\,\text{cof.}\,VMC$; l'action entière du ſphéroïde produira donc ſuivant MV, une force égale à $\alpha B - \alpha A\,.\,\text{ſin.}\,\theta\,.\,\varphi'\,(\text{cof.}\,\theta)$; donc en ſubſtituant au lieu de A, ſa valeur trouvée dans l'*article précédent*, & négligeant les quantités de l'ordre α^2, on aura $\alpha B - \frac{4}{3}\,\pi\,\alpha\,\text{ſin.}\,\theta.\,\varphi^{\text{I}}\,(\text{cof.}\,\theta)$, pour cette force.

Soit maintenant αf, la force centrifuge à l'équateur du sphéroïde, c'est-à-dire, lorsque $\theta = 90$ degrés, cette force au point M, sera $\alpha f. \sin. \theta$, & elle donnera, suivant la tangente MV, une force égale à $- \alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta$, je lui donne le signe $-$, parce qu'elle agit de M vers V'; donc la force dont le point M est animé suivant la tangente MV, est, $\alpha B - \frac{4}{3} \pi \alpha. \sin. \theta. \varphi' (\cos. \theta) - \alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta$, & comme elle doit être nulle dans le cas de l'équilibre, on aura pour déterminer la figure du sphéroïde homogène en équilibre, l'équation

$$B - \frac{4}{3} \pi. \sin. \theta. \varphi'. (\cos. \theta) = f. \sin. \theta. \cos. \theta; \; (Z)$$

& l'on connoîtra par son moyen la loi de la variation des degrés de l'Équateur aux Pôles.

V.

Pour avoir la loi de la pesanteur, j'observe que la force centrifuge au point M donne suivant MC, une force égale à $- \alpha f. \sin. \theta^2$; ainsi la force totale dont le point M est animé suivant MC est $A - \alpha f. \sin. \theta^2$; mais la pesanteur à ce point est la résultante de la force suivant MC, & de la force suivant MO perpendiculaire à MC; or, cette dernière force étant de l'ordre α, il est clair que la résultante ne différera de la force suivant MC, que d'une quantité de l'ordre α^2; on peut donc prendre pour la pesanteur, la force suivant MC; ainsi nommant P la pesanteur au point M, on aura $P = A - \alpha f. \sin. \theta^2$; donc $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta} - 2 \alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta$, & substituant au lieu de $\frac{\partial A}{\partial \theta}$, sa valeur que donne l'équation (V), de l'*article III*; on aura,

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{2}{3} \alpha \pi. \sin. \theta. \varphi' (\cos. \theta) - \frac{\alpha B}{2} - 2 \alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta;$$

si l'on substitue, au lieu de $\frac{B}{2}$, sa valeur que donne l'équation (Z) de l'équilibre, trouvée dans l'*article précédent*, on aura $\partial P = - \frac{5}{2} \alpha f. \partial \theta. \sin. \theta. \cos. \theta$; donc en intégrant,

$P = C + \frac{5}{4} \alpha f . \text{cof.} \theta^2$; ſoit P' la peſanteur à l'Équateur, c'eſt-à-dire, lorſque $\text{cof.} \theta = 0$, & αm, le rapport de la force centrifuge à la peſanteur à l'Équateur, on aura $\alpha f = \alpha m P'$, & $P' = C$; donc $P = P' (1 + \frac{5}{4} \alpha m . \text{cof.} \theta^2)$; cette équation donne la loi de la variation de la peſanteur de l'Équateur aux Pôles, & il en réſulte que cette variation eſt proportionnelle au carré du ſinus de la latitude.

VI.

Reprenons maintenant l'équation (Z) de l'*article IV*, en y ſubſtituant au lieu de B, ſa valeur

$$\iint 2 \partial p . \partial q . \text{fin.} p . \text{cof.} p^2 . \text{fin.} \theta . \varphi' . [\text{cof.} \theta - \text{fin.} p^2 \text{cof.} \theta + \text{fin.} p^2 \text{cof.} (\theta - 2q)],$$

trouvée dans l'*article III*, on aura

$$\iint 2 \partial p . \partial q . \text{fin.} p . \text{cof.} p^2 . \varphi' . [\text{cof.} \theta - \text{fin.} p^2 . \text{cof.} \theta + \text{fin.} p^2 . \text{cof.} (\theta - 2q)] - \tfrac{4}{3} \pi . \varphi' (\text{cof.} \theta) = f . \text{cof} \theta ;$$

ſoit $\text{cof.} \theta = x$, & $\varphi (\text{cof.} \theta) = y$, on aura $\varphi' (\text{cof.} \theta) = \frac{\partial y}{\partial x}$; de plus, on a par la théorie des ſuites, $\varphi' [\text{cof.} \theta - \text{fin.} p^2 . \text{cof.} \theta + \text{fin.} p^2 . \text{cof.} (\theta - 2q)]$

$$= \frac{\partial y}{\partial x} - \text{fin.} p^2 . [\text{cof.} \theta - \text{cof.} (\theta - 2q)] . \frac{\partial \partial y}{\partial x^2},$$
$$+ \text{fin.} p^4 . [\text{cof.} \theta - \text{cof.} (\theta - 2q)]^2 . \frac{\partial^3 . y}{1.2. \partial x^3},$$
$$- \text{fin.} p^6 . [\text{cof.} \theta - \text{cof.} (\theta - 2q)]^3 . \frac{\partial^4 . y}{1.2.3. \partial x^4}.$$
$$+ \text{\&c.}$$

L'équation précédente deviendra donc, en obſervant que $\iint 2 \partial p . \partial q . \text{fin.} p . \text{cof.} p^2 = \frac{4}{3} \pi$,

$$-\tfrac{1}{2} f x = \iint \partial p . \partial q . \text{fin.} p^3 . \text{cof.} p^2 . \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} [\text{cof.} \theta - \text{cof.} (\theta - 2q)] \\ - \frac{\partial^3 y}{1.2. \partial x^3} . \text{fin.} p^2 . [\text{cof.} \theta - \text{cof.} (\theta - 2q)]^2 \\ + \text{\&c.} \end{array} \right\} (C);$$

or on a 1.° $[\text{cof.} \theta - \text{cof.} (\theta - 2q)]^r = \text{cof} \theta^r - r . \text{cof.} \theta^{r-1} . \text{cof.} (\theta - 2q) + \frac{r.(r-1)}{1.2} . \text{cof.} \theta^{r-2} \text{cof.} (\theta - 2q)^2 - \text{\&c.}$

2.° Si l'on fait, $\text{cof.}\,(\theta - 2q)^i = A + B.\text{cof.}\,(\theta - 2q) + C.\text{cof.}\,2\,(\theta - 2q) + \text{\&c.}$ on a, comme l'on fait, $A = 0$, lorſque i eſt impair, & $A = \frac{1.3.5....(i-1)}{2.4.6...i}$, lorſque i eſt pair; 3.° en intégrant depuis $q = 0$, juſque $q = 180$ degrés, on a $\int \partial q.\text{cof.}\,m\,(\theta - 2q) = 0$, m étant un nombre entier quelconque; de-là il eſt aiſé de conclure,

$$\int \partial q.[\text{cof.}\,\theta - \text{cof.}\,(\theta - 2q)]^r = \pi.\left\{\begin{array}{l} x^r + \frac{r.(r-1)}{2^2}.x^{r-2} + \frac{r.(r-1).(r-2).(r-3)}{2^2.4^2}.x^{r-4} \\ + \frac{r.(r-1).(r-2).(r-3).(r-4).(r-5)}{2^2.4^2.6^2}.x^{r-6} + \text{\&c.} \end{array}\right.$$

l'équation (C) deviendra donc

$$-\frac{J_x}{2\pi} = \int \partial p.\text{fin.}\,p.\text{cof.}\,p^2.\left\{\begin{array}{l} \text{fin.}\,p^2.\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}.x \\ - \text{fin.}\,p^4.\frac{\partial^3 y}{1.2.\partial x^3}.(x^2 + \frac{1}{2}) \\ + \text{fin.}\,p^6.\frac{\partial^4 y}{1.2.3.\partial x^4}.(x^3 + \frac{3}{2}x) \\ - \text{\&c.} \\ \pm \text{fin.}\,p^{2n-2}.\frac{\partial^n y}{1.2.3...(n-1).\partial x^n}.[x^{n-1} \\ + \frac{(n-1).(n-2)}{2^2}.x^{n-3} + \frac{(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{2^2.4^2}. \\ x^{n-5} + \text{\&c.}] \\ \mp \text{\&c.} \end{array}\right\} (D).$$

le ſigne + ayant lieu ſi n eſt pair, & le ſigne — s'il eſt impair.

Mais on a

$$\int \partial p.\text{fin.}\,p^{2n-1}.\text{cof.}\,p^2 = \frac{1}{2n}.\text{fin.}\,p^{2n}.\text{cof.}\,p + \frac{1}{2n}\int \partial p.\text{fin.}\,p^{2n+1};$$

& en intégrant depuis $p = 0$, juſqu'à $p = 180^d$, on a

$$\int \partial p.\text{fin.}\,p^{2n-1}.\text{cof.}\,p^2 = \frac{1}{2u}.\int \partial p.\text{fin.}\,p^{2n+1};$$

de plus,

$$\int \partial p.\text{fin.}\,p^{2n\pm 1} = \frac{2.(2.4.6....2n)}{1.3.5........(2n+1)};$$

donc

$$\int \partial p \,.\, \text{fin.}\, p^{2n-1} \,.\, \text{cof.}\, p^2 = \frac{2^n.[1.2.3 \ldots\ldots (n-1)]}{1.3.5 \ldots .(2n+1)},$$

l'équation *(D)* deviendra donc

$$-\frac{fx}{2\pi} = \frac{2^2}{3.5} \,.\, \frac{\partial^2.y}{\partial x^2} \,.\, x - \frac{2^3}{3.5.7} \,.\, \frac{\partial^3.y}{\partial x^3} \,.\, (x^2 + \tfrac{1}{2}) + \&c.$$

$$\left.\begin{array}{l} \pm 2^n . \dfrac{\partial^n . y}{1.3.5 \ldots (2n+1).\partial x^n} . \\ \mp \&c. \end{array}\right\{ \begin{array}{l} x^{n-1} + \dfrac{(n-1).(n-2)}{2^2} . \\ x^{n-3} + \dfrac{(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{2^2.4^2} . x^{n-5} \\ + \dfrac{(n-1).(n-2).(n-3).n-4).n-5).(n-6)}{2^2.4^2.6^2} . x^{n-7} + \&c. \end{array} \right\} (E).$$

Telle eſt l'équation infinie qu'il faut réſoudre pour avoir la valeur de y.

VII.

Il eſt évident que l'équation $\partial^3.y = 0$, en eſt une intégrale particulière, ce qui donne une ellipſe pour la courbe du Méridien; on aura dans ce cas, $y = cx^2 + bx + a$; l'équation *(E)* donne, en y ſubſtituant au lieu de y cette valeur, $c = -\frac{15}{16} \,.\, \frac{f}{\pi}$; de plus, il eſt viſible à l'inſpection de la figure, que y eſt zéro, lorſque $x = 1$, & lorſque $x = -1$, ce qui donne $c + b + a = 0$, & $c - b + a = 0$, d'où l'on tire $b = 0$, & $a = -c$; partant,

$$y = \frac{15}{16} \,.\, \frac{f}{\pi} \,.\, (1 - xx) = \frac{15}{16} \,.\, \frac{f}{\pi} \,.\, \text{fin.}\, \theta^2;$$

donc le rayon *CM* du ſphéroïde eſt égal à

$$1 + \alpha \,.\, \frac{15}{16} \,.\, \frac{f}{\pi} \,.\, \text{fin.}\, \theta^2.$$

Je ſuppoſe qu'à l'Équateur, la force centrifuge ſoit à la peſanteur comme $\alpha m : 1$, on pourra, en regardant le ſphéroïde comme une ſphère, ſuppoſer la peſanteur égale à la maſſe diviſée par le carré du rayon *CA*, ce qui donne $\frac{4}{3}\pi$, pour l'expreſſion de cette force; on a donc $\alpha f = \alpha m \,.\, \frac{4}{3}\pi$;

partant, $CM = 1 + \frac{5}{4}\alpha m . \text{fin.} \theta^2$. Il ſuit de-là que le rayon de l'Équateur eſt égal à $1 + \frac{5}{4}\alpha m$, & par conſéquent que l'aplatiſſement de la maſſe eſt égal à $\frac{5}{4}\alpha m$, ce que l'on ſait d'ailleurs.

VIII.

Je ſuppoſe dans l'équation *(E)* de l'*art. VI*,

$$\frac{\partial^2 . y}{\partial x^2} = 2c + \frac{\partial^2 . z}{\partial x^2},$$

elle donnera

$$-\frac{f}{2\pi} . x = \frac{2^3}{3.5} . cx + \frac{2^2}{3.5} . \frac{\partial^2 . z}{\partial x^2} x - \frac{2^3}{3.5.7} . \frac{\partial^3 . z}{\partial x^3} . (x^2 + \tfrac{1}{2}) + \&c.$$

en faiſant $c = -\frac{15}{16} . \frac{f}{\pi}$, on aura

$$0 = \frac{2^2}{3.5} . \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . x - \frac{2^3}{3.5.7} . \frac{\partial^3 . z}{\partial x^3} . (x^2 + \tfrac{1}{2}) + \&c.$$

Soit $z = \varphi(x)$, l'intégrale de cette équation; on aura

$$y = \varphi(x) + cx^2 + bx + a;$$

la ſuppoſition de $f = 0$, donne $y = z = \varphi(x)$; on voit ainſi que le mouvement de rotation du corps ne fait qu'ajouter à la valeur de y, la quantité $cx^2 + bx + a$; ainſi, toutes les figures de révolution dans leſquelles l'équilibre a lieu lorſque la maſſe eſt immobile, ont également lieu lorſqu'elle tourne autour de ſon axe de révolution, pourvu qu'on ajoute à l'expreſſion de y, $cx^2 + bx + a$; mais lorſque $f = 0$, exiſte-t-il d'autre cas d'équilibre que la figure ſphérique ? Il paroît difficile de prononcer ſur cet objet; voici cependant un théorème fort général qui exclut un grand nombre de figures.

THÉORÈME.

L'expreſſion de y ne peut avoir cette forme,

$$y = \frac{a . x^{\mu} + a' . x^{\mu'} + a'' . x^{\mu''} + \&c.}{b . x^{r} + b' . x^{r'} + b'' . x^{r''} + \&c.},$$

μ, μ', μ'', &c. r, r', r'', &c. étant des nombres quelconques réels.

DÉMONSTRATION.

Je ſuppoſe d'abord que le dénominateur de cette expreſſion ſe réduiſe à l'unité, & que l'on ait

$$y = a.x^{\mu} + a^{\prime}.x^{\mu^{\prime}} + a^{\prime\prime}.x^{\mu^{\prime\prime}} + \&c.$$

ſoit μ le plus grand des expoſans μ, $\mu^{\prime}$, $\mu^{\prime\prime}$, &c. en ſubſtituant dans l'équation *(D)* de l'*art. VI*, au lieu de y, l'expreſſion précédente, & ſuppoſant $f = 0$, le terme ax^{μ}, en donnera un de cette forme,

$$\mu.ax^{\mu-1}.\int\partial p.\text{ſin.}p.\text{coſ.}p^2.\left[(\mu-1).\text{ſin.}p^2 - \frac{(\mu-1).(\mu-2)}{1.2}.\text{ſin.}p^4 + \frac{(\mu-1).(\mu-2).(\mu-3)}{1.2.3}.\text{ſin.}p^6 - \&c.\right],$$

& comme ce terme eſt le plus élevé par rapport à x, il doit être ſéparément égal à zéro, ce qui donne

$$0 = \mu\int\partial p.\text{ſin.}p.\text{coſ.}p^2.\left[(\mu-1).\text{ſin.}p^2 - \frac{(\mu-1).(\mu-2)}{1.2}\text{ſin.}p^4 + \&c.\right];$$

or on a

$$(\mu-1).\text{ſin.}p^2 - \frac{(\mu-1).(\mu-2)}{1.2}.\text{ſin.}p^4 + \&c.$$

$$= 1 - (1 - \text{ſin.}p^2)^{\mu-1} = 1 - \text{coſ.}p^{2\mu-2};$$

donc

$$0 = \mu.\int\partial p.\text{ſin.}p.\text{coſ.}p^2 - \mu\int\partial p.\text{ſin.}p.\text{coſ.}p^{2\mu},$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$0 = \mu.\left[C + \frac{1}{2\mu+1}.\text{coſ.}p^{2\mu+1} - \frac{1}{3}.\text{coſ.}p^3\right].$$

Il faut déterminer la conſtante arbitraire C, de manière que l'intégrale ſoit nulle, lorſque $\text{coſ.}p = 1$, & faire enſuite $\text{coſ.}p = -1$; l'équation précédente devient ainſi,

$$0 = \mu\left[\tfrac{2}{3}(2\mu+1) - 1 + (-1)^{2\mu+1}\right] \ (T);$$

l'équation *(T)* donne d'abord $\mu = 0$; il peut enſuite arriver trois cas.

1.° La valeur de μ peut être telle que l'on ait $(-1)^{2\mu+1} = 1$;

l'équation *(T)* donne alors $\mu = -\frac{1}{2}$; mais cette valeur de μ doit être rejetée, parce que le terme ax^{μ}, deviendroit imaginaire, lorſque x ſeroit négatif, & que d'ailleurs μ étant le plus grand des expoſans μ, μ', &c. la valeur de y ſeroit infinie lorſque x ſeroit nul.

2.° La valeur de μ peut être telle que l'on ait $(-1)^{2\mu+1} = -1$, l'équation *(T)* donne dans ce cas, $\mu = 1$.

3.° Enfin, on peut ſuppoſer que $(-1)^{2\mu+1}$ eſt imaginaire; mais alors l'équation *(T)* donneroit pour μ une valeur imaginaire, ce qui eſt contre l'hypothèſe dont nous ſommes partis.

Il ſuit de-là que l'expreſſion de y ne peut avoir que cette forme,

$$y = ax + a' + a''.x^{\mu''} + a'''.x^{\mu'''} + \&c.$$

μ'', μ''', &c. étant moindres que l'unité, & différens de zéro; or, en ſubſtituant cette valeur dans l'équation *(E)* de l'*article VI*, & ſuppoſant $f = 0$, il eſt viſible que ſi l'expreſſion précédente de y y ſatisfait, celle-ci,

$$y = a''.x^{\mu''} + a'''.x^{\mu'''} + \&c.$$

y ſatisfera pareillement, puiſque l'équation *(E)* ne renferme point y, ni ſa première différence; or, il faut pour cela, comme on vient de le voir, que le plus grand des expoſans μ'', μ'''; &c. ſoit zéro, ou l'unité, ce qui n'eſt pas; donc, ſi l'équation $y = ax^{\mu} + a'.x^{\mu'} + \&c.$ eſt poſſible, elle ne peut avoir que cette forme, $y = ax + a'$; maintenant on a $y = 0$, lorſque $x = 1$, & lorſque $x = -1$, d'où l'on tire $a = 0$, & $a' = 0$; partant $y = 0$, ce qui montre que le ſphéroïde eſt une ſphère.

Je dois obſerver ici que M. d'Alembert a déjà fait la même remarque pour le c: où les expoſans μ, μ', &c. ſont des nombres entiers poſitifs *(voyez le tom: V des Opuſcules de ce grand Géomètre)*.

Suppoſons

Supposons présentement que l'expression de y ait un dénominateur, & que l'on ait

$$y = \frac{a.x^{\mu} + a'.x^{\mu'} + a''.x^{\mu''} + \&c.}{bx^{r} + b'.x^{r'} + b''.x^{r''} + \&c.};$$

soit μ le plus grand des exposans μ, μ', &c. & r le plus grand des exposans r, r', r'', &c. on aura, en divisant le numérateur & le dénominateur de l'expression de y, par x^{r},

$$y = \frac{ax^{\mu - r} + a'.x^{\mu' - r} + \&c.}{b + b'.x^{r' - r} + \&c.}.$$

En réduisant le dénominateur en série, on aura pour y une suite infinie de cette forme,

$$\frac{a}{b}x^{\mu - r} + hx^{l} + h'.x^{l'} + \&c.$$

les exposans $\mu - r$, l, l', &c. allant toujours en décroissant; or, si l'on substitue, au lieu de y, cette valeur dans l'équation *(E)* de l'*art. VI.*, en supposant $f = 0$, on prouvera comme ci-dessus, que $\mu - r$ doit être égal à zéro ou à l'unité ou à $-\frac{1}{2}$. Si $\mu - r = -\frac{1}{2}$, on aura $r = \mu + \frac{1}{2}$; donc

$$y = \frac{ax^{\mu} + a'.x^{\mu'} + \&c.}{bx^{\mu + \frac{1}{2}} + b'.x^{r'} + \&c.};$$

or, en faisant x négatif, x^{μ} est réel ou imaginaire; dans le premier cas, le dénominateur de l'expression de y, & dans le second cas, son numérateur devient imaginaire; on doit donc rejeter l'équation $\mu - r = -\frac{1}{2}$.

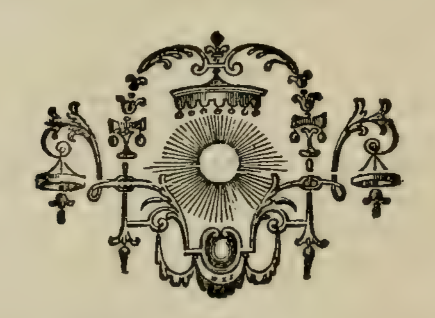
Si $\mu - r$ est égal à zéro, on a l'unité, en divisant le numérateur de l'expression de y par son dénominateur, on pourra la mettre sous cette forme,

$$y = hx + h' + \frac{ex^{i} + e'.x^{i'} + \&c.}{bx^{r} + b'.x^{r'} + \&c.},$$

i ne surpassant r ni de zéro, ni de l'unité, & puisque cette valeur de y satisfait à l'équation *(E)*, en supposant $f = 0$,

celle-ci, $y = \frac{cx^i + c^1.x^{i^1} + \&c.}{bx^r + b^1.x^{r^1} + \&c.}$, y ſatisfera pareillement; or, pour cela il faut, par ce qui précède, que i ſurpaſſe r de zéro ou de l'unité, ce qui n'eſt pas; donc, généralement, l'expreſſion $y = \frac{ax^\mu + a^1.x^{\mu^1} + \&c.}{bx^r + b^1.x^{r^1} + \&c.}$, ſe réduit à celle-ci, $y = ax + a^1$; d'où l'on tire $y = 0$, & par conſéquent, que le ſphéroïde eſt une ſphère.

Quoiqu'en vertu de ce théorème, un grand nombre de figures ſe trouvent exclues du cas de l'équilibre, il n'eſt cependant pas démontré que la figure elliptique ſoit la ſeule poſſible; mais il eſt très-remarquable qu'indépendamment de cela, nous ſoyons parvenus à déterminer généralement la loi de la peſanteur, & que cette loi ſoit la même ſur tous les ſphéroïdes de révolution, pourvu que leur figure convienne à l'équilibre.



MÉMOIRE
SUR
L'USAGE DE L'ESPRIT-DE-VIN
DANS
L'ANALYSE DES EAUX MINÉRALES.

Par M. LAVOISIER.

LA partie de la Chimie qui porte le nom de *Halotechnie*, celle qui traite des Sels, eſt une des dernières qui ſemble avoir fixé l'attention des anciens Chimiſtes; l'analyſe des Eaux minérales, qui appartient eſſentiellement à cette partie, s'eſt reſſentie de ce retard; à peine y a-t-il cinquante ans que les Chimiſtes commencent à acquérir des idées nettes ſur les différentes ſubſtances qui entrent dans leur compoſition, encore eſt-ce de nos jours que ces progrès ont été les plus rapides.

Ceux qui ſe ſont occupés particulièrement de cet objet, ſavent qu'il reſte encore beaucoup à faire, & les différences énormes qui ſe trouvent dans les analyſes d'une même eau, faites par différens Chimiſtes, prouvent combien cet Art peut encore prêter à l'arbitraire, ou au moins combien eſt grande l'extenſion des erreurs qu'on peut commettre : j'avoue que c'eſt quelquefois plutôt à l'Artiſte qu'à l'Art qu'il faut imputer ce défaut de ſuccès; mais il n'en eſt pas moins vrai qu'en ſimplifiant l'Art, on le mettra à portée d'un plus grand nombre d'Artiſtes.

La difficulté de l'analyſe des Eaux minérales, conſiſte principalement à ſéparer les différentes ſubſtances qui s'y rencontrent, à purifier les ſels qui ſouvent ſont imprégnés d'eau-mère, de matières extractives, ou de parties bitumineuſes.

C'eſt pour faire cette ſéparation dans la plus ſcrupuleuſe exactitude que je propoſe aujourd'hui une méthode, non pas peut-être abſolument neuve, puiſqu'elle exiſte entre les mains des Chimiſtes, mais dont ils ne paroiſſent pas avoir ſenti tout le mérite & toute l'importance, & dont je ne ſache pas qu'il ait encore été fait aucune application ſuivie.

M. Macquer eſt le premier qui ait entrepris une ſuite d'expériences ſur la ſolubilité des ſels dans l'eſprit-de-vin, & qui ait déterminé juſqu'à quel point alloit cette ſolubilité; les connoiſſances qu'on avoit acquiſes avant lui ſur cet objet n'étoient pas très-étendues; elles ſe trouvoient d'ailleurs éparſes dans un grand nombre d'Auteurs. Le travail de M. Macquer les a raſſemblées, y a infiniment ajouté, & a complété en quelque façon toute cette partie de la Chimie.

Le Mémoire de M. Macquer, qui ſe trouve dans la Collection académique de Turin, eſt donc la baſe de ce que je donne aujourd'hui; c'eſt le point d'où je ſuis parti, & par d'autres expériences, j'ai reconnu qu'indépendamment des ſels qui ſe diſſolvent dans l'eſprit-de-vin le plus déflegmé, la plupart des autres devenoient également ſolubles dans ce menſtrue, en y mélangeant une certaine portion d'eau, & je me ſuis même aſſuré qu'il étoit poſſible, dans pluſieurs circonſtances, de tellement proportionner les doſes, que le mélange pût diſſoudre un ſel, ſans en attaquer un autre.

Les bornes que les circonſtances me preſcrivent *, ne me permettent pas d'expoſer ici comment j'ai été conduit à cette découverte, ni de préſenter dans tout leur détail les expériences nombreuſes que j'ai été obligé de faire pour en tirer parti.

Je me contenterai donc de dire qu'après avoir mélangé de l'eſprit-de-vin & de l'eau diſtillée dans huit proportions différentes, j'ai examiné, ſoit à chaud, ſoit à froid, quelle étoit l'action de ces mélanges ſur différentes eſpèces de ſels, & que j'ai reconnu:

---

* Ce Mémoire étoit deſtiné pour une Séance publique.

1.° Que le ſel marin & le nitre à baſe terreuſe, ſe diſſolvoient dans l'eſprit-de-vin avec beaucoup de facilité.

2.° Que le même eſprit-de-vin ſeul ne diſſolvoit ni le ſel marin, ni le ſel de Glauber, ni l'alkali de la ſoude, ni le ſel d'Epſom, ni le ſel marin à baſe de ſel d'Epſom; mais qu'il enlevoit ſeulement au ſel de Glauber ſon eau de criſtalliſation, & le réduiſoit en une poudre fine.

3.° Qu'un mélange de deux parties d'eſprit-de-vin & une d'eau, diſſolvoit à chaud une quantité conſidérable de ſel marin, ſans qu'il ſe fît aucune criſtalliſation par le refroidiſſement.

4.° Que le ſel de Glauber ne ſe diſſolvoit point à froid dans tout mélange, où il entroit plus d'eſprit-de-vin que d'eau; qu'il ſe diſſolvoit au contraire en quantité notable par l'ébullition, mais que la totalité criſtalliſoit par le refroidiſſement, ſur-tout ſi l'on avoit employé un mélange de deux parties d'eſprit-de-vin, contre une de ſel de Glauber.

5.° Que le ſel d'Epſom donnoit dans ſa ſolution, par un mélange d'eau & d'eſprit-de-vin, à peu-près les mêmes réſultats que le ſel de Glauber, à l'exception qu'il étoit un peu moins ſoluble; de ſorte que, par exemple, ſi ces deux ſels avoient été diſſous par un même mélange à chaud, le ſel d'Epſom criſtalliſoit ou ſe dépoſoit le premier.

Il auroit été intéreſſant, ſans doute, d'étendre ces expériences aux différentes eſpèces de ſels que nous connoiſſons, & de compléter, s'il avoit été poſſible, cette partie de la Chimie; le temps ne m'a pas encore permis d'exécuter ce travail; mais en attendant j'ai cru devoir publier les expériences qui ont un rapport plus immédiat avec l'analyſe des eaux.

Il ne ſera pas inutile, à cette occaſion, de donner ici une idée générale des ſubſtances ſalines qui ſe rencontrent dans les eaux, ou qui peuvent s'y rencontrer; le nombre de ces ſubſtances eſt moins conſidérable qu'on ne le croiroit au premier coup-d'œil; il ſe réduit à peu-près aux ſuivantes: *la terre calcaire, la ſélénite, l'alkali fixe de la ſoude, le ſel*

marin à base saline & terreuse, le sel de Glauber, le sel d'Epsom & l'alun. Je ne parlerai pas ici du fer & du cuivre, l'alkali phlogistique est un spécifique sûr pour reconnoître la présence de ces métaux, & pour en évaluer la quantité.

Toutes les analyses d'eaux minérales, données jusqu'ici, prouvent que ces substances sont à peu-près les seules qui se rencontrent dans les eaux; mais quand il seroit possible de former quelques doutes à cet égard, ils seront facilement détruits par les réflexions suivantes.

Les Chimistes & les Naturalistes conviennent la plupart qu'il n'existe que deux acides dans le règne minéral, l'acide vitriolique & l'acide marin; ils ne sont pas tous d'accord, il est vrai, sur l'origine de celui de nitre, les uns pensent qu'il appartient au règne végétal, les autres qu'il est le produit de la putréfaction des matières, soit animales, soit végétales; mais tous conviennent au moins qu'il est étranger au règne minéral, & qu'il ne s'y trouve que par accident.

Je sais qu'un Auteur moderne a cru devoir introduire un nouvel acide dans le règne minéral, sous le nom d'*acide phosphorique;* mais quelqu'ingénieuse que soit la théorie qu'il adopte, comme elle ne paroît pas encore suffisamment appuyée par l'expérience, je crois qu'on peut généralement réduire à deux le nombre des acides vraiment minéraux. D'ailleurs, quand il en existeroit d'autres, il est probable qu'ils forment des sels absolument insolubles, & que c'est par cette raison qu'on ne les trouve pas dans les eaux. On peut donc regarder comme constant, d'après l'expérience & d'après la théorie, qu'il ne peut se trouver dans les eaux minérales que des sels vitrioliques ou marins; or, il est aisé de faire voir que le nombre des sels de cette classe qui peuvent être chariés par les eaux n'est pas très-considérable.

Premièrement, la plupart des demi-métaux ne sont point susceptibles de dissolution dans l'acide vitriolique, ils exigent du moins un acide vitriolique concentré & bouillant: or, ces deux circonstances réunies, ne se rencontrent jamais dans la Nature, puisque même l'acide vitriolique ne s'y trouve que

très-rarement à nu. On ne doit donc pas s'attendre à trouver dans les eaux, ni mercure, ni antimoine, ni cobalt, ni bismuth dissous par l'acide vitriolique, il en est à-peu-près de même des métaux, sur-tout des métaux blancs, auxquels les Chimistes ont coutume de donner le nom de *métaux lunaires;* ils sont de même indissolubles dans l'acide vitriolique, à moins qu'il ne soit bouillant & concentré. On ne doit donc pas s'étonner, s'il ne se trouve dans la Nature, & particulièrement dans les eaux, ni vitriol d'or, ni d'argent, ni de plomb, ni d'étain; le fer & le cuivre sont les seuls que l'acide vitriolique puisse dissoudre aisément, & c'est ce qui fait que ces deux métaux, sur-tout le premier, se trouvent si communément dans les eaux. On a indiqué plus haut les moyens de reconnoître la présence de ces métaux, & d'en évaluer la quantité. Tout ce qu'on vient de dire des dissolutions métalliques par l'acide vitriolique, peut également s'appliquer à celles par l'acide marin; toutes ces dissolutions, à l'exception de celles du fer & du cuivre, se font avec beaucoup de difficulté, elles exigent même la plupart des manœuvres particulières que la Nature ne peut employer; tous les sels de cette section doivent donc être mis au nombre de ceux qui ne peuvent se rencontrer dans les eaux.

On ne connoît jusqu'à présent que trois alkalis dans le règne minéral, celui de la soude, l'alkali terreux, ou la terre calcaire, & la base du sel d'Epsom; je ne parle pas de la base de l'alun parce que sa nature n'est pas encore suffisamment déterminée, & qu'on ne voit pas d'ailleurs qu'elle se trouve bien communément dans les eaux. Ces trois alkalis combinés avec les deux acides proprement appelés *minéraux,* ne peuvent former que six espèces de sel, la sélénite, le sel de Glauber, le sel d'Epsom, le sel marin, le sel marin à base terreuse, le sel marin à base de sel d'Epsom: ces six sels sont ceux qui se trouvent communément dans les eaux, & c'est pour cette raison, comme je l'ai déjà dit, que j'ai examiné de préférence l'action que l'esprit-de-vin pouvoit avoir sur eux.

L'eau de mer eſt le réſultat du lavage de toute la ſurface du globe; ce ſont en quelque façon les rinçures du grand laboratoire de la Nature, on doit donc s'attendre à trouver réunis dans cette eau, tous les ſels qui peuvent ſe rencontrer dans le règne minéral, & c'eſt ce qui arrive en effet: comme cette eau eſt la plus compliquée de toutes celles que j'ai eu occaſion d'examiner, je l'ai choiſie pour donner un exemple de l'application de l'eſprit-de-vin à l'analyſe des eaux minérales.

J'ai pris quarante livres d'eau de mer, qui avoit été puiſée à la côte de Dieppe, à quatre lieues en mer, par un temps calme, je les ai fait évaporer lentement au bain-marie & au feu de lampe, dans une capſule de verre, que j'avois ſoin de remplir à meſure que l'eau s'évaporoit: juſqu'à plus de moitié de l'opération, il ne s'eſt montré ni terre, ni ſélénite, ni ſel; mais enfin, vers cette époque, il a commencé à ſe former une pellicule qu'il étoit aiſé de reconnoître pour de la terre calcaire & de la ſélénite; j'ai continué d'évaporer juſqu'à ce que les premiers veſtiges de ſel marin, commençaſſent à paroître; alors j'ai décanté, j'ai changé de capſule, j'ai mis ſoigneuſement à part la terre & la ſélénite, je l'ai lavée avec un peu d'eau diſtillée, pour la dépouiller de toutes parties ſalines; enfin lorſqu'elle a été bien sèche, je l'ai portée à la balance, & j'ai trouvé qu'elle peſoit 4 gros 56 grains.

Je placerai ici une obſervation qui m'a conduit à ſéparer d'une façon mécanique, la terre calcaire d'avec la ſélénite. La première ſe dépoſe ſous forme pulvérulente, tandis qu'au contraire la ſélénite criſtalliſe en petites aiguilles à ſix pans, preſque imperceptibles, qui ſe réuniſſent & ſe confondent, il arrive de cette différence de configuration, que ſi l'on lave avec de l'eſprit-de-vin, un mélange de terre & de ſélénite, qu'on agite un peu rapidement la liqueur, & qu'après l'avoir laiſſé repoſer pendant quelques minutes, on la décante encore trouble, toute la ſélénite reſte dans le fond du vaſe, tandis que la terre plus diviſée reſte nageante dans l'eſprit-de-vin, & ne ſe dépoſe que dans un intervalle de temps beaucoup plus

plus long; cette première séparation ne doit pas être regardée comme scrupuleusement exacte, & il reste presque toujours une portion de sélénite mêlée avec la terre; mais il est aisé de la séparer par une seconde opération, ainsi qu'on le verra dans un moment.

Lorsque la terre calcaire & la sélénite ont été séparées, ainsi que je viens de l'exposer, j'ai continué d'évaporer; d'abord j'ai obtenu de beaux cristaux de sel marin, mais sur la fin de l'opération, la cristallisation est devenue confuse, & les sels se sont trouvés imprégnés d'une eau-mère épaisse & visqueuse, & ce n'est qu'avec peine que j'ai pu évaporer jusqu'à siccité; j'y suis cependant parvenu, & le résidu que j'ai obtenu, s'est trouvé peser un peu plus de douze onces; j'ai pris toute cette masse saline & je l'ai mise dans un matras, j'ai passé dessus de bon esprit-de-vin froid; ce menstrue a acquis une couleur jaunâtre assez marquée, il a dissout toute la substance visqueuse, & il n'est resté qu'une masse saline d'une très-grande blancheur: j'ai reconnu depuis que cet esprit-de-vin n'avoit attaqué que l'eau-mère du sel marin, autrement dit le sel marin à base terreuse.

La masse saline resséchée ensuite de nouveau, ne pesoit plus que dix onces deux gros.

Cette première séparation faite, j'ai pris un mélange de deux parties d'esprit de-vin & d'une d'eau, je l'ai versé sur la substance saline, & j'ai fait chauffer fortement, presque tout s'est dissout, mais ayant laissé refroidir, il s'est précipité une poudre blanche, qui n'étoit autre chose que du sel de Glauber & du sel d'Epsom: cette poudre pesoit quatre gros vingt-six grains.

Il s'agissoit de savoir si la séparation des sels, ainsi faite, étoit rigoureusement exacte, & s'il n'en restoit pas encore quelques-uns de mélangés les uns avec les autres; pour cet effet, j'ai examiné d'abord la sélénite que j'avois séparée mécaniquement de la terre, & je l'ai trouvée absolument pure, sans mélange & parfaitement analogue à la pierre à plâtre & à toutes les autres sélénites qui se rencontrent dans

la Nature ; quant à la portion pulvérulente que j'avois obtenue par décantation, j'y ai versé de l'esprit-de-vin, rendu acidule par le moyen d'une petite portion d'acide nitreux légèrement fumant ; cette liqueur a formé un nitre à base terreuse ordinaire, qui s'est dissout dans l'esprit-de-vin surnageant, & il m'est resté en outre quelques portions de matière insoluble que j'ai reconnue pour être encore de la sélénite.

Il est aisé de voir que l'usage de l'esprit-de-vin dans cette opération, est préférable à celui de l'eau distillée. On sait, en effet, que la sélénite est soluble dans l'eau, sur-tout dans l'eau acidule, tandis qu'elle ne l'est point dans l'esprit-de-vin déflegmé.

J'ai ensuite remis en évaporation, à un feu très-lent, toute la portion que j'avois mise en dissolution par un mélange de deux parties d'eau & d'une d'esprit-de-vin. On a vu plus haut que cette dissolution ne devoit contenir que du sel marin ; cependant, comme j'avois observé qu'en versant sur cette solution quelques gouttes d'alkali fixe en *deliquium*, il se faisoit un précipité terreux blanc ; j'ai cru devoir rechercher la cause de cet effet, & m'assurer s'il tenoit à l'essence même du sel marin, ou à un sel à base terreuse mélangé avec lui. Cet examen me paroissoit d'autant plus intéressant, qu'il pouvoit jeter quelque lumière sur une question qui a divisé deux Savans célèbres, M. du Hamel & M. Pott. En conséquence, j'ai séparé en douze fractions le sel qui s'est formé par la cristallisation, je les ai mises chacune à part dans des flacons différens, & j'ai remarqué que les premières portions qui avoient été cristallisées étoient d'une salure agréable, mais qu'à mesure que l'évaporation s'avançoit, le sel devenoit de plus en plus âcre & amer ; à la fin j'ai obtenu un sel qui ne cristallisoit plus en cubes, mais d'une façon assez irrégulière ; il pesoit une once juste. J'ai fait dissoudre dans douze verres une égale portion de chacune de ces fractions de sel dans de l'eau distillée ; après quoi j'ai versé dans chaque verre quelques gouttes d'alkali fixe purifié ; à peine y a-t-il eu de précipitation sensible dans le premier numéro ; mais à mesure qu'on approchoit des derniers, la précipitation devenoit plus abon-

dante; de ſorte qu'il a été démontré à mes yeux que l'amertume & l'âcreté ne venoient uniquement que d'une portion de ſel marin à baſe terreuſe, qui ſe combinoit avec les criſtaux de ſel marin. Je ferai voir dans un autre Mémoire, que cette terre n'eſt pas la terre calcaire ordinaire; auſſi ce ſel marin à baſe terreuſe, diffère-t-il eſſentiellement du ſel marin à baſe terreuſe, notamment par la propriété de criſtalliſer aiſément & d'être indiſſoluble dans l'eſprit-de-vin.

Il me reſtoit enſuite à examiner la portion pulvérulente de ſel qui s'étoit dépoſé au fond du mélange de deux parties d'eſprit-de-vin & d'une d'eau, à meſure que la liqueur s'étoit refroidie; j'ai reconnu que ce n'étoit autre choſe que du ſel de Glauber, que j'ai obtenu en très-beaux criſtaux, & un peu de ſel d'Epſom; le tout peſoit 4 gros 26 grains.

Enfin, j'ai verſé, dans un alambic de verre d'une ſeule pièce, l'eſprit-de-vin qui avoit ſervi à diſſoudre les ſels à baſe terreuſe, je l'ai bouché avec un bouchon de criſtal, & j'ai diſtillé avec un appareil de vaiſſeaux enfilés à la façon de Glauber; l'eſprit-de-vin eſt paſſé pur ſans huile ni bitume.

Il m'eſt reſté au fond de l'alambic une eau-mère, qui miſe dans une capſule, m'a donné, par la ſeule évaporation au bain-marie, de beau ſel marin à baſe terreuſe ordinaire, en criſtaux confus & bien ſecs; il peſoit *une once cinq gros dix grains.*

On trouvera, en rapprochant les réſultats rapportés ci-deſſus, que l'eau-de-mer contient:

	Pour 40 livres d'eau de mer.			*Pour chaque liv. d'eau de mer.*	
	onces	*gros*	*grains.*	*gros.*	*grains.*
1.° Terre calcaire ſoluble dans les acides, & qui paroît ne pas différer de la terre calcaire commune. 2.° Sélénite ou ſel gypſeux.		4.	56		8 1/6
Sel marin à baſe d'alkali fixe de la ſoude....	8.	6.	32	1.	54 4/5
Sel de Glauber & ſel d'Epſom.............	"	4.	26	"	7 17/20
Sel marin à baſe de ſel d'Epſom..........	1	"	"	"	14 3/4
Sel marin, à baſe terreuſe ordinaire, mêlé de ſel marin à baſe de ſel d'Epſom...........	1.	5.	10	"	23 13/23

PREMIER MÉMOIRE SUR LA DESTRUCTION DU DIAMANT PAR LE FEU.

Par M. LAVOISIER.

LA marche de l'expérience eſt ſi lente qu'un Phyſicien qui voudroit attendre pour publier le réſultat de ſes travaux qu'il en fût entièrement ſatisfait, riſqueroit d'arriver au bout de ſa carrière, ſans avoir rempli la tâche qu'il s'étoit impoſée & ſans avoir rien fait pour les Sciences & pour la Société; il faut donc avoir le courage de donner des choſes imparfaites, de renoncer au mérite d'avoir fait tout ce qu'on pouvoit faire, d'avoir dit tout ce qu'on pouvoit dire, enfin ſavoir ſacrifier ſon amour propre au deſir d'être utile & d'accélérer le progrès des Sciences.

Nous étions animés de ces principes, M.rs Macquer, Cadet & moi, lorſque nous annonçames à la Séance publique de cette Académie, du 29 Avril 1772, quelques obſervations ſingulières que nous avions faites ſur le Diamant; il en réſultoit que la deſtruction du Diamant à l'air libre, opérée par le Grand Duc de Toſcane, répétée depuis & confirmée par M.rs Darcet, Rouelle, Macquer & Roux, n'étoit pas une véritable volatiliſation, comme on l'avoit conclu; que cette ſubſtance ſingulière, garantie du contact de l'air & ſur-tout enveloppée de poudre de charbon, pouvoit ſupporter un degré de feu beaucoup plus violent que celui qui eſt néceſſaire pour l'évaporer à l'air libre, ſans rien perdre, ni de ſon poids ni de ſon poli. L'évènement a juſtifié le motif qui nous avoit mis la plume à la main, puiſque la publication de nos expériences a donné lieu à un excellent ouvrage de M.rs Rouelle & Darcet ſur le même objet; mais

en même temps nous n'avions pas lieu de présumer qu'on nous feroit un crime dans cet ouvrage de l'empressement que nous avions témoigné, qu'on nous rendroit responsables des conséquences, peut-être un peu trop étendues, que les papiers publics avoient tirées de nos expériences; enfin qu'en confirmant de la manière la plus formelle les faits que nous avions avancés, on prendroit le ton de la critique, & qu'on auroit l'air de nous réfuter, en disant les mêmes choses que nous. Ces légères contradictions au surplus, ne font qu'une bien médiocre impression sur ceux qui n'ont véritablement en vue que l'avancement de la Science & qui ne courent point après la célébrité, mais après la vérité; la critique ne ralentit point leur zèle, ils écartent les mots & ne voient que les faits, ils ne répondent pas, mais ils continuent de marcher vers le but, & ils n'admirent pas moins leurs adversaires, lors même qu'ils ont sujet de se plaindre d'eux.

Comme le Mémoire que nous lûmes à l'Académie, le 29 Avril 1772, n'étoit qu'une simple annonce, & qu'il n'a paru que dans quelques ouvrages périodiques, je vais avant de passer aux faits nouveaux dont je me propose de faire part à l'Académie, en rapporter ici la substance, & y joindre quelques détails historiques sur les expériences qui l'ont précédé ou qui l'ont suivi; on ne doit pas perdre de vue que le premier Mémoire étoit le fruit d'un travail commun entre M.rs Macquer, Cadet & moi: une partie des expériences dont je vais rendre compte aujourd'hui, ont encore été faites en société avec eux; pour leur rendre ce que je leur dois, j'avertirai dans la suite de ce Mémoire des expériences qui me sont propres, & je nommerai dans les autres, ceux qui ont bien voulu y concourir.

De tout temps les hommes ont attaché l'idée de perfection à tout ce qui étoit rare & précieux, & ils se sont persuadés que ce qui étoit cher, hors de leur portée & difficile à obtenir, devoit réunir les plus rares propriétés; de-là sans doute les prodiges attribués à la pierre philosophale & à l'or potable, de-là les merveilles & les fables des Alchimistes

ſur la Médecine univerſelle. Les pierres précieuſes ont également partagé cet enthouſiaſme, & il n'y a pas encore cent ans qu'on leur attribuoit auſſi leurs prodiges. Parmi les Médecins, les uns les adminiſtroient intérieurement dans certaines maladies & les faiſoient entrer dans les formules de leurs diſpenſaires; d'autres ſe perſuadoient qu'il ſuffiſoit de les porter en bagues, en amulettes, &c. & ils s'en promettoient des effets ſinguliers, dans l'économie animale. La plupart des Phyſiciens en devançant leur ſiècle en ont partagé plus ou moins les préjugés; Boyle lui-même, le célèbre Boyle, attribuoit comme ſes contemporains des vertus médicinales aux pierres précieuſes, & il a tenté, même dans ſon Traité de l'*Origine & des Vertus des pierres précieuſes*, de donner des raiſons phyſiques des propriétés qu'on leur ſuppoſoit. Le point d'après lequel il eſt parti & qu'il a cherché principalement à établir, c'eſt que les pierres précieuſes, les diamans même ont des émanations, une atmoſphère; mais tout ce qu'il rapporte à cet égard ne prouve autre choſe, ſinon que le diamant eſt électrique comme un grand nombre de corps de la Nature, & qu'il eſt quelquefois phoſphorique. Quoique Boyle n'ait pas publié d'expériences qui puiſſent le faire regarder comme l'auteur de la découverte de l'évaporation du diamant, qui va m'occuper dans ce Mémoire, il avance cependant, dans le Traité que je viens de citer, qu'il eſt parvenu à obtenir en un inſtant, d'un grand nombre de pierres tranſparentes des vapeurs très-âcres & très-abondantes; du reſte, il ne s'explique, ni ſur la nature des pierres précieuſes qu'il a employées, ni ſur les circonſtances de l'expérience, ni enfin ſur l'eſpèce de feu dont il s'eſt ſervi & on ignore entièrement ſi c'eſt celui des fourneaux ou celui des verres & miroirs brûlans.

C'eſt donc aux expériences du Grand Duc de Toſcane, depuis Empereur ſous le nom de *François I.er*, qu'on doit rapporter la découverte de l'évaporation du diamant: comme je n'ai point entre les mains les ouvrages originaux dans leſquels ces expériences ſont rapportées; je me contenterai

de copier littéralement ici la remarque ajoutée au Traité de l'*Origine des pierres* de M. Henckel, par le ſavant éditeur de cet ouvrage, M. le Baron d'Holbach. *Voyez la Pirytologie d'Henckel, page 413.*

« L'Empereur François Ier aujourd'hui régnant, dont
l'amour pour les Sciences & l'Hiſtoire Naturelle eſt aſſez «
connu, a fait faire ſur les diamans des expériences qu'il «
n'étoit poſſible qu'à un Souverain de tenter. Il fit mettre «
pour environ ſix mille florins de diamans & de rubis dans «
des vaiſſeaux ou des creuſets de forme conique, que l'on «
tint pendant vingt-quatre heures dans le feu le plus violent. «
Lorſqu'au bout de ce temps, on vint à ouvrir ces vaiſſeaux, «
on trouva que les rubis n'avoient éprouvé aucune altération, «
mais les diamans avoient entièrement diſparu, au point «
qu'on n'en trouva pas les moindres veſtiges. Là-deſſus on «
expoſa des rubis pendant trois fois vingt-quatre heures, au «
feu le plus violent; mais on ne put y remarquer le moindre «
changement, ſoit pour le poids, ſoit pour la couleur, ſoit «
pour le poli & les angles que le lapidaire y avoit formés. «

Le même Prince fit répéter la même expérience ſur plus «
de vingt pierres précieuſes de différentes eſpèces. De deux «
en deux heures on avoit ſoin d'en retirer une du feu, pour «
voir les changemens qu'elles éprouvoient, & ſur-tout ceux «
que ſubiſſoit le diamant; on s'aperçut qu'il perdoit d'abord «
ſon poli, qu'enſuite il ſe feuilletoit, & enfin qu'il ſe diſſipoit «
entièrement. En vingt-quatre heures de temps l'émeraude s'étoit «
fondue & attachée au creuſet. Avant de mettre ces pierres «
précieuſes au feu, on avoit eu ſoin de les peſer exactement, «
& même d'en prendre les empreintes pour s'aſſurer des chan- «
gemens qu'elles pourroient éprouver. Le rubis demeura tou- «
jours inaltérable, & toujours le diamant ſe diſſipa en entier. «
Voyez le magaſin de Hambourg, tome XVIII, p. 164 & ſuiv. «

Le Journal qui a pour titre, *Giornale de Litterati d'Italia*, «
tome VIII, art. 9, rapporte les expériences qui ont été faites «
à Florence, ſur les pierres précieuſes, par les ordres du grand «
duc de Toſcane, à l'aide d'un verre ardent de Tſchirnhauſen, «

» qui avoit deux tiers d'aune de Florence de diamètre, &
» dont le foyer étoit à deux de ces aunes & demie de distance;
» pour augmenter sa force, on y joignit encore une seconde
» lentille; par ces expériences, le diamant résista beaucoup
» moins à l'action des rayons du Soleil, que toutes les autres
» pierres précieuses. Au bout de trente secondes un diamant
» de deux denari un quart (environ vingt grains) perdit sa
» couleur, son éclat & sa transparence, devint blanchâtre comme
» une calcédoine; au bout de cinq minutes on remarqua qu'il
» se formoit des bulles à sa surface, & bientôt il se brisa en
» petits morceaux qui se répandoient çà & là, au point qu'on
» ne retrouva qu'un petit fragment triangulaire équilatéral, qui
» s'écrasa sous la lame d'un couteau, & se réduisit en poudre
» si fine, qu'on ne put l'apercevoir sans le secours du micros-
» cope. En un mot, les diamans sur lesquels on fit ces expé-
» riences ont toujours commencé par se gercer, s'éclater, & ont
» fini par disparoître entièrement: mais ces effets ont toujours
» été en proportion de la grosseur des diamans qu'on mettoit en
» expérience, parce qu'ils commençoient par diminuer de
» volume, par les petits éclats qui se détachoient de leur
» surface; on ne put remarquer dans ces diamans aucun com-
» mencement de fusion; on essaya d'y joindre du verre pour
» leur servir de fondant, mais il n'y eut aucun mélange entre
» le verre & le diamant; on essaya aussi inutilement d'y joindre
» de la cendre & du caillou pulvérisé; il ne se fit aucune
» combinaison, il en fut de même du soufre; le sel de tartre
» n'eut pas plus de succès; on y joignit tous les métaux, rien
» ne put les déterminer à entrer en fusion.

» Les rubis furent traités de la même manière, mais ils
» résistèrent beaucoup plus au feu que les diamans: lorsque ces
» pierres furent exposées au foyer du verre ardent, elles
» devinrent en peu de temps luisantes comme s'il y avoit eu
» un enduit de graisse à leur surface; ensuite, il s'y forma des
» bulles, & un rubis qui avoit été tenu pendant quarante-cinq
» minutes à ce foyer, perdit une grande partie de sa couleur;
» sa surface & ses angles s'arrondirent, & la pierre s'amollit au
point

point de prendre l'empreinte d'un cachet de jaſpe qu'on preſſa «
deſſus, on y fit auſſi des entailles avec la pointe d'un couteau ; «
mais ces pierres ne perdirent rien de leur poids, ni de leur «
forme. «

Les rubis pulvériſés ſe réunirent promptement en une «
maſſe, mais il fut aiſé de les ſéparer, ils s'étoient joints ſans «
s'être unis. «

Pour concentrer encore davantage les rayons du Soleil, «
on ajouta une troiſième lentille, & l'on expoſa les rubis en «
poudre à ce foyer; au bout de quelques ſecondes ils ſe fon- «
dirent en une maſſe opaque de couleur de chair, leur ſurface «
vue au microſcope parut rude & inégale, parce que toutes les «
parties de la poudre n'étoient point entrées également en fuſion. «

Le rubis mêlé avec du verre parut ſe fondre avec lui; mais «
on s'aperçut au bout de quelque temps qu'il s'étoit dépoſé «
au fond du verre ſans faire d'union avec lui. «

Un rubis, après avoir été expoſé au verre ardent pendant «
trente ſecondes, fut jeté dans de l'eau froide, il ne ſe briſa «
point en morceaux; mais on aperçut dans ſon intérieur «
pluſieurs fentes ou gerçures. Un autre qui avoit été tenu «
pendant ſix minutes à ce même foyer, éteint également dans «
l'eau, preſſé avec un inſtrument de fer ſe caſſa en pluſieurs «
morceaux de figure irrégulière & indéterminée, qui étoient «
de différentes grandeurs. Les rubis ainſi traités, ſur-tout ceux «
qui avoient été jetés dans l'eau, perdirent de leur dureté, & «
n'avoient plus que celle d'un criſtal; un gros rubis du poids «
de ſoixante-neuf denari trois quarts n'avoit perdu ſa dureté «
naturelle qu'à ſa ſurface, & non à ſon intérieur qui n'avoit «
point éprouvé l'action du feu. «

L'émeraude expoſée au verre ardent ſe fondit très-prompte- «
ment & forma des bulles, mais auparavant elle étoit devenue «
blanche; elle perdit de ſon poids par la fuſion, & devint «
tendre & caſſante; les différens degrés de feu la firent paſſer «
par des nuances de couleurs différentes; deux de ces pierres «
retirées du foyer où elles avoient été pendant quarante ſe- «
condes, parurent d'abord d'une couleur de cendre; lorſqu'on «

» les y laissoit plus long-temps, cette couleur se changeoit en
» un vert d'abord opaque & foncé, mais qui par la suite
» devenoit clair & luisant, comme celui de quelques turquoises:
» cette couleur se changea ensuite en un beau bleu céleste,
» clair & transparent; en les tenant pendant environ une demi-
» heure dans le foyer, le côté exposé au Soleil devint d'une
» couleur de turquoise noirâtre & obscure, l'autre côté étoit
» plus clair. L'émeraude étoit toujours plus luisante lorsqu'on
» la retiroit subitement que lorsqu'on la retiroit peu-à-peu.

» Une émeraude qui avoit été exposée peu de temps aux
» rayons du Soleil, eut à son milieu une tache noire entourée
» d'un cercle blanc. Les parties extérieures de la pierre avoient
» perdu par-là leur transparence, mais elles avoient conservé
la couleur verte qui leur étoit naturelle. » *Voyez le Magasin de Hambourg, tome XVIII, pages 167 — 180.*

Tel étoit l'état de nos connoissances, lorsque M. Darcet, dans son second Mémoire sur l'*action d'un feu violent, égal & continu sur différentes substances minérales*, après avoir passé en revue une partie des corps de la Nature, se proposa de répéter les expériences faites à Florence & à Vienne sur le diamant, par les ordres du grand Duc, depuis Empereur sous le nom de François I.er Il mit deux petits diamans très-brillans, chacun dans un creuset de porcelaine; l'un étoit parfaitement fermé, l'autre étoit percé de quelques petits trous dans son couvercle; ces deux diamans ainsi disposés ayant été exposés à l'action du feu de porcelaine se dissipèrent en entier, comme auroit fait la goutte d'eau la plus pure.

Quelque bien constaté que parût le fait de l'évaporation du diamant par le feu, l'Académie, lorsque M. Darcet lui présenta son Mémoire, desira que ces expériences fussent encore répétées; M. Darcet entreprit en conséquence de nouvelles recherches qui firent l'objet d'un troisième Mémoire lû à l'Académie le 19 Août 1770. Il fit user les bords d'un creuset de porcelaine cuite, & le fit ajuster très-exactement avec son couvercle, pour en faire en quelque façon un vaisseau fermé; il y plaça un diamant, puis il exposa ce vaisseau au fourneau de

porcelaine, & il l'y laissa pendant tout le temps de la cuite. Le creuset ayant été ouvert après l'opération, on n'y trouva pas le plus léger vestige du diamant qui y avoit été enfermé.

Non content de ces expériences, M. Darcet forma avec de la pâte de porcelaine une espèce de boîte sphérique qu'il divisa en deux hémisphères; il fit un petit creux dans le milieu, & après y avoir placé un diamant, il rapprocha les deux hémisphères & les souda avec de la barbotine, de sorte qu'il étoit impossible de s'apercevoir dans quel sens la boule avoit été ouverte. La boule ayant été exposée au feu de porcelaine en revint saine & entière; M. Darcet en ayant fait l'ouverture avec précaution, tout l'intérieur de la petite chambre occupée par le diamant, se trouva enduite d'une espèce de fumée noire; la surface du diamant lui-même étoit devenue terne, sa couleur qui étoit noirâtre avant son exposition au feu étoit en partie dissipée, il étoit devenu plus blanc, il n'avoit pas perdu sensiblement de son poids, il étoit de la même dureté, enfin retaillé, il reprit le même éclat qu'il avoit avant l'opération.

Ce même diamant remis au feu comme la première fois s'y volatilisa presque en entier; il ne resta que deux fragmens extrêmement petits, assez sensibles cependant pour qu'il ne fût pas possible de les méconnoître pour du diamant: un second diamant renfermé de la même façon, fondit & forma une espèce de vernis à l'endroit où il avoit été posé; mais M.rs Darcet & Rouelle, ont depuis soupçonné qu'ils avoient été induits en erreur, ainsi que le Lapidaire, sur la nature de cette pierre, & ils ont soupçonné que c'étoit un péridot; un quatrième diamant renfermé de même dans une boule de pâte de porcelaine s'est dissipé sans laisser la moindre trace ni la moindre fumée.

La ressource du fourneau de porcelaine ayant manqué à M. Darcet, il essaya les mêmes expériences dans un fourneau de coupelle; il plaça plusieurs diamans à découvert, sous une mousle, dans de petites capsules de porcelaine, & en cinq heures d'un feu modéré il parvint à les volatiliser entièrement.

Cette façon d'opérer eut le mérite de laiſſer voir à M. Darcet ce qui ſe paſſoit dans ces expériences; il tira à différentes repriſes les coupelles de deſſous la moufle, & il remarqua que le diamant en s'évaporant ſe feuilletoit d'une manière ſenſible.

Je ne rapporterai pas ici le détail des expériences de M. Darcet, ſur les autres pierres précieuſes, il me ſuffira de dire qu'aucune n'a la propriété ſingulière de s'évaporer comme le diamant; que ni le rubis, ni la topaze orientale ne reçoivent aucune altération par le feu de porcelaine; que l'hyacinte n'y perd qu'un peu de ſa couleur; que les topazes de Saxe & du Breſil, ainſi que l'améthiſte, y deviennent blanches, que l'émeraude y perd ſa tranſparence, que le ſaphir oriental s'y ramollit, que le péridot y coule comme le verre, que le grenat y fond & forme une eſpèce d'écaille de fer, &c.

Depuis la lecture & la publication de ce Mémoire, les mêmes expériences ont encore été répétées par de très-habiles Chimiſtes. M. Macquer, ayant mis en préſence de pluſieurs témoins, & notamment de M.rs Darcet, Bucquet, Rouelle & Godefroi, un diamant brillant ſous la moufle, au bout de vingt minutes, on vit en ouvrant le devant du fourneau qu'il étoit brillant & comme phoſphorique, mais il n'avoit encore rien perdu de ſon volume; on referma la moufle, & on ne l'ouvrit qu'au bout de vingt autres minutes; le diamant n'exiſtoit plus, il étoit entièrement évaporé, & la capſule qui étoit d'un argile très-réfractaire, n'avoit ni la moindre altération, ni la moindre tache.

Cette flamme qui environne le diamant pendant le temps de ſa deſtruction, qui a été remarquée pour la première fois dans l'expérience de M. Macquer, & qu'il a le premier communiquée au public, a été reconnue d'une manière beaucoup plus ſenſible encore dans l'expérience que fit M. Roux aux Écoles de Médecine, en préſence de M. de Sartine, ſur un diamant beaucoup plus gros.

L'évaporation du diamant reçut encore un dernier degré d'authenticité, par les nouvelles expériences que firent M.rs

Darcet & Rouelle le 16 Août 1771, en préſence de l'Aſſemblée la plus impoſante & la plus reſpectable. Ils placèrent trois diamans ſur autant de petites capſules de pâte de porcelaine, & les exposèrent ſous une moufle en les échauffant par degrés; ils avoient ménagé une ouverture pour les obſerver à chaque inſtant: d'abord les diamans & les capſules commencèrent à rougir; les uns & les autres étoient d'un rouge mat, mais bientôt après la couleur rouge des diamans devint beaucoup plus reſplendiſſante & ſe diſtinguoit très-bien de celle de la capſule. Inſenſiblement, les diamans parurent diminuer; on en laiſſa un d'entr'eux s'évaporer en entier, on retira les deux autres avant qu'ils fuſſent entièrement diſſipés, mais il ne reſtoit plus qu'une très-petite fraction du poids total.

Ces expériences n'étoient que la répétition de ce qui avoit été déjà fait, & de ce qu'avoit obſervé M. Darcet lui-même, tant au fourneau de porcelaine, que par le feu ordinaire des fourneaux chimiques; une circonſtance particulière fit répéter la même expérience ſous une nouvelle forme. M. Leblanc joaillier très-connu, perſuadé que l'évaporation du diamant tenoit à l'action de l'air, avoit fourni le même jour, & pour la même expérience, un diamant qui lui appartenoit; mais il avoit demandé qu'il fût environné d'une pâte faite avec de la poudre de charbon & de la craie, que le tout fût mis dans un petit creuſet d'Allemagne, recouvert avec une petite couche de craie détrempée; enfin, que le creuſet, & ce qu'il contenoit fuſſent deſſéchés par le moyen d'un feu très-lent: tout cet appareil préparé comme M. Leblanc l'avoit deſiré, ayant été placé ſous la même moufle que ci-deſſus, & avec les mêmes diamans, le feu fut ſoutenu pendant près de trois heures; au bout de ce temps on retira le creuſet, on le laiſſa parfaitement refroidir; après quoi l'ayant ouvert, on n'y trouva plus qu'une eſpèce de chaux blanche médiocrement ſolide, ſans pouſſière de charbon; quant au diamant, il étoit entièrement diſparu, & on ne retrouva plus que l'empreinte qu'il avoit formée dans la craie; on porta l'attention juſqu'à laver exactement cette craie, juſqu'à la

faire diſſoudre dans l'acide nitreux, ſans qu'on pût y retrouver le moindre atome du diamant.

La découverte de l'évaporation du diamant, en faiſant connoître aux Chimiſtes un fait preſque incroyable, leur laiſſoit encore une vaſte carrière à remplir; en effet, l'évaporation du diamant, ſe faiſoit-elle par une véritable réduction de cette ſubſtance en vapeurs; en un mot, pouvoit-on la regarder comme une véritable volatiliſation? ou bien étoit-ce une eſpèce de combuſtion, ſemblable à celle que l'on remarque dans le phoſphore & dans quelques autres ſubſtances? Ou enfin n'étoit-ce pas plutôt une eſpèce de décrépitation, une diviſion extrême des parties du diamant, occaſionnée par le contact d'un air froid, une volatiliſation par truſion, pour me ſervir de l'expreſſion de quelques Chimiſtes?

La configuration de quelques diamans qui ſemblent compoſés de lames appliquées les unes ſur les autres, comme l'obſerve le traducteur du Traité des pierres de Théophraſte, & les expériences faites à Florence, au verre ardent, ſembloient favoriſer cette dernière opinion; mais elle ne s'accordoit pas avec l'expérience de la volatiliſation des diamans enveloppés dans la craie & le charbon en poudre; elle étoit contredite d'ailleurs par le fait rapporté par Boyle, puiſque les vapeurs âcres & pénétrantes qu'il avoit obſervées, ne pouvoient s'expliquer que dans l'hypothèſe de la volatiliſation: d'un autre côté l'obſervation ſingulière faite par M. Macquer, & depuis par M.rs Roux, Darcet & Rouelle, cette eſpèce d'auréole ou de flamme qu'ils avoient remarquée autour du diamant pendant ſa deſtruction, ſembloit annoncer une combuſtion; mais on pouvoit lui oppoſer l'opération de M. Darcet, faite dans des boules de pâte de porcelaine; les circonſtances de cette évaporation ſembloient exclure toute idée de combuſtion & de truſion, & ramener le phénomène à l'effet d'une volatiliſation ordinaire.

Ces incertitudes ne pouvoient être levées que par de nouvelles expériences; je communiquai à M.rs Macquer & Cadet le projet où j'étois de les ſuivre, je leur demandai leurs conſeils, je les priai de vouloir bien permettre qu'elles

fussent faites de concert, & nous nous assemblames à cet effet dans le laboratoire de M. Cadet.

Notre première idée fut de tenter l'évaporation du diamant dans les vaisseaux fermés, c'est-à-dire, de le distiller ou de le sublimer : nous avions d'autant plus lieu de compter sur le succès de cette expérience, que le degré de feu nécessaire pour évaporer le diamant à l'air libre, est fort inférieur à celui qu'on emploie pour la formation du phosphore de Kunkel; nous établimes en conséquence un appareil à peu-près semblable à celui dont on se sert pour ce dernier. Dix-neuf grains $\frac{5}{8}$ de diamant, poids de marc, furent introduits dans une petite cornue de grès enduite de terre à l'extérieur; les plus gros de ces diamans pesoient demi-grain; il y en avoit de beaucoup plus petits, & les plus fins n'étoient même, à proprement parler, que de la poudre grossière de diamans : la cornue fut adaptée à un récipient de verre, & y fut exactement lutée avec du lut gras (on espéroit qu'en rafraîchissant les jointures, on pourroit les défendre du trop grand effet de la chaleur); enfin on avoit ménagé au matras de verre, qui servoit de récipient, un petit trou pour donner issue à l'air contenu dans les vaisseaux, & aux vapeurs même, en supposant qu'il s'en échappât de trop élastiques; la cornue ayant été placée dans le fourneau, on échauffa d'abord lentement, on augmenta insensiblement la chaleur, & on donna ensuite trois heures d'un feu très-violent. Au bout de ce temps, on crut devoir laisser refroidir les vaisseaux, on les déluta; & on ne trouva dans le récipient qu'un peu de vapeurs aqueuses fournies par la décomposition du lut; car malgré les précautions qu'on avoit prises, il avoit été ramolli, & comme en partie brûlé; par rapport à la cornue, elle étoit saine & entière, en la secouant on entendoit encore les diamans sonner dans son intérieur, & en la retournant on les vit tomber à peu-près tels qu'ils y avoient été introduits: ils étoient seulement presque tous dépolis, leur surface étoit couverte d'un enduit brun-noir, & la cornue se trouvoit dans son intérieur enduite d'une couche à peu-près semblable.

Les diamans reportés à la balance ne se sont plus trouvés peser, après avoir subi cette épreuve, que 16 grains $\frac{1}{2}$, au lieu de 19 grains $\frac{5}{8}$; mais ayant cassé la cornue, on s'est aperçu que quelques portions de la poudre de diamans étoit demeurée au fond de la cornue, & qu'elle y étoit adhérente, au moyen, sans doute, de quelques parcelles de sable & de terre, que la violence du feu avoit ramollies, & comme préparées à la fusion; cette portion de diamans pesoit environ $\frac{3}{4}$ de grains, d'où l'on a conclu que la diminution de poids que les diamans avoient éprouvée dans cette opération, étoit de 2 grains $\frac{22}{32}$, c'est-à-dire, de près d'un septième de leur poids.

Le feu, dans cette première expérience, avoit été beaucoup plus violent & beaucoup plus long-temps continué qu'il n'étoit nécessaire pour l'évaporation du diamant à l'air libre, & il en résultoit déjà que le défaut de contact de l'air retardoit l'évaporation du diamant; il nous paroissoit même assez probable que nous n'avions eu de diminution de poids, qu'en raison de la quantité d'air contenue dans la capacité des vaisseaux.

Pendant que nous étions occupés de cette expérience, M. Maillard, habile joaillier, persuadé, comme la plupart de ses confrères, que le diamant ne s'évaporoit qu'autant qu'il avoit le contact de l'air libre, proposa avec un zèle digne de la reconnoissance des Savans, de soumettre trois diamans qu'il avoit apportés, à telle expérience qu'on jugeroit à propos; il consentoit qu'ils fussent tourmentés par un feu aussi violent, & aussi long-temps continué qu'on voudroit, pourvu qu'on lui permît de les garantir du contact de l'air libre. M. Maillard fut chargé en conséquence de disposer lui-même ses diamans comme il le jugeroit à propos. Il les plaça dans le fourneau d'une pipe à tabac remplie de charbon en poudre fine; cette pipe fut exactement fermée avec une petite lame de tole, recouverte & enveloppée de toutes parts, avec un lut composé de sable des fondeurs, détrempé avec de l'eau salée; enfin la pipe fut placée dans un creuset enduit de craie sèche, lequel étoit lui-même contenu dans deux autres creusets, abouchés l'un

à l'autre.

à l'autre. Toutes les jointures étoient exactement lutées avec le même sable des fondeurs, détrempé avec de l'eau salée.

Le creuset ainsi disposé, après avoir été bien séché, fut placé dans un fourneau où il essuya pendant deux heures un feu très-vif; cependant, comme on s'aperçut que les barreaux de la grille étoient un peu serrés; que d'ailleurs l'ouverture supérieure du creuset n'étoit pas assez grande, qu'elle n'étoit pas proportionnée au volume du fourneau, on craignit d'avoir manqué le but de l'expérience, faute d'avoir donné le plus grand feu possible; ces considérations engagèrent M. Macquer à nous proposer de continuer l'expérience dans le fourneau à vent dont il a donné la description & les proportions dans les Mémoires de l'Académie, & dans lequel il a fondu avec beaucoup de facilité la pierre à chaux, le gypse & d'autres substances très-réfractaires. La proposition ayant été acceptée, on commença par établir un grand feu dans le fourneau de M. Macquer, & lorsque le charbon fut bien embrasé, on y transporta le triple creuset rouge avec toutes les précautions convenables. On donna dans ce dernier fourneau deux heures du feu le plus violent; après quoi voyant que le creuset se ramollissoit, que des parties même du fourneau se préparoient à la fusion, on crut devoir arrêter & laisser refroidir : au bout de plusieurs heures, on tira le creuset du feu; il étoit rentré presque de toutes parts sur lui-même; la terre & le lut s'étoient fondues & ne formoient plus qu'une même masse vitreuse; la seule pipe s'étoit conservée au milieu de ce bain; elle n'avoit point été altérée; elle faisoit seulement corps avec les matières vitrifiées qui l'environnoient, & il ne fut possible de l'ouvrir qu'en cassant toute la masse : sitôt que la pipe fut fendue, on en vit sortir la poudre de charbon aussi noire qu'elle y avoit été mise, & les trois diamans avec leurs facettes & leur poli, comme avant l'opération, avec cette différence seulement qu'ils avoient une légère teinte de noir à leur surface. Ces diamans pesés ensemble & séparément, donnèrent

exactement le même poids qu'avant leur exposition au feu; repolis, ils se sont trouvés aussi beaux qu'auparavant.

Le feu, dans cette expérience, avoit été infiniment plus violent & beaucoup plus long-temps continué qu'il n'étoit nécessaire pour la destruction du diamant à l'air libre, d'où nous nous crumes en droit de conclure que ce qu'on avoit regardé comme volatilisation n'en étoit pas véritablement une, & que si le diamant s'évaporoit à l'air, comme on l'avoit observé en Italie, en Allemagne & en France, ce phénomène devoit s'attribuer ou à une espèce de combustion, comme celle du charbon & de quelques autres substances qui résistent comme lui à la violence du feu dans les vaisseaux fermés, mais qui cèdent à l'air libre, à l'action d'un feu très-doux, ou bien que cet effet étoit dû à la réduction des diamans en une poudre très-fine, occasionnée par le contact de l'air. Cette dernière opinion étoit celle de M. Cadet, & c'étoit à sa réquisition que nous avions ajouté cette alternative.

Un résultat si singulier & si peu attendu méritoit d'être observé plus d'une fois; M. Macquer voulut bien se charger en conséquence de répéter les mêmes expériences au fourneau de porcelaine dure de Sève; & pour ne laisser aucune équivoque, M. Maillard fut encore chargé de disposer lui-même l'appareil. Le diamant pesoit deux grains $\frac{51}{64}$; il fut renfermé comme dans la précédente expérience dans une pipe à tabac, & lutée de la même manière; les deux creusets qui formoient la dernière enveloppe furent placés dans un grand creuset de terre à gazettes de porcelaine, laquelle étoit remplie de sablon pour contenir le tout.

Cet appareil a reçu pendant vingt-quatre heures, dans le fourneau de porcelaine de Sève, le plus grand degré de feu connu; lorsqu'ensuite, après un refroidissement parfait, les matières ont été retirées du fourneau, le premier creuset s'est trouvé absolument intact; partie du sablon qu'il contenoit s'étoit combinée avec le sable de fondeurs & avoit coulé avec lui, mais la partie qui n'avoit point été à portée de toucher au

ſable de fondeur, étoit dans l'état de ſablon pur, c'eſt-à-dire tel qu'on l'avoit mis au feu; les creuſets de Heſſe avoient été attaqués par la même cauſe, c'eſt-à-dire par le ſable des fondeurs, & le ſupérieur étoit percé dans le fond; par rapport à la pipe elle n'étoit nullement endommagée, elle avoit été conſervée par une eſpèce de bain de matières en fuſion, qui l'avoient environnée ſans la détruire; la plaque de tole qui la couvroit avoit été fondue, par la violence du feu, elle s'étoit convertie en grenaille de fer qui avoit coulé dans la poudre de charbon; enfin cette dernière avoit conſervé ſa couleur noire. Quant au diamant il ſe trouvoit engagé par un des côtés à-peu-près à moitié dans un morceau aſſez gros de grenaille de fer fondu; la partie apparente avoit conſervé ſes facettes & ſon poli, & le diamant paroiſſoit tel qu'il avoit été employé, à l'exception qu'il avoit pris une légère teinte de noir: d'après la figure & la groſſeur que nous connoiſſions au diamant, nous avions lieu de croire qu'il étoit engagé de plus de moitié dans le fer; nous préſumions en conſéquence qu'il ſeroit difficile de le ſéparer; auſſi ne fut-ce pas ſans étonnement que nous nous aperçumes qu'il n'étoit preſque point adhérent: toute la portion que nous avions jugée engagée dans le fer, n'exiſtoit plus, c'eſt-à-dire que la moitié du diamant avoit été détruite, & ce qui eſt de plus ſingulier, c'eſt que la partie reſtante n'étoit nullement altérée; cette portion éprouvée à la balance ſe trouva peſer un grain $\frac{9}{16}$.es, au lieu de deux grains $\frac{13}{16}$.es qu'il peſoit auparavant; il avoit par conſéquent perdu les quatre neuvièmes de ſon poids.

Quelles que ſoient les cauſes qui ont favoriſé la deſtruction de la moitié du diamant dans cette expérience, ſoit qu'elle ſoit dûe à ſon évaporation ou à ſa ſcorification avec le fer, toujours eſt-il certain que l'autre moitié a ſupporté pendant vingt-quatre heures l'extrême violence du feu, ſans en avoir été ſenſiblement altérée, & cette circonſtance nous confirma encore dans l'opinion que nous avions priſe d'après l'expérience précédente, que l'évaporation du diamant à l'air libre n'étoit point une véritable volatiliſation.

L'embarras étoit d'expliquer comment en opérant dans des circonſtances à-peu-près ſemblables, M. Darcet & nous, c'eſt-à-dire les uns & les autres dans des vaiſſeaux que nous regardions comme exactement fermés, nous avions pu obtenir des réſultats ſi différens, & nous commençames à ſoupçonner que ces différences pouvoient tenir à la nature des vaiſſeaux. Pour nous mettre en état d'apprécier le mérite de cette conjecture, M. Macquer enferma dans pluſieurs boules de pâte de porcelaine de la poudre de charbon, puis il les plaça dans le fourneau de porcelaine dure de Sève : lorſque la fournée fut cuite, il retira les boules & les ouvrit, mais il n'y reſtoit plus aucun veſtige de charbon, il étoit entièrement conſumé, & l'intérieur de la boule étoit de la plus parfaite blancheur; on voyoit ſeulement dans la partie qui avoit regardé le bas du fourneau, un léger enduit vitreux, qui probablement avoit été formé par la fuſion de la cendre du charbon.

L'inverſe de cette expérience étoit de ſoumettre la poudre de charbon au même degré de feu, dans un vaiſſeau de porcelaine cuite, & c'eſt ce que M. Macquer n'a pas manqué d'eſſayer; la poudre de charbon a été placée dans un petit ſucrier, garni de ſon couvercle & les jointures ont été lutées avec de l'argile; quoique le charbon dans cette expérience, ait eſſuyé le même degré de feu que dans les précédentes, il n'a paru avoir reçu aucune eſpèce d'altération, & il s'eſt trouvé après l'opération dans le même état qu'auparavant.

Ces expériences nous portèrent à penſer que la pâte de porcelaine étoit une ſubſtance plus poreuſe qu'on ne penſoit, qu'elle ne défendoit pas les corps qu'elle renfermoit du contact de l'air extérieur, & qu'elle n'en empêchoit pas la combuſtion; que ce n'étoit qu'autant qu'elle approchoit de ſon dernier degré de cuiſſon, qu'on pouvoit la regarder comme ſuſceptible de former des vaiſſeaux inacceſſibles à l'air, mais que le feu néceſſaire pour l'amener à ce point, étoit bien ſupérieur à celui néceſſaire pour l'évaporation des diamans, & la combuſtion du charbon ; enfin nous crumes pouvoir aller juſqu'à conclure que M. Darcet, dans les expériences qu'il avoit

faites dans des boules de pâte de porcelaine, n'avoit point opéré dans des vaisseaux exactement fermés, & nous annonçames qu'il étoit à désirer que ses expériences fussent répétées avec de nouvelles précautions.

Pendant que M. Macquer s'occupoit de ces expériences; M. Mitouard, Démonstrateur en Chimie & en Pharmacie de Paris, se préparoit à répéter toutes celles dont nous venons de rendre compte, en en variant les circonstances, & il se proposoit d'y ajouter tout ce qui pouvoit contribuer à les rendre plus concluantes. De trois diamans destinés à recevoir l'extrême violence du feu, il introduisit l'un dans une pipe à tabac remplie de charbon en poudre, un second dans une pipe remplie de craie, un troisième, dans une pipe entièrement vide; enfin ces pipes furent fermées à peu-près de la même manière que dans l'expérience de M. Maillard, & elles furent renfermées dans plusieurs creusets placés les uns dans les autres.

Ces trois appareils ainsi disposés, furent placés ensemble dans le fourneau de M. Macquer, dont il a été question plus haut, & M. Mitouard même y avoit ajouté une très-grande longueur de tuyau; enfin le feu fut poussé pendant deux heures & demie à une extrême violence, & supérieure même à celle que nous avions obtenue dans nos précédentes expériences. Lorsqu'après le refroidissement total, il fut question de retirer les creusets, ils se trouvèrent tellement fondus & déformés, qu'ils ne faisoient plus, avec le lut, qu'une seule masse vitreuse : chacun de ces creusets ayant été cassé, on reconnut 1.° que le diamant qui avoit été placé dans de la poudre de charbon, n'avoit rien perdu ni de son poids ni de son poli. 2.° Que celui qui avoit été renfermé dans de la craie avoit perdu un peu plus d'un cinquième de son poids, qu'il avoit été entièrement dépoli, que ses angles étoient émoussés; enfin qu'il étoit recouvert d'une espèce de croûte comme les diamans bruts. 3.° Que le diamant qui avoit été exposé au feu seul dans la pipe & sans intermède, avoit perdu également près d'un cinquième de son

poids; que ſa couleur & ſon poli avoient été conſidérablement altérés, & ce qui eſt très-remarquable, qu'il étoit d'un noir de jayet.

Il étoit poſſible, à la rigueur, que la différence de ces réſultats tînt à des différences dans la nature du diamant, & M. Mitouard crut devoir s'attacher à lever toute équivoque à cet égard; pour y parvenir, il plaça les trois mêmes diamans qu'il avoit employés précédemment dans trois appareils ſemblables, en changeant ſeulement les intermèdes; le diamant qui avoit été mis dans de la poudre de charbon, fut environné de poudre de corne de cerf calcinée; celui qui avoit été environné de craie, fut placé dans de la poudre de charbon; enfin, celui qui avoit éprouvé l'action du feu ſeul dans une pipe, ſans intermède, fut placé dans du verre en poudre; tous ces diamans furent ſoumis à l'action du même feu pendant deux heures un quart; & voici ce qu'on obſerva: le diamant enfermé dans de la corne de cerf calcinée, étoit diminué d'un vingtième de ſon poids; celui qui avoit été placé dans la poudre de charbon, n'avoit ſubi nulle altération; enfin celui qui avoit été enfermé dans de la poudre de verre, étoit diſparu entièrement, & il ne reſtoit plus dans le creuſet qu'un verre d'un jaune foncé.

M. Mitouard a auſſi répété, avec M. Cadet, l'expérience de la diſtillation du diamant à la cornue; ils ſe ſont ſervi, dans cette expérience, du même fourneau & du même appareil que nous avons décrit ci-deſſus; ils ſont même parvenus à donner un degré de feu un peu plus fort, & ils l'ont plus long-temps continué: lorſqu'au bout de quatre heures ils ont déſappareillé les vaiſſeaux, les diamans s'y ſont retrouvés peu altérés en apparence, mais ils avoient ſouffert une diminution ſenſible de poids.

Le même Mémoire de M. Mitouard contient des détails ſur l'évaporation du diamant à l'air libre, & il y a joint une ſuite d'expériences très-intéreſſantes ſur l'action du feu, appliqué à un grand nombre de pierres précieuſes; mais je ne puis me diſpenſer de faire remarquer en même temps que le degré

de feu auquel il les a expofés, n'ayant pas été pouffé très-loin ni très-long-temps continué, on ne peut rien conclure de très-précis de cette partie de fon Mémoire : je vais tranfcrire cependant ici les réfultats qu'il a obtenus.

Les Rubis n'ont rien perdu de leur forme, de leur couleur ni de leur poli.

L'Amétifte a perdu toute fa couleur, & elle eft devenue glaceufe.

De deux Saphirs, un eft devenu obfcur, l'autre a été prefque entièrement décoloré.

L'Émeraude a fondu en partie & a perdu fa tranfparence.

La Vermeille au contraire a confervé fa tranfparence, mais fa furface a perdu un peu de fon poli.

Enfin, le Grenat Syrien eft devenu opaque.

De toutes ces expériences, M. Mitouard conclut que le diamant qui fe diffipe fi facilement à l'air libre, peut fupporter, lorfqu'il eft garanti du contact de l'air, un degré de feu très-violent fans fe volatilifer, mais que la nature de l'intermède dont on l'environne n'eft point indifférente; il va même jufqu'à foupçonner que le charbon n'opère plus efficacement fa confervation, qu'en raifon du phlogiftique qu'il contient; on fait, ajoute M. Mitouard, que cet effet a lieu à l'égard de l'antimoine & du zinc, qui ne font plus fufceptibles de brûler & de fe détruire lorfqu'ils font enfermés avec de la poudre de charbon.

Le Mémoire de M. Mitouard n'étoit point encore publié, lorfque M. Cadet communiqua au public le réfultat particulier de fes expériences ; M. de Saint-Vincent, dont le goût pour les Sciences eft connu du Public, lui ayant remis douze karats de diamans bruts, il en choifit deux du poids de dix grains, poids de marc, qu'il plaça dans un petit creufet de l'efpèce de ceux qu'on nomme *Tutte ;* il le recouvrit avec un autre creufet, & en luta les bords avec de l'argile; cet appareil fut placé dans une forge, & le feu fut pouffé fi vivement, que la plaque du fourneau, qui étoit de fonte de fer, fut fondue : les deux diamans furent dépolis dans

cette opération, mais ils ne perdirent qu'un ſeizième de leur poids; la même expérience ayant été répétée dans un même creuſet, en environnant les diamans de borax en poudre, ce dernier pénétra à travers les pores du creuſet & ſe diſſipa, mais les diamans demeurèrent en entier, ils étoient ſeulement un peu plus bruns.

Cette première expérience enhardit M. Cadet, & il riſqua dans une ſeconde de ſoumettre à la fois, dans le même appareil, les douze karats de diamant qu'il avoit en ſa poſſeſſion, eſpérant obtenir ſur cette quantité conſidérable un réſultat plus ſenſible: le feu fut cette ſeconde fois plus violent que la première, & il fut animé par le vent de trois ſoufflets; non-ſeulement la plaque de la forge, mais la tuyère même du ſoufflet fondirent & recouvrirent tout le creuſet; le couvercle de la tutte en fut en partie ſcorifié, & on aperçut au creuſet, qui lui ſervoit de couvercle, un trou qui perçoit d'outre en outre; mais on préſuma que ce trou ne s'étoit formé qu'au moment où on étoit près de ceſſer le feu; quoi qu'il en ſoit, les diamans ſe trouvèrent diminués d'un vingt-quatrième de leur poids. Enfin, M. Cadet voulut eſſayer d'introduire, avec un ſoufflet, de l'air froid dans un vaiſſeau rouge & embraſé qui contenoit des diamans en évaporation, mais la grande dilatation que recevoit l'air lorſque quelques portions pénétroient dans le vaiſſeau, mettoit obſtacle à la rentrée du nouvel air, & cette opération n'eut pas le ſuccès que M. Cadet s'en promettoit.

Quelque multipliées que fuſſent les expériences dont on vient de rendre compte, il s'en falloit bien que tout fût dit encore ſur cette matière, & il reſtoit d'abord un point important à éclaircir; dans preſque toutes les expériences où le diamant avoit été expoſé au feu ſans intermède dans les vaiſſeaux fermés, il avoit conſtamment perdu quelque choſe de ſon poids; il reſtoit à ſavoir ſi le même degré de feu ſoutenu beaucoup plus long-temps, opéreroit ſon évaporation totale; enfin dans les expériences même où le diamant avoit été environné de poudre de charbon, & dans leſquelles il n'avoit reçu

reçu aucune altération; il restoit à examiner ce qui résulteroit d'un degré de feu plus violent, s'il étoit possible, & très-long-temps continué.

La résolution de ces différentes questions a été l'objet que se sont proposé M.[rs] Darcet & Rouelle dans un travail fait en commun & qu'ils ont publié dans le mois de Janvier 1773. Ils se sont servi de boules & de creusets de porcelaine de deux & trois lignes d'épaisseur dont la partie vide intérieure varioit depuis trois lignes jusqu'à un pouce de diamètre environ; ils n'étoient percés que d'un trou, dont le diamètre étoit au moins d'une ligne & au plus de quatre. Ce trou lorsque l'air des vaisseaux avoit été suffisamment dilaté se bouchoit avec une cheville de porcelaine usée dans le trou, & ils ont porté la précaution jusqu'à enduire ce même bouchon avec une matière vitreuse très-fusible & néanmoins d'une destruction difficile.

Il seroit trop long de donner ici tout le détail des expériences de M. Darcet & de M. Rouelle, tant elles sont multipliées, mais comme en même temps, elles sont extrêmement intéressantes & que je regretterois d'en omettre une seule, je prends le parti de présenter en forme de tableau toutes celles qui en sont susceptibles.

TABLEAU DES EXPÉRIENCES SUR LE DIAMANT, contenues dans le Mémoire de M.[rs] Darcet & Rouelle.

Numéro des Expériences.	Nombre & nature des Diamans.	Pesanteur des Diamans, poids de marc.	Durée du FEU.	OBSERVATIONS sur les Expériences.	RÉSULTAT des Expériences.
1.	3 diamans.	$\frac{1}{4}$ grain.	45 heures feu de porcelaine.	Sans intermède dans une boule de porcelaine cuite, du diamètre intérieur d'une balle de pistolet.	Ils ont perdu environ moitié de leur volume, ils sont devenus d'un blanc mat, & on distinguoit aisément les lames ou couches dont ils étoient formés.
2.	4 diamans.	. . . . .	7 heures au fourneau à vent.	Mêmes circonstances.	Ils n'ont presque rien perdu de leur poids, mais ils étoient noirs, quoique l'intérieur de la boule fût blanc.

Numéro des Expériences.	Nombre & nature des Diamans.	Pesanteur des Diamans, poids de marc.	Durée du FEU.	OBSERVATIONS sur les Expériences.	RÉSULTAT des Expériences.
3.	1 Diamant.	$\frac{9}{32}$ grain.	Six fois 24 h.	Mêmes circonstances.	A disparu entièrement.
4.	1 Diamant.	2 grains.	4 fois 24 h.	Sans intermède dans un creuset de porcelaine parfaitement bouché.	A perdu $\frac{1}{32}$.e de son poids.
5.	Même Diamant qu'au n.° 4.	1 grain $\frac{31}{32}$.	4 fois 24 h.	Sans intermède dans un petit creuset de porcelaine parfaitement bouché.	Est sorti noir, comme carié, vermoulu & en grande partie détruit.
6.	Diamant du Bresil.	$\frac{23}{32}$ & $\frac{1}{80}$.	11 heures au fourneau à vent.	Sans intermède.	A perdu $\frac{2}{80}$.e de son poids.
7.	Diamant du Bresil.	$\frac{5}{8}$.	8 jours.	Sans intermède dans une boule de porcelaine cuite.	A disparu entièrement.
8.	3 Diamans du Bresil.	$\frac{3}{8}$ moins $\frac{1}{80}$.	8 jours.	Sans intermède dans une boule de porcelaine cuite, & vernissée en dedans.	Ont disparus entièrement.
9.	1 Diamant.	1 grain $\frac{1}{32}$.	45 heures du feu de porcelaine, & 7 heures du feu du fourneau à vent.	Dans une boule de porcelaine cuite de $\frac{5}{4}$ de pouce de diamètre intérieur remplie de poudre de corne de cerf calcinée.	A perdu $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{32}$.e de son poids; il est sorti dépoli & comme égrisé; la boule de porcelaine n'étoit pas parfaitement cuite, mais fortement dégourdie.
10.	Même Diamant.	$\frac{1}{2}$ grain & $\frac{1}{32}$.	7 fois 24 h.	Dans une boule semblable dont la cavité étoit remplie de petites boules de porcelaine cuite.	Les petites boules de porcelaine avoient été mises pour faire le plein; le diamant après l'expérience ne pesoit plus qu'un huitième de grain.
11.	Diamant plat.	. . . . .	7 fois 24 h.	Dans une boule de porcelaine cuite remplie de pierre à fusil en poudre.	Le diamant a disparu entièrement.
12.	1 Diamant.	$\frac{9}{32}$ & $\frac{3}{80}$	11 heures de feu au fourneau à vent.	Mêmes circonstances.	Ne pesoit plus après l'expérience que $\frac{5}{8}$ & $\frac{1}{80}$; il étoit un peu jaunâtre.
13.	1 Diamant.	1 grain moins $\frac{5}{32}$ & $\frac{1}{80}$.	Fourneau à vent.	Sans intermède dans une boule de pâte de porcelaine, qui n'avoit été que dégourdie, laquelle a été placée à l'entrée de la cheminée du fourneau à vent.	Est sorti terne & comme s'il étoit recouvert d'une pelure d'oignon; à perdu $\frac{4}{32}$ & $\frac{1}{80}$; le feu n'a pas été suffisant pour la cuire en porcelaine.
14.	1 Diamant.	$\frac{23}{32}$ & $\frac{1}{80}$.	Fourneau à vent.	Sans intermède dans une boule de porcelaine cuite, à l'entrée de la cheminée du fourneau à vent.	A perdu $\frac{1}{80}$ de son poids.

Nombre des Expériences.	Nombre & nature des Diamans.	Pesanteur des Diamans, poids de marc.	Durée du Feu.	Observations sur les Expériences.	Résultat des Expériences.
15.	1 diamant du Bresil.	$\frac{17}{32}$ & $\frac{1}{80}$	36 heures.	Sans intermède dans une boule de pâte de porcelaine crue.	Le feu a suffi pour cuire la porcelaine, & le diamant a perdu moitié de son poids.
16.	*idem.*	$\frac{1}{2}$ grain & $\frac{1}{40}$.	26 heures.	Mêmes circonstances.	Ce diamant a presque été évaporé en entier, il n'en est plus resté qu'un petit fragment terne.
17.	*idem.*	$\frac{15}{32}$ & $\frac{1}{80}$	11 h. de feu.	Sans intermède dans un creuset de Hesse bien bouché.	A perdu moitié de son poids.
18.	*idem.*	1 grain $\frac{1}{8}$ moins $\frac{1}{80}$	36 h. de feu.	Dans un creuset de pâte de gazettes.	A disparu entièrement.
22.	1 Diamant.	$\frac{3}{8}$ de grain.	45 h. de feu de porcelaine & 7 heures d'un fourneau a vent.	Dans une boule de porcelaine cuite, & dans de la poudre de charbon.	N'a pas diminué sensiblement de poids, a perdu un peu de son poli & est devenu louche.
23.	Même Diamant.	$\frac{3}{8}$ de grain.	huit fois 24 heures de feu.	Même circonstance, mais dans une boule de porcelaine cuite, de plus petit diamètre.	Est devenu noir, chauffé ensuite à l'air libre, il est redevenu blanc & s'est trouvé alors diminué des deux tiers de son poids, le charbon n'a point souffert.
24.	1 Diamant rose.	$\frac{3}{8}$ de grain.	Comme à l'expérience 22.	Dans une boule de porcelaine cuite de petit diamètre & dans de la poudre de charbon.	Il est sorti noir, mais il s'est blanchi aisément en le chauffant à l'air libre; il a diminué visiblement de poids & de volume; une partie du charbon avoit formé couverte sur l'intérieur de la boule de porcelaine.
25.	1 Diamant rose.	$\frac{19}{32}$.	11 heures de feu au fourneau à vent.	Dans de la poudre de charbon, dans une boule de porcelaine dont le diamètre intérieur étoit de $\frac{5}{4}$ de pouces.	Le diamant n'a rien souffert, le charbon a été conservé.
26.	Diamant du Bresil.	$\frac{15}{32}$.	Fourneau à vent.	Dans de la poudre de charbon, mais dans une boule de porcelaine simplement dégourdie.	Le charbon s'est conservé, le diamant a perdu $\frac{1}{8}$ de son poids.
27.	1 Diamant.	$\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{80}$.	Fourneau à vent.	Dans une boule de porcelaine cuite & dans de la poudre de charbon.	Le charbon s'est conservé, le diamant a perdu $\frac{1}{32}$ & $\frac{1}{80}$ de son poids.

Numéro des Expériences.	Nombre & nature des Diamans.	Pesanteur des Diamans, poids de marc.	Durée du FEU.	OBSERVATIONS sur les Expériences.	RÉSULTAT des Expériences.
28.	3 Diamans du Bresil.	1 grain $\frac{7}{32}$ & $\frac{1}{80}$	Huit jours de feu.	Dans une boule de pâte de porcelaine, du diamètre intérieur d'une grosse balle de fusil, pleine de poudre de charbon.	Le charbon s'est bien conservé, & il ne s'est formé ni enduit, ni vernis noir, les diamans n'ont rien souffert & se sont retrouvés de même poids.

Indépendamment de ces expériences, le Mémoire de M.[rs] Darcet & Rouelle en contient encore trois autres qui ne sont pas moins intéressantes, ce sont les dix-neuvième, vingtième & vingt-unième, dont il n'a pas été possible de présenter le résultat dans le tableau précédent.

Ils ont construit un creuset de porcelaine, muni d'un couvercle à gorge rentrante, usé & cuit sur le creuset même; ils ont percé au-dessus de son bord quatre petits trous opposés ayant une direction horizontale & dont l'ouverture étoit au plus de trois quarts de ligne de diamètre, afin de donner accès à l'air extérieur; ils ont placé dans ce creuset deux diamans du Bresil du poids d'un grain & un huitième fort, & ils ont donné trois heures de bon feu sous la mouffle: lorsque le creuset a été refroidi, il ne s'y est plus trouvé le moindre vestige du diamant, l'intérieur du creuset étoit blanc & lisse sans un atome de poussière.

Ils ont également répété l'expérience de l'évaporation des diamans sous la mouffle, avec des précautions particulières, & ils ont observé, 1.° qu'ils paroissoient rouges & embrasés un peu avant que l'argent entrât en fusion; 2.° qu'on appercevoit sensiblement une flamme légère & ondulente, qui entouroit la surface du diamant pendant sa combustion; 3.° enfin que la poudre de diamant brûloit avec scintillation sans donner d'émanation sensible.

Il résulte de l'exposé fidèle que je viens de faire des dernières expériences de M.[rs] Darcet & Rouelle.

1.° Que le diamant qui se détruit en si peu de temps à l'air libre & par un degré de feu inférieur à celui nécessaire pour fondre l'argent, est au contraire un corps très-réfractaire lorsqu'on le garantit du contact de l'air.

2.° Qu'il peut même sans intermède & dans une boule de porcelaine cuite (*voyez la 2.e expérience*), soutenir sept heures du feu le plus violent, sans être sensiblement altéré.

3.° Que cependant cette extrême violence du feu continuée pendant plusieurs jours (*8.e expérience*), l'altère à la longue, lorsqu'il est sans intermède, en diminue sensiblement le poids & l'évapore enfin entièrement.

4.° Que ce même diamant, lorsqu'il est environné d'une suffisante quantité de poudre de charbon, devient tellement fixe qu'il peut résister pendant huit jours (*28.e expérience*) au feu du fourneau de porcelaine sans souffrir la moindre altération.

5.° Que lorsque l'intérieur des boules de porcelaine est d'un trop petit diamètre, & que le diamant ne peut pas être environné d'une quantité de poudre de charbon suffisante (*23.e expérience*), il n'est pas alors aussi fixe; mais que l'extrême violence du feu lui fait subir à la longue quelqu'altération.

6.° Que lorsque le diamant a été attaqué par le feu, quoiqu'environné de poudre de charbon, communément le charbon lui-même a subi quelqu'altération, de sorte qu'on peut regarder le degré de fixité du diamant comme à peu-près égal à celui du charbon.

7.° Que le diamant réduit en vapeur passe à travers les boules & les creusets de la porcelaine, même la mieux cuite, lorsqu'ils sont rouges & embrasés, à moins qu'on n'aime mieux croire qu'il se fait jour à travers les jointures quelqu'exactement lutées qu'elles soient; mais que dans l'un & l'autre cas il en résulte toujours qu'on doit être en garde contre les expériences faites dans les vaisseaux de porcelaine, & qu'il est au moins permis de douter qu'ils fassent exactement l'office de vaisseaux fermés.

Ces conſéquences ſont une ſuite néceſſaire des expériences de M.[rs] Darcet & Rouelle, & il eſt impoſſible qu'ils s'y refuſent; cependant qu'on les compare avec celles qui terminent la courte annonce que nous avons lûe à l'Académie, M. Macquer, M. Cadet & moi, à ſa ſéance publique du 29 Avril 1772, & qui a été depuis imprimée dans quelques ouvrages périodiques, on verra qu'il s'en faut de bien peu qu'elles ne ſoient exactement les mêmes.

Si les papiers publics ont été plus loin, ſi la gazette de France a trop généraliſé nos conſéquences, pourquoi nous en rendroit-on reſponſables? Et de quel droit voudroit-on nous juger ſur une pièce qui nous eſt étrangère, tandis que nos Mémoires exiſtent & ſont entre les mains du Public? mais je ſuppoſe encore qu'il ſe fût trouvé entre les réſultats de M. Darcet & les nôtres des différences très-conſidérables, tout ce qu'il auroit été poſſible d'en conclure, c'eſt que la fixité des corps n'eſt que relative, & que tel qui réſiſte à un feu violent pendant trois heures cède à l'action du même feu continué pendant huit jours.

J'ai toujours entendu dire à M. Rouelle l'aîné, que le charbon étoit le corps le plus réfractaire, le plus fixe de la Nature; je ferai voir dans ce Mémoire que cette ſubſtance eſt non-ſeulement combuſtible, comme on le ſait, mais qu'elle eſt encore à peu-près auſſi volatile que le diamant. N'y auroit-il pas de l'injuſtice, parce que j'ai été à portée d'employer un agent plus fort, de taxer un Chimiſte eſtimable, d'ignorance & de légèreté pour avoir avancé un fait exact en lui-même, c'eſt-à-dire relativement au degré de feu qu'il a employé, & qui ne ſe trouve démenti qu'à un degré de feu plus violent, tel que celui du verre ardent?

Je ne ſais pourquoi je ſuis revenu ſur cet article, dont j'avois réſolu de ne plus parler; mais j'avoue qu'il m'a paru dur, à moi qui ai toujours honoré les talens de M.[rs] Rouelle, qui ſuis leur diſciple & qui m'en fais gloire, de me voir attaqué directement par une critique amère qu'on a affecté de faire tomber excluſivement ſur moi; je me flatte que ces

traits échappés de la plume de M. Darcet, ne ſont que l'effet d'un premier mouvement; je crois d'ailleurs connoître aſſez M. Rouelle pour pouvoir aſſurer que la ſource n'en eſt pas dans ſon cœur: auſſi je proteſte, & je crois avoir prouvé qu'ils ne me laiſſent aucune impreſſion, & ils ne m'empêcheront certainement pas de deſirer de vivre avec des Savans que j'eſtime, & dont juſqu'à ce moment je n'avois éprouvé que des procédés honnêtes.

SECOND MÉMOIRE
SUR
LA DESTRUCTION DU DIAMANT
Au grand Verre brûlant de Tſchirnauſen, connu ſous le nom de Lentille du Palais royal.

Par M. LAVOISIER.

IL me reſte après avoir expoſé les expériences ſur le Diamant, qui nous ſont propres, à M. Macquer, à M. Cadet & à moi, & toutes les autres qui ſont venues à ma connoiſſance, il me reſte, dis-je, à rendre compte des phénomènes que cette ſubſtance ſingulière préſente au foyer du grand Verre ardent de Tſchirnauſen, connu ſous le nom de *Lentille du Palais royal,* & qui a été légué à l'Académie, par M. d'Ons-en-Bray.

Une partie des Expériences contenues dans ce Mémoire, ſont extraites du Journal des expériences, faites au Jardin de l'Infante, que nous tenons en commun, M.rs Macquer, Cadet, Briſſon & moi, & qui eſt dans ce moment ſous les yeux de l'Académie: M. Baumé a été préſent à quelques-unes & notamment à la neuvième; & M. du Fourni de Villiers, connu avantageuſement de l'Académie, a bien voulu concourir aux neuf dernières.

La plupart des diamans qui ont ſervi dans ces expériences,

ſont encore les mêmes qui avoient été donnés à M. Cadet, par M. de Saint-Vincent, & qui avoient déjà éprouvé l'action du feu dans des vaiſſeaux fermés.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Décrépitation du Diamant au foyer du verre brûlant.

Un diamant du poids de 3 grains neuf ſeizièmes, poids de marc, a été expoſé à l'effet du grand verre brûlant; l'ayant approché un peu trop bruſquement du foyer, il a décrépité ſur le champ avec violence, il s'eſt étonné & fendillé comme il arrive au criſtal de roche, & il s'en eſt détaché pluſieurs éclats, dont un particulièrement étoit très-viſible à la vue ſimple: la plupart des autres n'étoient bien ſenſibles qu'à la loupe. On a retiré ce diamant preſque ſur le champ; en l'examinant au microſcope, on a remarqué un grand nombre d'éclats qui étoient encore prêts à s'en détacher.

RÉFLEXIONS.

Cette expérience eſt la même que celle faite à Florence par les ordres du Grand Duc de Toſcane, elle prouve que le diamant eſt ſuſceptible de décrépitation lorſqu'on l'expoſe à l'action d'une chaleur trop vive & ſur-tout lorſqu'il eſt en même temps rafraîchi par le contact d'un air froid.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Évaporation du diamant à l'air libre.

Un diamant brut, du poids de 2 grains treize ſeizièmes, a été expoſé au foyer du même verre ſur une capſule de porcelaine dure de Séve; on l'a échauffé lentement & avec la plus grande précaution, & on eſt enfin parvenu à l'amener juſqu'au vrai foyer de la lentille ſans décrépitation; bientôt il a paru rouge-blanc, & l'ayant retiré au bout de dix minutes, il avoit perdu trois quarts de grain & un trente-deuxième de ſon poids; il étoit terne, & vu à la loupe il paroiſſoit criblé de trous.

TROISIÈME

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Autre évaporation du diamant à l'air libre.

Le même diamant a été remis au foyer, d'abord sur un support de grès dur, tel qu'on l'emploie pour les pavés de Paris; ensuite sur un support de porcelaine, & il a donné les mêmes phénomènes: en vingt minutes environ, il a été totalement évaporé.

On avoit cru d'abord observer pendant cette expérience, une vapeur ou poussière légère qui s'élevoit du diamant, mais on a remarqué la même chose en présentant le grès seul au foyer, & on a conclu que cet effet tenoit sans doute au mouvement du courant d'air occasionné par la chaleur du foyer.

QUATRIÈME EXPERIENCE.

Poudre de diamant à l'air libre sur un support de porcelaine.

Un grain de poudre de diamant, mis dans une capsule de porcelaine & exposé au foyer du verre ardent, a paru d'abord répandre un peu de fumée; cette poudre a ensuite diminué peu-à-peu, & s'est enfin entièrement dissipée; il n'est resté qu'une tache jaune vitrifiée sur la capsule de porcelaine, à l'endroit qui avoit été couvert par la poudre de diamant.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Poudre de diamant à l'air libre sur un support de grès.

Les phénomènes ont été exactement les mêmes que dans l'expérience précédente, & il est resté de même un enduit vitreux jaunâtre sur le grès.

RÉFLEXIONS.

On ne doit pas conclure de cette expérience, non plus que de la précédente, que le diamant soit véritablement le

fondant de la porcelaine ou du grès, & qu'il soit susceptible de se vitrifier avec eux. Il est possible que cet effet dépende des matières étrangères qui se trouvent mêlées avec la poudre de diamant; ce corps très-dur ne se réduit pas facilement en poudre, & il attaque nécessairement les instrumens dont on se sert pour le diviser: il faudroit donc avoir recours à des moyens particuliers pour obtenir de la poudre de diamant très-pure, & on n'a pas cru que cette expérience fût assez intéressante pour devoir la porter plus loin.

Ces cinq premières expériences ne faisoient encore que confirmer ce qui avoit été déjà observé; mais il étoit question de découvrir ce que devenoit le diamant lorsqu'il s'évaporoit: en effet, parmi les corps volatils ou combustibles, il n'en est pas qui ne donnent, ou des vapeurs acides, comme le phosphore & le soufre, ou des émanations quelconques, fluides ou concrètes, mais susceptibles d'être rassemblées en employant des appareils convenables; il n'étoit possible de retenir celles émanées du diamant, qu'en opérant dans des vaisseaux fermés, & c'est le but que je me suis proposé dans les expériences qui suivent.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Évaporation du diamant dans une cornue, par la chaleur du verre ardent.

Préparation de l'expérience.

J'ai fait exécuter dans une verrerie une cornue de verre blanc de trois pintes environ de capacité; j'ai fait pratiquer à son fond, dans la verrerie même, une ouverture ou grande tubulure de deux pouces & demi de diamètre, garnie d'un rebord, & j'y ai fait ajuster une virole de cuivre bien mastiquée, avec un mastic dur & solide; enfin cette virole recevoit une platine de cuivre à vis qui fermoit très-exactement, au moyen de l'interposition d'un cuir. Tout étant

ainſi préparé, j'ai introduit, par cette ouverture inférieure, un piédeſtal de verre, ſurmonté d'une petite capſule de porcelaine dure, laquelle contenoit onze diamans peſant enſemble 15 grains forts, poids de marc; après quoi j'ai refermé la virole, & j'ai bouché aſſez légèrement le bec de la cornue, pour que la dilatation de l'air intérieur n'occaſionnât pas de fracture; enfin j'ai préſenté l'appareil, ainſi diſpoſé, au foyer du verre ardent.

Effet.

Pendant neuf minutes que les diamans ont été expoſés au foyer de la lentille, on a jugé qu'il s'en élevoit une fumée ſenſible; j'ai vu très-diſtinctement un de ces diamans bouillonner, & jeter des vapeurs en dehors, mais il ne s'eſt rien condenſé aux parois de la cornue; on n'a pas non plus ſenti d'odeur marquée au bec de ce même vaſe, ſi ce n'eſt celle du maſtic qui s'échauffoit; enfin, au bout de neuf minutes, le maſtic s'étant trouvé beaucoup plus ramolli que nous ne penſions, la virole s'eſt détachée par ſon propre poids, & le ſupport de criſtal, la capſule & les diamans ſont tombés; ce qui a empêché de pouſſer plus loin l'expérience: deux des diamans même ont été perdus dans le ſable du jardin de l'Infante, où ſe faiſoit cette expérience, & cette circonſtance a empêché de conſtater la diminution de poids qu'ils avoient éprouvée.

Réflexions.

Il eſt très-probable que l'eſpèce de fumée qu'on a remarquée dans cette expérience, tenoit à l'évaporation du maſtic; on verra en effet qu'elle n'a eu lieu dans aucune des expériences qui ſuivent.

Cette expérience n'ayant point eu le ſuccès que j'en attendois, j'ai eu recours au moyen qui ſuit.

SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

Évaporation du diamant ſous une cloche de verre plongée dans de l'eau.

Préparation de l'expérience.

J'ai mis ſur un teſſon de porcelaine très-réfractaire creuſé convenablement, neuf diamans du poids de 11 grains $\frac{3}{16}$; le teſſon a été placé ſur un ſupport de criſtal, lequel a été lui-même aſſujetti au milieu d'une jatte de faïence émaillée, remplie d'eau diſtillée; l'appareil a été recouvert avec une cloche de criſtal de ſix pouces & demi de diamètre; enfin, j'ai ſucé l'air avec un tube de verre recourbé, pour faire monter l'eau à une hauteur convenable, & j'ai fait tomber ſur les diamans, au travers de la cloche, le foyer du verre brûlant.

EFFET.

On n'a obſervé dans cette expérience, ni vapeur ni fumée ſenſible; mais on a remarqué très-diſtinctement que le diamant qui étoit au centre du foyer, bouillonnoit & jetoit des bulles; en quinze minutes il a diminué des trois quarts, & l'endroit du teſſon de porcelaine, ſur lequel il repoſoit, a été creuſé & vitrifié; enfin, en vingt minutes il a été entièrement évaporé; quelques minutes après nous étant aperçus que l'air de l'intérieur de la cloche étoit tellement dilaté, qu'il étoit près de paſſer par-deſſous les bords, nous avons cru devoir ceſſer l'expérience.

Lorſque l'appareil a été ſuffiſamment refroidi, nous avons levé la cloche avec précaution, & nous n'avons remarqué aucune odeur ſenſible; les gouttes de liqueur qui s'étoient attachées aux parois de la cloche, pendant le refroidiſſement, ne nous ont pas paru avoir aucun autre goût que celui de l'eau diſtillée; mais pour nous aſſurer plus particulièrement de leur nature, nous avons rincé cette cloche avec environ une

demi-once d'eau diſtillée, que nous avons mis ſoigneuſement à part: nous avons de même raſſemblé toute l'eau qui étoit dans la jatte ou cuvette, & nous avons réſervé le tout pour en faire un examen ſcrupuleux.

Les huit diamans reſtans ne ſe ſont plus trouvés peſer que 7 grains $\frac{1}{8}$, poids de marc, au lieu de 11 grains $\frac{3}{16}$, quelques-uns étoient de couleur noire; d'autres étoient brunâtres; quelques-uns enfin étoient griſâtres, & avoient conſervé une demi-tranſparence; tous étoient ſpongieux & caverneux comme des pierres de meulières & des pierres-ponces, & leur ſurface étoit remplie d'aſpérités & d'inégalités; un ſeul étoit creuſé en forme de calotte.

M. Macquer ayant eu la complaiſance de ſe charger de les examiner au microſcope, en porta lui-même le rapport ſur notre journal d'expériences, & je vais le tranſcrire ici.

« Ces diamans vus au microſcope avec une lentille foible, d'un pouce de foyer, paroiſſoient ſingulièrement altérés, & « comme détruits en grande partie; la plupart étoient caverneux « comme des pains de fleur d'orange: un d'entr'eux paroiſſoit « feuilleté comme un ſpath; un autre étoit creuſé dans ſon « intérieur, & le creux ſe voyoit à l'extérieur par une fente « longitudinale; deux de ces diamans, du nombre deſquels « étoit celui qui avoit été creuſé en calotte, étoient percés à jour; « aucun ne paroiſſoit décidément fondu & vitrifié, mais le « ſupport de porcelaine, ſur lequel ils avoient été placés, étoit « marqué de beaucoup de petites taches noirâtres & brillantes, « & ces taches vues au microſcope étoient des pointes vraiment « vitrifiées, dont quelques-unes paroiſſoient même cavées: on « diſtinguoit encore ſur la plupart des parcelles de diamant, « & le tout étoit entouré d'un cercle jaunâtre en forme de « ſimple tache ou maculature ſuperficielle ».

RÉFLEXIONS.

Il réſulte de ces dernières obſervations, 1.° qu'il s'eſt détaché du diamant, pendant ſon évaporation, de petites

parcelles qui ont ſauté à quelque diſtance ; 2.° qu'il eſt probable que ces petites parcelles de diamans ont ſervi de fondans à la porcelaine, qu'elles en ont procuré la vitrification & la fuſion, puiſque la porcelaine ſeule, & dans les endroits où elle n'avoit pas eu le contact des parcelles de diamans, n'a donné aucun ſigne de vitrification, & eſt demeurée dans le même état qu'elle étoit avant d'avoir été préſentée au foyer.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

Examen de l'eau diſtillée, employée dans la ſeptième Expérience.

L'eau qui avoit ſervi à rincer la cloche dans l'expérience précédente, a été ſoumiſe à toutes les épreuves qui ont paru les plus propres à déterminer la nature des ſubſtances étrangères qu'elle contenoit. On en a mis dans différens vaſes, & on a verſé ſéparément dans chacun de la diſſolution d'argent, de la diſſolution de mercure & de l'alkali fixe, ſans qu'aucun de ces mélanges y aient occaſionné le moindre précipité ni le moindre louche ; enfin, on en a fait évaporer une portion dans une capſule de verre, & elle n'a laiſſé, pour tout réſidu, qu'un léger enduit de terre, telle qu'on l'obtient de l'eau diſtillée la plus pure ; il en a été de même de l'eau contenue dans la jatte ou cuvette, elle ne différoit en rien de l'eau diſtillée ; l'examen le plus ſcrupuleux n'a pu nous faire retrouver, au fond du vaſe, aucun atome de poudre de diamant.

RÉFLEXIONS.

Dans toutes les expériences dont je viens de rendre compte, nous avions toujours opéré par un temps clair & ſerein, & nous avions joui de toute l'activité du foyer du grand verre brûlant ; un haſard heureux nous fit opérer, le 14 Août 1773, par un ciel ſans nuage, à la vérité, mais chargé d'une eſpèce de brume légère ou brouillard qui ôtoit au Soleil une grande partie de ſon action : ce fut ſans doute

en raiſon de cette circonſtance que nous obtinmes, d'une manière plus marquée, un phénomène qui nous avoit échappé juſqu'alors, & dont je vais rendre compte.

NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

Expoſition du diamant au foyer de la lentille du Palais royal, à une chaleur modérée.

Préparation de l'expérience.

On a mis ſix diamans, peſant enſemble 5 grains $\frac{13}{16}$ poids de marc, dans une capſule de porcelaine; on les a recouverts d'une cloche de criſtal renverſée dans de l'eau, & du reſte on a tout diſpoſé comme dans l'expérience précédente.

EFFET.

Comme la chaleur du foyer a été moins forte dans cette expérience que dans les précédentes, les phénomènes ont été moins prompts & moins ſenſibles; au bout de ſept minutes cependant on a vu bouillonner à la ſurface le plus gros des diamans; du reſte, on a ſeulement remarqué que la plupart devenoient très-noirs, & on les a retirés au bout de 35 minutes; cinq de ces diamans ſe ſont trouvés, après l'expérience, d'un noir mat & velouté, préciſément comme s'ils avoient été enduits de noir de fumée à la flamme d'une lampe, ils noirciſſoient les doigts & le papier, préciſément comme auroit fait une ſubſtance charbonneuſe ou du noir de fumée.

Ces mêmes diamans avoient perdu environ le quart de leur poids; examinés au microſcope, ils ont préſenté, indépendamment du noir velouté dont on vient de parler, des creux irréguliers & des inégalités ſemblables à celles obſervées dans l'expérience précédente; on apercevoit en outre au milieu du noir, des filamens blancs, comme cotonneux & un peu ramifiés.

Le ſixième de ces diamans, qui étoit le plus gros, avoit

conſervé ſa couleur griſe blanchâtre, & une demi-tranſparence dans ſa partie ſupérieure ; il paroiſſoit peu altéré dans cette partie, mais celle inférieure, celle qui touchoit le creuſet étoit noire, à la vérité un peu moins que ne l'étoient les cinq autres diamans.

Cette ſubſtance charbonneuſe n'étoit que ſuperficielle aux diamans, & c'eſt ce dont on s'eſt aſſuré en broſſant un des plus noirs dans de l'eau; la couche noire s'eſt aiſément détachée, & le diamant, après en avoir été dépouillé, avoit un peu de tranſparence, quoique néanmoins il conſervât encore une teinte brune aſſez forte.

Réflexions.

Il paroîtroit, d'après cette expérience, 1.° que le diamant eſt ſuſceptible de ſe réduire en charbon dans quelques circonſtances, & qu'il rentre par conſéquent dans la claſſe des corps combuſtibles, comme M. Macquer l'a annoncé le premier; 2.° que cet effet n'a lieu qu'à ſa ſurface; 3.° que la plus grande partie de cette matière charbonneuſe n'a point d'adhérence avec le diamant, tandis qu'une petite portion lui tient plus fortement; 4.° enfin, que la couleur noire obſervée dans les diamans qui ont été expoſés à la violence du feu dans les vaiſſeaux fermés, (circonſtance que nous avons obſervée les premiers, M. Macquer, M. Cadet & moi) tient probablement à la même cauſe.

Dixième Expérience.

Répétition de la même expérience.

Préparation de l'expérience.

Cette expérience étoit aſſez intéreſſante pour mériter d'être répétée pluſieurs fois; on y a procédé en conſéquence avec le même appareil, c'eſt-à-dire, ſous une cloche de verre renverſée dans de l'eau, & on s'eſt ſervi, pour plus de ſûreté, d'un diamant roſe taillé, un peu jaunâtre & égriſé dans quelques endroits, il peſoit 2 grains $\frac{9}{16}$ poids de marc; le ciel

ciel n'étoit pas ce jour-là parfaitement pur, & la chaleur du Soleil n'avoit qu'une médiocre activité.

EFFET.

Une minute environ après que le diamant a été présenté au foyer, il a pris une couleur terne, puis il est devenu noir, & on en a vu sortir de petits bouillons; enfin, ses angles & ses facettes se sont insensiblement effacés: dans des momens, il étoit très-noir, dans d'autres, il l'étoit beaucoup moins: au bout de dix à douze minutes, un vent frais ayant frappé sur la cloche qui étoit fort échauffée, elle s'éclata & il s'établit une communication d'air de l'intérieur à l'extérieur de la cloche; le diamant resta néanmoins encore quelques minutes exposé au foyer, après quoi il fut retiré.

Sa partie supérieure n'étoit point transparente, mais elle n'étoit pas noire, la partie inférieure, c'est-à-dire celle qui touchoit à la capsule, l'étoit au contraire; cette substance noire étoit superficielle, comme dans l'expérience précédente; elle s'enlevoit aisément & noircissoit les doigts & le papier: le diamant dépouillé de cette enveloppe étoit demi-transparent; son poids n'étoit diminué que de $\frac{3}{16}$ de grains.

ONZIÈME EXPÉRIENCE.

Diminution du volume de l'air dans lequel on fait évaporer le diamant.

Préparation de l'Expérience.

On a mis dans une capsule de porcelaine, cinq diamans du poids de 4 grains $\frac{1}{2}$ foibles, qui étoient déjà noirs, & qui avoient passé précédemment au foyer; on a établi la capsule sur un support de cristal, comme dans les expériences précédentes; on a recouvert le tout avec une cloche de verre plongée dans de l'eau distillée; enfin, on a observé le degré que marquoit le thermomètre dans la salle où l'appareil a été disposé, & on a marqué avec une bande de papier, le niveau

exact de l'eau. Lorſque tout a été ainſi préparé, les diamans ont été expoſés pendant 16 minutes à travers la cloche de verre à l'action du foyer; après quoi, ayant laiſſé refroidir l'appareil, l'eau eſt remontée inſenſiblement au-deſſus de ſon niveau, & ayant meſuré exactement le diamètre de la cloche, & la différence de hauteur de l'eau avant & après l'opération, j'ai reconnu que la diminution du volume de l'air, avoit été de 8 pouces cubiques : la capacité de la partie vide de la cloche étoit de 60 pouces environ.

Cet appareil eſt demeuré dans le même état pendant quatre jours, dans une ſalle baſſe du Louvre, près le jardin de l'Infante, où la température ne varioit que très-peu, & ayant ſaiſi pour l'obſerver les différens inſtans où le thermomètre marquoit préciſément le même degré qu'avant l'opération, j'ai reconnu que la diminution du volume de l'air étoit conſtamment de 8 pouces $\frac{1}{10}$, ſans augmentation ni diminution.

DOUZIÈME EXPÉRIENCE.

État de l'air dans lequel l'évaporation du diamant a été faite.

Au bout de quatre jours, la diminution de volume qu'avoit éprouvé l'air, ayant été bien reconnue, j'ai retourné avec célérité la cloche qui recouvroit les diamans; mais en même temps avec les précautions néceſſaires, pour éviter que l'air ne s'en renouvelât entièrement; j'y ai verſé quelques onces d'eau de chaux; ſur le champ cette eau a été précipitée de la même manière qu'il lui arrive avec le fluide élaſtique ou *gas*, dégagé des efferveſcences, des fermentations & des réductions métalliques.

RÉFLEXIONS.

Les diamans qui avoient ſervi à cette expérience, ne peſoient plus que 2 grains $\frac{3}{8}$, ils avoient par conſéquent perdu 2 grains $\frac{1}{8}$, c'eſt-à-dire près de la moitié de leur poids; ils étoient tous quatre preſque tranſparens, griſâtres

& assez lisses à la surface; un d'eux étoit noir d'un côté seulement, & teignoit le papier en noir; mais cette couleur comme dans les expériences précédentes, n'étoit que superficielle, la petite couche qu'elle formoit se détachoit aisément, & le diamant par-dessous étoit demi-transparent.

TREIZIÈME EXPÉRIENCE.

Examen de la terre calcaire précipitée de l'eau de chaux, par l'air qui a servi à l'évaporation du diamant.

Il étoit question de déterminer la cause qui avoit ainsi précipité la chaux, & qui l'avoit rendue tout-à-coup insoluble dans l'eau. J'ai rassemblé très-soigneusement dans cette vue, toute la terre qui s'étoit précipitée dans l'expérience précédente, & d'après un examen scrupuleux, j'ai reconnu, 1.° qu'elle n'avoit plus ni causticité ni solubilité dans l'eau, ni enfin aucune des propriétés de la chaux, mais qu'elle s'étoit convertie en une véritable craie; 2.° qu'elle avoit repris la propriété de faire effervescence avec les acides; 3.° enfin que cette effervescence étoit dûe au dégagement de ce même fluide élastique, aujourd'hui si connu sous le nom d'*air fixe* ou de *gas;* on sait que ce dégagement n'a pas lieu, ou n'a lieu qu'en très-petite quantité dans la combinaison des acides avec la chaux.

RÉFLEXIONS.

Il est difficile de douter d'après cette expérience, que l'air dans lequel on a fait évaporer du diamant n'ait acquis au moins en partie, les propriétés de ce qu'on appelle *air fixe;* qu'il ne se soit rapproché jusqu'à un certain point de la nature du fluide élastique ou *gas,* qui se dégage des effervescences, des fermentations & des réductions métalliques, par le phlogistique, & qu'il n'ait acquis par-là la propriété de se combiner avec les terres calcaires & les alkalis, propriété que n'a pas l'air de l'atmosphère. Il resteroit à déterminer si les émanations du diamant, autrement dit si le diamant réduit en vapeurs est de l'*air fixe* ou du *gas,* ou bien si ce sont ces mêmes

vapeurs du diamant qui combinées avec l'air commun, le constituent dans l'état d'air fixe, c'est ce qu'il ne m'a pas été possible de déterminer jusqu'ici : quoi qu'il en soit, il est nécessaire de faire remarquer que l'air dans lequel on a évaporé du diamant, diffère en un point du gas des effervescences & des fermentations, c'est en ce qu'il est moins susceptible de se combiner avec l'eau; on a vu en effet qu'il est demeuré quatre jours sur de l'eau, sans qu'il y ait eu de diminution sensible dans son volume.

Cette dernière circonstance, je veux dire la facilité avec laquelle l'eau absorbe l'air fixe ou le gas, m'a fait naître quelqu'inquiétude sur les expériences précédentes, & j'ai commencé à craindre que la diminution du volume de l'air pendant l'évaporation du diamant observée dans la *onzième expérience*, ne tînt à cette cause; & pour lever toute espèce de doute, je me suis proposé de répéter la même expérience en employant un fluide incapable de se combiner avec l'air fixe, du moins à froid, & j'ai choisi le mercure.

QUATORZIÈME EXPÉRIENCE.

Évaporation du diamant sous une cucurbite de verre blanc, renversée dans du mercure.

Préparation de l'Expérience.

J'ai fixé avec de la cire verte, au milieu d'une terrine de terre vernissée, une petite colonne de cristal; j'ai placé dessus une capsule de porcelaine contenant cinq diamans du poids de 4 grains $\frac{1}{4}$ foibles, j'ai versé ensuite dans la terrine, soixante-dix livres de mercure, & j'ai recouvert les diamans & le support avec une cucurbite de verre blanc qui étoit percée d'un petit trou, enfin en suçant je suis parvenu (il est vrai avec quelque difficulté) à élever le mercure à une hauteur convenable, & j'ai bouché le trou avec du lut gras.

EFFET.

Sitôt que l'appareil a été soumis à l'action du foyer, le

mercure a baissé en raison de la dilatation de l'air contenu dans la cucurbite; mais bientôt le lut s'étant trop ramolli à cause de la chaleur communiquée à la cucurbite, il s'est introduit de l'air par le trou, & le mercure a redescendu jusqu'à son niveau. J'ai continué malgré cet accident l'opération, & je n'ai retiré les diamans qu'au bout de douze minutes; la cornue ayant été promptement retournée, j'y ai introduit de l'eau de chaux comme dans l'expérience précédente, & elle y a été complètement précipitée; les diamans se sont trouvés avoir perdu 1 grain $\frac{1}{4}$ de leur poids, ils étoient la plupart couverts de bouillons; l'un d'eux avoit une crevasse d'où sortoit une ramification ou espèce d'efflorescence jaune, comme de fer rouillé.

QUINZIÈME EXPÉRIENCE.

Seconde évaporation du diamant sous une cucurbite de verre blanc, renversée dans du mercure.

Préparation de l'Expérience.

J'ai employé le même appareil que dans l'expérience précédente, avec cette différence qu'au lieu du trou pratiqué à la cucurbite pour pomper l'air & élever le mercure, j'ai employé un tube ou siphon de verre recourbé, qui passoit par-dessous la cucurbite & qui établissoit une communication de l'extérieur à l'intérieur. J'ai enfermé sous cette cucurbite cinq diamans pesant 3 grains $\frac{3}{4}$ foibles, après quoi j'ai élevé le mercure à une hauteur convenable en suçant par le tube ou siphon.

EFFET.

La dilatation de l'air contenu sous la cucurbite a d'abord fait baisser le mercure; lorsqu'ensuite au bout de quinze minutes l'appareil a été retiré du foyer, il est remonté insensiblement jusqu'à son niveau & l'a même passé de quelque chose, mais extrêmement peu; de sorte qu'il paroît probable que la diminution du volume de l'air dans lequel on

fait évaporer le diamant, dépend en grande partie de ce que la portion d'air qui se trouve dans l'état de *gas* ou d'air fixe, rencontre un fluide avec lequel il s'incorpore & se combine.

De l'eau de chaux introduite sous la cloche y a été précipitée sur le champ : les diamans ne pesoient plus que 2 grains $\frac{1}{8}$, ils avoient par conséquent perdu 1 grain $\frac{5}{8}$ de leur poids; des cinq, quatre étoient demi-transparens un peu plombés, le cinquième avoit une veine noire.

RÉFLEXIONS sur les Expériences précédentes.

Les expériences rapportées dans la première partie de ce Mémoire, & sur-tout l'observation faite par M. Macquer, conduisoient à regarder le diamant comme un corps combustible; tout ce qu'on a vu jusqu'ici tend encore à confirmer cette opinion: en effet, comme les corps combustibles, il paroît que le diamant lorsque la chaleur n'est pas trop vive & qu'il est renfermé dans une portion d'air qui ne se renouvelle pas, se réduit en une matière noire & charbonneuse; comme eux, il fait éprouver une diminution de volume à l'air dans lequel on le brûle lorsque cet air a le contact de l'eau; enfin, la propriété remarquable qu'il a de changer en un fluide élastique analogue au *gas* & combinable avec les terres calcaires, l'air dans lequel on le brûle, est encore un caractère qui lui est commun avec un grand nombre de corps combustibles; on sait en effet que de l'air renfermé sous une cloche acquiert la propriété de précipiter l'eau de chaux lorsqu'on y brûle du charbon, une chandelle, une bougie, de l'esprit-de-vin, de l'éther & beaucoup d'autres substances.

Quelque grande que fût cette analogie entre le diamant & les corps combustibles, j'ai pensé qu'il étoit possible de la porter plus loin encore; & voici à cet égard le raisonnement que j'ai fait. Si le diamant est véritablement un corps combustible, il ne doit brûler & se dissiper que dans les mêmes circonstances où brûlent les corps reconnus pour combustibles, il ne doit donc pas se détruire par combustion

dans le vide de la machine pneumatique ni dans l'air fixe ou le *gas*, ni dans aucun autre fluide quel qu'il ſoit qui s'oppoſe à la combuſtion.

Ces réflexions m'ont conduit à différentes expériences qui ne ſont pas auſſi complètes que je l'aurois deſiré; je ne rendrai compte ici que de celles faites dans l'air des efferveſcences; quant à celles faites dans le vide de la machine pneumatique, la difficulté qu'elles préſentent & l'imperfection des appareils dont je me ſuis ſervi juſqu'ici, ne m'a pas permis d'obtenir des réſultats aſſez ſûrs pour pouvoir être communiqués au public.

SEIZIÈME EXPÉRIENCE.

Évaporation du diamant dans le fluide élaſtique ou gas, dégagé des efferveſcences.

Préparation de l'Expérience.

J'ai placé comme à l'ordinaire, dans une capſule de porcelaine & ſur un ſupport de criſtal, quatre diamans peſant 4 grains foibles; ces diamans avoient déjà paſſé au foyer; l'un étoit demi-tranſparent, un ſecond étoit noir & charbonneux d'un côté; enfin les deux autres étoient parfaitement noirs de toutes parts. J'ai empli de mercure la petite terrine au milieu de laquelle étoit fixé le ſupport; j'ai renverſé ſur les diamans une cucurbite de verre blanc ſans pontis, que j'avois préalablement remplie du gas des efferveſcences, ou plus exactement de fluide élaſtique dégagé de la diſſolution de la craie par l'acide vitriolique: je n'aſſurerois pas qu'en retournant la cucurbite, il ne ſe fût mêlé quelque peu d'air commun avec le gas qu'elle contenoit; mais la quantité n'a pas été certainement conſidérable; le gas d'ailleurs peut être mêlé d'une aſſez grande quantité d'air de l'atmoſphère, ſans être pour cela propre à entretenir la combuſtion.

EFFET.

Le Soleil étoit vif, & quelques inſtans après que les diamans

ont été présentés au foyer, ils sont devenus rouges candescens; cette circonstance n'est peut-être pas particulière à cette expérience: mais on n'avoit pas pris dans les précédentes les mêmes précautions pour s'en assurer: bientôt après la petite couche noire qui les recouvroit s'est dissipée en entier, ils sont devenus d'une transparence mate, qu'ils ont conservée pendant toute l'opération; peu-à-peu on a remarqué que leur surface devenoit raboteuse, grumelée, couverte de bouillons, & ils ont pris l'apparence de pierres-ponces, ou plutôt de pierres de meulières, à la transparence près. Insensiblement, les impressions concaves se sont augmentées de plus en plus, & les diamans ont visiblement paru diminués. Ces observations tombent principalement sur les deux qui occupoient le dessus, les deux autres étoient cachés par-dessous, & on ne pouvoit les observer. Au bout de trois quarts d'heure on a aperçu à l'un des deux diamans supérieurs une gersure qui a ensuite augmenté; l'autre diamant supérieur paroissoit comme feuilleté; au bout d'une heure, ces deux diamans étoient assez diminués pour laisser distinguer ceux de dessous, & ces derniers même paroissoient avoir perdu plus que les autres de leur volume. Tel étoit leur état au bout d'une heure dix minutes qu'a duré l'opération; après quoi on a cru à propos de les retirer.

Le volume de l'air, après le refroidissement, s'est trouvé diminué de quatre pouces cubiques, les diamans au lieu de 4 grains ne pesoient plus que 2 grains $\frac{3}{16}$, c'est-à-dire, qu'ils n'avoient pas perdu tout-à-fait moitié de leur poids; ils étoient transparens & sans aucune apparence de parties noires & charbonneuses.

Réflexions.

L'évaporation du diamant dans cette expérience a été infiniment plus lente que dans toutes les précédentes, on a fait à peine, pendant les soixante-dix minutes qu'elle a duré, ce que dans les expériences 2, 3 & 7, on avoit fait en dix, quinze & vingt minutes, & cette circonstance donne la clef de tous les phénomènes

phénomènes obſervés ſur le diamant. On voit évidemment que ce corps lorſqu'il eſt dans des circonſtances favorables à la combuſtion, ſe détruit & ſe diſſipe par une chaleur modérée; que lorſqu'au contraire, les circonſtances s'oppoſent à ſa combuſtion, il devient un corps très-réfractaire, & qui ne cède qu'à l'action d'un agent très-vif & très-long-temps continué.

Cette propriété n'eſt pas particulière au diamant, elle eſt commune à preſque tous les corps, qui comme lui ſont combuſtibles; le ſoufre que le moindre contact d'un corps en ignition, ſuffit pour faire brûler, demande un degré de feu plus fort pour être ſublimé & volatiliſé. Il en eſt de même du phoſphore, du camphre, de l'eſprit-de-vin, des huiles eſſentielles, &c. ces ſubſtances & une infinité d'autres ſont, ſuivant les circonſtances, ou combuſtibles ou volatiles: elles ſont combuſtibles à l'air libre & volatiles dans les vaiſſeaux fermés; bien plus, je vais faire voir que le charbon lui-même, ce corps que l'on regarde comme une des ſubſtances les plus réfractaires de la Nature, eſt préciſément dans le même cas, que non-ſeulement il eſt combuſtible à un degré de chaleur médiocre, comme on le ſait, mais encore qu'il eſt volatil toutes les fois que les circonſtances s'oppoſent à ſa combuſtion, & qu'on lui fait ſubir un degré de chaleur ſuffiſant.

DIX-SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

Évaporation du charbon dans le fluide élaſtique, dégagé des efferveſcences.

Préparation de l'Expérience.

J'ai mis dans une capſule de porcelaine dure, 12 grains de braiſe de Boulanger, en poudre fine, & qui avoit déjà ſubi une longue calcination dans les vaiſſeaux fermés: cette capſule a été placée ſur un piédeſtal ordinaire, & j'ai

introduit le tout ſous une cucurbite renverſée dans du mercure, & dans laquelle j'avois préalablement ſubſtitué à l'air ordinaire du gas dégagé de la diſſolution de la craie dans l'acide vitriolique; lorſqu'au moyen du ſiphon dont j'ai parlé plus haut, le mercure a été élevé à une hauteur convenable, j'ai fait tomber le foyer du verre brûlant ſur la poudre de charbon.

Effet.

Dans le premier inſtant, il s'eſt fait un petit mouvement d'ébullition qui n'étoit autre choſe que l'effet de la dilatation ſubite de l'air logé entre les molécules du charbon en poudre; cet effet purement mécanique a lieu à l'égard de preſque toutes les matières en poudre qu'on préſente au verre brûlant: preſque en même temps, une petite portion du charbon de la ſurface a brûlé & s'eſt réduite en cendre; bientôt cette cendre s'eſt vitrifiée, & s'eſt fondue en globules vitreux extrêmement petits, les uns laiteux & opaques, les autres preſque tranſparens; ce premier effet n'a duré que quelques minutes, & il n'a eu lieu que ſur une quantité très-petite de poudre de charbon: on croit même pouvoir aſſurer, autant qu'on peut s'en rapporter à l'évaluation, qu'il n'y a pas eu un quart de grain de charbon conſommé par cette première combuſtion.

Ce premier inſtant paſſé, la ſurface du charbon a conſervé ſa noirceur, mais on n'a pas été long-temps à s'apercevoir qu'il ſe formoit un creux ſenſible à l'endroit où tomboit le foyer; ce n'étoit plus l'effet d'une combuſtion, car il n'y avoit pas la plus légère apparence de cendre: lorſqu'en tournant l'appareil, on faiſoit tomber le foyer dans un endroit qui n'avoit point encore été expoſé à ſon action, en quelques minutes, on voyoit l'impreſſion ſe former & ſe creuſer de plus en plus. Cette diminution de volume du charbon étoit accompagnée d'une vapeur ou plutôt d'une fumée très-viſible qui circuloit dans la cucurbite, & qui rendoit très-ſenſible le cône de lumière qui la traverſoit.

Au bout de trois quarts d'heure, la diminution du charbon étoit si considérable qu'il n'occupoit plus que le fond du petit vase dans lequel il avoit été placé, & comme le Soleil étoit fort oblique, les bords de la capsule faisoient ombre, & il n'y avoit plus qu'une portion du foyer qui tombât sur le charbon. Ces circonstances ont obligé de cesser l'opération au bout d'une heure de bon soleil. La surface du mercure a remonté à mesure que l'appareil s'est refroidi, & il s'est fixé à 1 pouce 9 lignes plus bas qu'avant l'opération; la cucurbite avoit en cet endroit 4 pouces 11 lignes de diamètre; la production d'air a donc été de 31 pouces cubiques environ.

L'opération finie, on a retourné la cucurbite; elle avoit dans son intérieur une odeur approchante de celle du foie de soufre, & assez semblable en même-temps à celle d'une lessive de soude; l'air qu'elle contenoit étoit toujours au moins en partie dans l'état d'air fixe & précipitoit l'eau de chaux: après l'introduction de l'eau de chaux, l'odeur de foie de soufre s'est changée en une odeur savonneuse.

Le charbon retiré ne s'est plus trouvé peser que 7 grains $\frac{3}{8}$, il y en avoit eu par conséquent 5 grains $\frac{1}{8}$ qui s'étoient évaporés & qui avoient été réduits en un fluide élastique ou espèce d'air.

Avant de faire aucune réflexion sur cette expérience, je passe aux circonstances de la destruction du charbon dans l'air ordinaire.

DIX-HUITIÈME EXPÉRIENCE.

Combustion & évaporation du charbon, dans l'air commun, sous une cucurbite de verre, renversée dans du mercure.

Préparation de l'Expérience.

L'appareil de cette expérience ne différoit en rien de celui de la précédente, avec cette différence seulement que la cucurbite au lieu de fluide élastique dégagé d'une effervescence, contenoit de l'air ordinaire: la quantité de braise de Boulanger contenue dans la capsule étoit de 20 grains.

Effet.

Sitôt que le charbon a été présenté au foyer, il s'est fait à la surface une couche de cendre, & beaucoup plus considérable que dans l'expérience précédente; on croit cependant pouvoir assurer que la quantité de charbon consommé par cette combustion n'a pas excédé 1 grain: bientôt la combustion a cessé, & la cendre s'est vitrifiée en petits globules vitreux demi-transparens; après quoi la surface du charbon a paru noire dans les intervalles que laissoient les globules vitreux.

Le charbon est demeuré ainsi exposé au foyer pendant une heure, mais les vapeurs n'ont pas été aussi visibles que dans l'air fixe, & le cône de lumière n'a pas été aussi-bien marqué; on a couvert brusquement, & à plusieurs reprises, le verre brûlant, pour faire ombre, & on s'est assuré que le charbon étoit rouge, mais il cessoit de l'être presque dans la seconde: on a vu de temps en temps pendant le cours de cette opération, partir du charbon comme de petites étincelles qui sautoient & qui sembloient éclater à plusieurs pouces de hauteur; mais on n'a pu s'assurer si ces petits corps étoient brillans par eux-mêmes, ou simplement en raison des facettes qu'ils présentoient à la lumière & qui la réfléchissoient.

Il se formoit insensiblement, comme dans l'expérience précédente, des impressions profondes dans la poudre de charbon, à l'endroit où tomboit le foyer; il étoit évident que la combustion n'avoit eu lieu que dans le premier instant, & qu'ensuite il y avoit eu volatilisation. L'opération finie, il s'est trouvé une augmentation du volume de l'air de 15 à 16 pouces, & le charbon s'est trouvé diminué de 6 grains justes.

DIX-NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

Examen de l'état de l'air dans lequel s'est volatilisé du Charbon.

La cucurbite à la suite de l'expérience précédente, a été

retournée avec aſſez de promptitude & de précaution pour qu'on fût aſſuré que l'air de l'atmoſphère n'avoit pas eu le temps de remplacer celui qu'elle contenoit; on y a introduit une petite bougie qui s'y eſt éteinte à l'inſtant, de l'eau de chaux verſée dans la même cucurbite s'eſt troublée; mais la précipitation a été lente, difficile & incomplète.

Réflexions.

On voit clairement d'après les expériences précédentes; 1.° que l'air de l'atmoſphère ne peut contribuer à la combuſtion que d'une fort petite quantité de charbon; que cette quantité une fois brûlée, le charbon n'eſt plus altéré par la chaleur à moins qu'elle ne ſoit extrême, mais qu'alors il ſe volatiliſe plutôt que de brûler; cette propriété de l'air de n'entretenir que juſqu'à un terme marqué la combuſtion des corps a déjà été remarquée, & elle ſe confirme tous les jours; 2.° que le charbon indépendamment de la propriété d'être combuſtible à une chaleur très-douce, a encore celle d'être volatil par la violence de la chaleur; 3.° que le degré de chaleur néceſſaire pour opérer cette volatiliſation eſt à peu-près le même que celui qu'exige le diamant; 4.° que le charbon ne donne, comme le diamant, ni vapeurs ſenſibles ni ſublimé; mais que l'un & l'autre ſe réduiſent en un fluide élaſtique, en une eſpèce d'air ou de gas, qui, ſoit ſeul, ſoit mélangé avec l'air de l'atmoſphère, a la propriété de s'unir avec la chaux & avec les alkalis, & de leur rendre la propriété de faire efferveſcence avec les acides; 5.° que ſi le charbon laiſſe après la combuſtion une certaine quantité de cendre ſuſceptible de ſe vitrifier, il paroîtroit que le diamant a auſſi cette propriété; en effet, on a vu dans la *ſeptième Expérience*, que les éclats qui s'en détachent laiſſent un petit enduit vitreux ſur la porcelaine, à l'endroit où ils ſe ſont évaporés.

On n'auroit pas pu ſoupçonner qu'il eût pu ſe trouver quelque rapport entre le charbon & le diamant, & il ſeroit déraiſonnable ſans doute de pouſſer cette analogie trop loin;

elle n'exiſte que parce que l'un & l'autre ſemblent devoir être rangés dans la claſſe des corps combuſtibles, & qu'ils ſont à peu-près ceux qu'on peut regarder comme les plus fixes de cette claſſe lorſqu'on les garantit du contact de l'air.

Je ne ſerois pas étonné que le diamant & le charbon, qui d'après les expériences faites au verre ardent, ſemblent être volatils au même degré de chaleur, ne ſe volatiliſaſſent beaucoup plus aiſément l'un que l'autre par le feu des fourneaux. Une expérience de pluſieurs années nous a appris que dans les épreuves faites au verre brûlant, les corps blancs & les corps diaphanes s'échauffent beaucoup plus difficilement, & prennent, à force de ſoleil égal, un degré de chaleur beaucoup moins grand que les autres; la raiſon de cette différence tient à ce que les premiers réfléchiſſent & renvoient les rayons, tandis qu'au contraire les ſeconds les laiſſent paſſer ſans les retenir. Les diamans ſont dans ce ſecond cas, & leur tranſparence leur fait éluder une partie de l'effet du foyer; le charbon au contraire, par ſa couleur noire & matte, ſe trouve naturellement diſpoſé à abſorber une grande quantité de rayons, & il doit néceſſairement recevoir au foyer du même verre, une beaucoup plus grande intenſité de chaleur que le diamant: il eſt vrai que ce dernier ſe couvre de temps en temps d'une ſurface ou enduit noir, qui doit favoriſer l'effet du verre ardent, mais ce noir en même-temps n'eſt que momentané; le même diamant ſe noircit & s'éclaircit ſucceſſivement pluſieurs fois pendant qu'il eſt expoſé à l'action du foyer, & au total il doit y prendre moins de chaleur que le charbon. La conſéquence de cette réflexion eſt ſimple; ſi le diamant prend au foyer du verre ardent moins de chaleur que le charbon, & ſi cette chaleur ſuffit pour le volatiliſer, il eſt donc plus volatil que le charbon; & en effet, il paroît que le charbon réſiſte mieux au feu de porcelaine dans les vaiſſeaux fermés que le diamant.

J'ai prévenu au commencement de ce Mémoire, que ce que j'avois à donner ſur le diamant laiſſeroit encore beaucoup

de choses à desirer; le Lecteur ne s'en apercevra que trop, & il ne manquera pas de demander encore après avoir lû ce Mémoire, peut-être trop long, qu'est-ce que le Diamant?

J'avoue qu'il est encore impossible de répondre d'une manière très-satisfaisante à cette question, & peut-être même ne sera-t-il jamais possible d'y répondre : cependant pour résumer ce que nous avons de connoissances à cet égard, il semble qu'on peut regarder comme à peu-près prouvé; 1.° que le diamant est un corps combustible, à un degré de chaleur à peine capable de fondre l'argent; 2.° que comme la plupart des corps combustibles, il donne une substance noire & comme charbonneuse à sa surface; 3.° que lorsque les circonstances s'opposent à sa combustion, il devient presque aussi fixe que le charbon; 4.° que cependant on peut par un degré de chaleur très-violent & supérieur même à celui des fourneaux de porcelaine, parvenir à le volatiliser, & qu'il se réduit alors au moins en partie en vapeurs incoërcibles, en une espèce de gas qui précipite l'eau de chaux, & qui a beaucoup de ressemblance avec le gas dégagé des effervescences des fermentations & des réductions métalliques.

On ne manquera pas de demander encore, s'il est bien prouvé que la matière charbonneuse qui se forme à la surface du diamant soit véritablement le produit de la combustion de sa propre substance: j'avoue qu'il ne seroit pas impossible qu'elle ne provînt, soit de quelque matière étrangère contenue dans le diamant, soit de quelque corps environnant, & que les preuves rapportées dans ce Mémoire, laissent encore quelque chose à desirer sur cet objet; aussi suis-je bien éloigné de me regarder comme arrivé au terme de mes expériences. Je m'occupe dans ce moment de les répéter dans le vide de la machine pneumatique, & quoique mes tentatives à ce sujet n'aient encore eu qu'un succès médiocre, elles m'ont cependant fait connoître que le diamant ne se réduit point en charbon dans le vide de la machine pneumatique, qu'il n'y perd point sa transparence, mais qu'il s'y réduit en vapeurs gazeuses incoërcibles.

La loupe de quatre pieds de diamètre, que nous devons au zèle de M. Trudaine pour le progrès des Arts & des Sciences, & qui sera bientôt achevée, va nous fournir de nouveaux moyens, des instrumens plus forts, & nous transporter dans un ordre de choses tout nouveau. Nous espérons que l'Académie voudra bien nous permettre, à M.rs de Montigny, Macquer, Brisson, Cadet & à moi, qu'elle a chargé spécialement de la suite de ce travail, de déposer à mesure dans ses Registres, le résultat de nos recherches, comme je viens de le faire pour le Diamant, sauf par la suite à donner des résumés généraux lorsque nos expériences auront été assez multipliées pour oser en tirer des conséquences.



PREMIER MÉMOIRE
POUR SERVIR
À L'ANATOMIE DES OISEAUX.

Par M. VICQ-D'AZYR.

Description du Squelette & des Muscles.

TOUS les corps naturels peuvent être divisés en deux règnes, le règne organique & le règne inorganique; le premier renferme tous les corps qui composent le système vivant, depuis l'homme jusqu'à la plante : ce règne appartient tout entier à l'Anatomie; elle seule en connoît les ressorts & peut en développer la structure; que l'on cesse donc de lui reprocher le peu d'étendue de son domaine, & la lenteur de ses progrès. L'Histoire Naturelle moins profonde dans ses recherches, plus séduisante dans ses résultats, plus agréable dans son exercice, a dû marcher d'un pas plus rapide; mais on rendra également justice à l'une & à l'autre, en les considérant sous leur véritable point de vue; qu'est-ce en effet que l'Histoire Naturelle, si ce n'est une Anatomie superficielle qui se contente de certains caractères faciles à apercevoir ? & l'Anatomie, par rapport aux individus qu'elle analyse, n'est-elle pas une Histoire Naturelle plus minutieuse dans ses détails, plus rebutante dans ses travaux, plus multipliée dans ses opérations ? cette dernière n'a donc pu considérer un nombre égal d'individus, puisqu'un seul lui offre autant de recherches à faire, que plusieurs familles en offrent au Naturaliste ; c'est sans doute pour la même raison que presque tous les corps vivans sont rangés suivant différens systèmes, & décrits, quant à la forme extérieure, tandis qu'on n'en a disséqué qu'un petit nombre.

Les Poissons & les Oiseaux sont ceux de tous les animaux sur lesquels il reste le plus de connoissances à desirer. J'ai tâché,

dans deux Mémoires, de donner une hiſtoire ſuivie des parties qui caractériſent les différens ordres des Poiſſons *; maintenant je me propoſe de rendre l'anatomie des Oiſeaux plus complète, en y ajoutant la deſcription des parties, qui juſqu'ici ont été preſqu'entièrement oubliées : c'eſt par l'hiſtoire des ſquelettes & des muſcles que je commencerai ces détails.

* *Voyez le dernier Volume des Sav. Étran.*

Le ſquelette des oiſeaux a été décrit par Bélon ; cet Auteur s'eſt même ſervi d'un moyen très-ingénieux pour le comparer avec celui de l'homme, il l'a redreſſé perpendiculairement ſur ſes pieds, & cette ſituation fait mieux ſentir ſes rapports que tous les raiſonnemens poſſibles; mais ce Naturaliſte ne décrit aucunes variétés du ſquelette des différens oiſeaux, il ne fait que nommer les pièces qui le compoſent; il n'entre d'ailleurs dans aucun détail ſur leur mécaniſme, & il ne dit rien des muſcles deſtinés à les mouvoir.

On lit dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des deſcriptions très-bien faites de l'aigle, de l'autruche, du caſoar, de la demoiſelle de Numidie, de l'outarde, de la pintade, du coq d'Inde & du cormorant; mais les viſcères ſont les ſeules parties dont la ſtructure y ſoit développée, & on n'y trouve aucuns détails ſur les muſcles, ſi l'on en excepte les muſcles pulmonaires de l'outarde & du caſoar.

Pluſieurs Membres d'Académies célèbres ſe ſont livrés au même travail, & ils ſe ſont également bornés à la deſcription des viſcères. Conrard Peyer & Laurentius Strauſſius ont diſſéqué la cigogne, l'oie & la poule; Wolfangus Vedelius, le cigne; Severinus, le canard, la corneille & la pie; Thomas Bartholin & Stenon, l'aigle; Gaſpard Bartholin, le paon; Joannes de Muralto, le ſerin, le milan & la chouette; Olaüs Borrichius, la colombe; & Bernhardus Valentinus, le geai; mais aucun de ces Auteurs n'a parlé des muſcles. Joannes de Muralto a ſeulement fait quelques remarques ſur le pectoral, & ſur les tendons des muſcles de la jambe.

Plus nouvellement, Borelli dans ſon Traité de *Motu animalium*, a décrit les parties oſſeuſes & muſculaires qui lui ont paru les plus néceſſaires au mouvement; en parlant

des os, il a fort mal-à-propos, pris la fourchette pour la clavicule, & la clavicule pour une partie de l'omoplate. Bélon est à cet égard plus exact que lui. Borelli ne s'est pas plus étendu sur l'anatomie des muscles; il n'en a décrit que deux dont il a déterminé l'action & le poids, & qu'il a comparés avec ceux de l'homme. On s'aperçoit aisément que ces calculs, quoique fort subtils, n'expliquent point le vol; action très-compliquée, qui résulte de l'effort combiné d'un grand nombre de puissances dont il a négligé l'histoire. Le marcher des Oiseaux, le jeu de leurs côtes & de leur sternum sont encore des objets assez curieux pour mériter l'attention des Savans. Jusqu'ici cependant, Stenon est le seul qui ait senti l'importance de ce travail & qui ait eu le courage de l'entreprendre. Cet Anatomiste a décrit les muscles de l'aigle, & comme ceux de tous les Oiseaux sont à peu-près les mêmes, une nouvelle description deviendroit inutile, si l'ouvrage de Stenon, remplissoit les vues de celui qui étudie la Nature; c'est aussi ce qu'il ne fait point.

On peut lui reprocher d'avoir trop multiplié les muscles de l'œsophage, de l'os hyoïde & des vertèbres, & de n'en avoir comparé presqu'aucun avec ceux des quadrupèdes, si l'on en excepte le crotaphite & quelques autres en très-petit nombre; d'ailleurs il ne les distingue que par les noms de *premier, deuxième,* &c. & il va de même quelquefois jusqu'au nombre *dix-sept.*

L'anconé & le pectoral, sont peut-être les seuls auxquels il donne un nom, & dont il désigne l'usage; de sorte que ses descriptions ont le défaut d'être minutieuses, souvent inintelligibles par le défaut de noms & d'usages déterminés, & difficiles, pour ne pas dire impossibles, à suivre, lors même que l'on a le scalpel en main. La matière est donc comme toute neuve. Dans ce siècle où l'on connoît les muscles nombreux de la chenille, n'est-il pas bien étonnant que ceux des Oiseaux, n'aient pas encore été bien décrits.

Mais quels individus & quelle méthode choisirai-je dans cette suite de détails?

1.° J'ai cru que les Oiſeaux les plus gros & les plus communs pourroient ſervir de baſe à mes deſcriptions. Le coq d'Inde, le coq ordinaire de baſſe-cour, la corneille, la buſe, le canard, l'oie, la pie & le chat-huant, ont fourni, quant aux muſcles, la plus grande partie des faits dont je me propoſe de rendre compte dans ce Mémoire. Il étoit important de décrire les variétés; pour le faire avec ordre, il falloit choiſir les chefs des grandes familles. Un pareil choix m'a paru trop difficile pour m'expoſer à le faire ſeul. Il m'a ſemblé qu'il ne demandoit rien moins que les connoiſſances des plus grands maîtres. A qui pouvois-je mieux m'adreſſer qu'à M. Daubenton? ce Savant généreux m'a communiqué non-ſeulement les tréſors dont il eſt le dépoſitaire, & qu'il ſait ſi bien faire valoir, mais encore les recherches qu'il a faites lui-même ſur ces différens objets. C'eſt d'après ſes précieuſes obſervations que je me ſuis déterminé à conſidérer les variétés anatomiques des oiſeaux dans les chefs de neuf grandes familles, dont je rapporterai les noms, oubliant à deſſein, les caractères, qui nous jetteroient dans des détails trop longs & étrangers à mon travail.

Dans la première famille, j'ai choiſi le coucou & le perroquet; dans la deuxième, le chat-huant & la chouette; dans la troiſième, l'aigle, l'épervier & la buſe; dans la quatrième que l'on peut diviſer en deux ordres, la corneille & le gros-bec dans le premier, l'hirondelle & la mézange dans le ſecond; dans la cinquième, le coq & le pigeon qui ſont les chefs des deux ſubdiviſions de cette famille; dans la ſixième, la grue & la bécaſſe; dans la ſeptième, la poule d'eau; dans la huitième, le plongeon, l'oie & le canard; enfin dans la neuvième, le caſoar & l'autruche, qui forment deux ordres ſubalternes parmi ces individus. Il n'y en a qu'un petit nombre dont j'aie diſſéqué les muſcles, mais il n'y en a aucun dont je n'aie examiné & comparé le ſquelette avec la plus ſcrupuleuſe exactitude.

2.° La meilleure de toutes les méthodes, lorſque l'on ſe propoſe de décrire des muſcles, eſt ſans contredit celle

d'Albinus; elle éloigne tous préjugés sur leurs usages, elle présente les parties par ordre, elle indique leur situation d'une manière exacte & précise, & sur-tout elle est favorable pour l'intelligence des rapports anatomiques, qui sont le principal but de mon travail. A l'aide de cette méthode, il sera facile de comparer non-seulement les différentes régions des oiseaux entre elles, mais encore avec celles des autres animaux.

J'ai divisé l'ensemble des muscles de l'oiseau en vingt-quatre régions, qui sont, la région thorachique antérieure, la région claviculaire qui est très-étendue, la région de l'omoplate, la région supérieure de l'épaule, les régions interne & externe de l'humérus, les régions internes & externes de l'avant-bras, celle de la partie qui tient lieu de main, la région du bas-ventre, celle des espaces intercostaux, celle de l'anus, la région supérieure du cou & celle du dos, la région inférieure du cou & celle du larynx, la région supérieure & latérale du crâne, la région inférieure de la tête, celle de la peau, les régions iliaques interne & externe, les régions antérieure & postérieure de la jambe, enfin les régions supérieure & inférieure du pied.

Chacune de ces régions comprend un certain nombre de muscles que nous décrirons à mesure qu'ils se présenteront, & auxquels pour fixer les idées & pour aider la mémoire, nous donnerons des noms relatifs à leur analogie, à leurs usages, ou à leur situation. L'histoire des insertions & le mécanisme des muscles, supposent d'ailleurs une parfaite connoissance du squelette. Comme la description que Bélon en a faite est trop succincte, nous tâcherons d'y suppléer, en faisant au commencement de chaque région, des remarques sur les pièces osseuses qui en sont la base: nous nous efforcerons aussi de contribuer en même temps, aux progrès de l'Ostéologie & de la Miologie de cette classe d'animaux.

PREMIÈRE RÉGION.

Région thorachique antérieure.

Cette région s'étend depuis l'extrémité antérieure du ſternum juſqu'à la poſtérieure & latéralement juſqu'à l'angle que les côtes ſont avec elles-mêmes au milieu de leur longueur. Le ſternum des oiſeaux eſt remarquable par la crête très-ſaillante, qui le fait comparer à une quille de navire, & par deux prolongemens qui s'étendent en arrière, & qu'une membrane unit avec la partie moyenne de cet os. Latéralement on aperçoit l'articulation des côtes qui ſont rapprochées l'une de l'autre, & qui jouiſſent dans ce contact d'un mouvement aſſez marqué. Sur les côtés de cet os, on trouve de plus une apophyſe en forme d'anſe, & vers les parties latérales & externes des clavicules, deux autres apophyſes que nous appellerons du nom de *claviculaires ;* en dedans ſont pluſieurs trous qui s'ouvrent entre les lames oſſeuſes.

Cette ſtructure varie dans pluſieurs oiſeaux; dans la grue, par exemple, & dans pluſieurs autres aquatiques, la trachée artère, après avoir fait des circonvolutions plus ou moins grandes, & qui dans quelques individus s'étendent extérieurement juſqu'à la région abdominale, s'inſinue dans l'épaiſſeur du ſternum ; cet os dans le perroquet eſt plein, & n'a point de diviſions latérales; il eſt arrondi poſtérieurement. Dans le coucou, une éminence eſt ſituée à la partie antérieure de la fourchette, où elle paroît être deſtinée à empêcher qu'elle ne ſe porte trop en avant. Cette apophyſe ſe rencontre auſſi dans le canard à queue pointue; dans la petite chouette, le ſternum eſt également plein, & les anſes latérales ſont très-peu ſaillantes; deux ſquelettes de groſſes chouettes, m'ont offert une ſtructure différente; dans l'un j'ai trouvé les diviſions latérales, l'autre ne préſentoit qu'un trou dans la place qu'elles occupent ordinairement : les diviſions latérales du ſternum de la corneille, ne ſont qu'ébauchées ; les anſes ſont très-courtes, & les apophyſes claviculaires

très-ſaillantes. Le ſquelette du coq, offre un ſternum dont les anſes & les diviſions latérales, ſont bien exprimées. Le ſternum de la bécaſſe eſt très-mince, les anſes y ſont peu marquées, & les petites côtes latérales y ſont très-courtes. Dans les petits oiſeaux, ces prolongemens ſont en général très-diſtincts; le ſternum de la poule d'eau ſe termine en pointe, avec des anſes & des apophyſes claviculaires très-ſaillantes. Le ſternum de l'aigle eſt plein; celui du canard, du bièvre & de l'oie, l'eſt auſſi; il eſt de plus arrondi poſtérieurement; ſur les côtés, on trouve quelquefois un ou deux trous bouchés par une membrane. Il en eſt donc du ſternum des oiſeaux comme de celui de l'homme, & ce que M. Hunauld a écrit dans les Mémoires de l'Académie, ſur les *défauts d'oſſification dans le ſternum humain*, convient à celui des oiſeaux, avec cette différence que ces défauts ſe trouvent dans les derniers, ſur le côté, tandis que dans l'homme ils ſe trouvent dans le milieu.

Le ſternum du caſoar & de l'autruche, ſemble ſe rapprocher de celui de l'homme; il eſt beaucoup plus court que dans les autres oiſeaux. La ſaillie moyenne n'exiſte point; un tubercule ou renflement en tient ſeulement la place. Il eſt poreux, léger, irrégulièrement arrondi, & ne reſſemble pas mal à un bouclier. Les muſcles de cette région ſont:

1.° Le grand pectoral; ce muſcle eſt triangulaire très-épais, & compoſé de trois portions; l'une eſt coſtale, elle eſt aſſez mince & s'insère aux côtes, auprès de l'omoplate. Une ligne tendineuſe la ſépare de la portion ſternale, & près de l'angle que fait l'os du bras avec la clavicule, elle ſe contourne en forme d'anſe de panier : la portion ſternale eſt la plus large & la plus épaiſſe, elle recouvre le pectoral moyen, avec lequel elle confond quelques-unes de ſes fibres; ſon inſertion eſt tout le long de la crête du ſternum : la portion antérieure ſe replie au-deſſus de l'os de la fourchette, & l'enveloppe dans ſon épaiſſeur. Une trace tendineuſe très-exprimée en dehors, la ſépare de la portion moyenne; de ſorte que ce muſcle peut être regardé comme compoſé de trois ventres diſtincts, ſon tendon eſt large & accompagné ſupérieurement

par une portion charnue; il s'insère à une éminence qui se trouve à la partie externe & supérieure de l'humérus, près de sa tête entre le grand & le petit extenseur de la membrane de l'aile que nous décrirons ci-après & au-dessus des deux sous-claviers & du petit pectoral.

Ce muscle est celui que Borelli appelle du nom de *depressor alæ*, & dont il a calculé la pesanteur; en effet, il abaisse l'aile quand elle est élevée, il la tire en arrière quand elle est portée en devant. La portion costale rapproche sur-tout l'humérus du thorax, & quand ce muscle agit seul, il fait faire à l'os du bras, un mouvement de rotation en dehors, qui détruit l'horizontalité de l'aile développée; c'est lui qui est le principal agent des mouvemens que les oiseaux domestiques font exécuter à leurs ailes, en s'élevant sur leurs pieds, & en se secouant avec force. Enfin c'est lui, qui, lorsqu'il se contracte, ramène l'aile dans sa position naturelle & oblique au plan du corps de l'oiseau.

Le muscle pectoral de l'homme, est, par proportion, beaucoup moins épais & beaucoup moins étendu; celui des oiseaux lui ressemble cependant à beaucoup d'égards: tous les deux sont divisés en plusieurs portions; tous les deux ont à peu-près la même action & la même insertion & sont contournés de la même manière dans l'angle que la clavicule fait avec l'os du bras.

2.° Le muscle pectoral moyen, ainsi nommé pour le distinguer du petit pectoral qui existe aussi dans les oiseaux, est placé à côté de la crête du sternum dans l'espèce de rigole qui s'y rencontre. Quelques-unes de ses fibres s'insèrent à la membrane qui unit la partie moyenne du sternum avec les latérales: De-là elles vont obliquement se rendre à un tendon mitoyen & aplati qui monte le long de la clavicule pour s'insinuer dans une poulie formée entre cet os & celui de la fourchette, qui passe ensuite entre l'omoplate & l'humérus, qui se contourne sur le col de ce dernier, & qui s'insère au bord externe de cet os, près de sa tête, dans une excavation qu'on y remarque. Ce muscle

muſcle penniforme eſt l'antagoniſte du grand pectoral; il tire le bras en deſſus & en devant. Si ſon action eſt plus forte il lui fait exécuter un mouvement de rotation, par lequel le plan des condiles de l'humérus devient de plus en plus parallèle à celui des côtes. C'eſt donc ce muſcle qui donne à l'aile le développement & l'horizontalité néceſſaires pour le vol, & ſon action eſt par conſéquent oppoſée en tout à celle du grand pectoral.

Si on cherche un muſcle pareil dans l'homme, on ne le trouve point; quelques-uns de ſes uſages ſont à la vérité communs avec ceux du deltoïde; mais il eſt placé d'une manière bien différente; la poulie ajoute beaucoup à ſa force, le deltoïde n'auroit pas fait exécuter au bras les mouvemens de rotation que lui donne le pectoral moyen: il étoit d'ailleurs néceſſaire que le moignon des oiſeaux fût le plus à nu, & le plus léger qu'il eſt poſſible, ſans quoi le centre de gravité, qui, ſuivant les démonſtrations de Borelli, doit répondre aux parties inférieures de l'oiſeau, auroit été inconteſtablement placé beaucoup trop en devant.

3.° Le petit pectoral; ce muſcle s'étend le long du bord externe de la clavicule à laquelle il s'insère, & à la partie extérieure du ſternum; ſa forme approche de la pyramidale; en deſſous il eſt ſatiné; le ſouclavier externe eſt recouvert par ſes fibres, & ſon tendon qui eſt un peu plus en dehors que ce dernier, s'insère dans une petite foſſe que l'on remarque à la partie ſupérieure & latérale externe de l'humérus; l'action de ce muſcle eſt de rapprocher le bras des côtes, & de le porter en arrière quand il a été porté trop en devant; ſi l'humérus eſt élevé, le petit pectoral peut encore l'abaiſſer; comme il eſt placé très-près du centre de mouvement, il ſert à diriger l'action des muſcles plus volumineux & plus forts, & dont l'inſertion eſt plus éloignée: cette remarque convient également aux autres petits muſcles dont nous parlerons inceſſamment, de ſorte que dans le vol le mouvement, quoique très-violent, ſe fait d'une manière égale & graduée dans ſes variations.

Le petit pectoral est placé dans l'homme à-peu-près de la même manière, mais il s'insère au bec coracoïde, & il a pour fonction d'abaisser l'angle antérieur de l'omoplate; dans l'oiseau, cet os doit être fixe, pour résister aux efforts considérables des deux grands muscles pectoraux : on peut même ajouter que les mouvemens de l'omoplate, en haut, en devant & en arrière, seroient dangereux dans cette classe d'animaux, chez lesquels l'os de la fourchette s'y oppose absolument; il est au contraire important que chez eux les mouvemens par lesquels l'os du bras se porte en devant & en arrière, soient faciles & multipliés; c'est sans doute pour cette raison, que les muscles, qui, dans l'homme sont principalement destinés aux mouvemens de l'omoplate, servent dans les oiseaux à ceux de l'humérus.

DEUXIÈME RÉGION.

Région de la Clavicule.

Cette région renferme tout l'espace compris entre les deux clavicules; nous observerons que ces deux os sont très-rapprochés l'un de l'autre, qu'une éminence moyenne, appartenante au sternum, les sépare inférieurement; qu'à la partie externe on trouve une autre apophyse appartenante encore au sternum; que les deux clavicules sont droites; qu'elles montent en s'écartant plus ou moins les unes des autres; & que dans tous les oiseaux, on observe entr'elles un petit os courbe, connu sous le nom de *fourchette*, qui en mesure & en assure la distance; que ce dernier os est plus large dans les oiseaux, dont les ailes sont plus éloignées; que sa pointe est tournée vers le sternum; que ses deux branches sont jointes avec les clavicules, par des ligamens qui ne peuvent guère prêter, & qu'elles y font une saillie qui ne ressemble pas mal au bec de corbeau de l'omoplate humaine, dont nous ferons voir ailleurs qu'elles ont les usages.

Les variétés des clavicules sont en petit nombre, comme je m'en suis assuré, en examinant avec soin les chefs des

familles, dont j'ai offert plus haut le tableau ; elles ſont très-minces dans le coucou ; dans la bécaſſe elles ſont plus courtes que dans la plus grande partie des autres oiſeaux ; dans la méſange, ainſi que dans les oiſeaux de petite taille, elles ſont longues & éfilées ; le caſoar & l'autruche ſont les ſeuls dans leſquels la clavicule ſoit confondue avec le haut de la fourchette, & dans leſquels elle ne réponde point au volume du corps.

Les variétés de la fourchette ſont plus nombreuſes : on peut en général diſtinguer les os ainſi appelés *en articulés* & *non articulés.* Les premiers s'articulent en effet avec le ſternum. Les ſeconds n'y ſont aſſujettis que par le moyen d'un ligament plus ou moins lâche ; dans le caſoar & dans l'autruche la clavicule & la fourchette ſont, comme nous l'avons dit, réunies enſemble, de ſorte à ne laiſſer qu'un intervalle vers la partie antérieure du ſternum avec lequel elles s'articulent ; il ſeroit à ſouhaiter que l'on diſſéquât quelques-uns de ces oiſeaux lorſqu'ils ſont encore jeunes, peut-être alors ces pièces ſont-elles diſtinctes, & peut-être on ne les trouve ainſi confondues que par les progrès d'une oſſification long-temps continuée. Dans la grue, la fourchette eſt bien diſtincte, mais elle eſt articulée ; elle l'eſt auſſi dans la cigogne ; & dans le coucou il s'en faut peu qu'elle ne le ſoit ; dans toutes les autres familles un ligament l'unit avec le ſternum, elle eſt auſſi dans la plus grande partie des oiſeaux, bombée en dehors ; dans un ſquelette de perroquet, j'ai cependant trouvé ſa convexité tournée vers l'intérieur du thorax, ces os diffèrent encore par l'ouverture de leur angle ; dans le canard, dans l'oie, & ſur-tout dans le plongeon, la fourchette eſt évaſée & ſon angle eſt très-arrondi ; dans la caille & dans la demoiſelle de Numidie, il eſt très-aigu ; dans la grive, & ſur-tout dans le ſanſonnet, il eſt fort étroit : on obſerve encore quelques différences relatives à la diſtance qui les ſépare du ſternum ; dans l'aigle cette diſtance eſt très-grande, la courbure de la fourchette n'eſt pas non plus égale dans tous les oiſeaux ; dans la chouette, par exemple, elle eſt peu conſidérable ; la forme des branches varie encore dans les différentes familles ; les gallinacées &

plusieurs autres les ont arrondies; dans la corneille le plan des branches est tourné obliquement en dehors; dans la chouette elles sont aussi aplaties, & leur plan est tourné en sens contraire.

Enfin, il est facile de voir que plus les ailes doivent être développées, & leur réaction grande; plus aussi l'os de la fourchette doit être bombé, plus il doit être élastique, plus il doit jouer facilement, moins enfin il doit être assujetti avec le sternum; c'est pour cette raison, en considérant les extrêmes, que dans l'aigle, dont le vol hardi s'élève beaucoup & se soutient long-temps dans les airs, la fourchette réunit ces différentes conditions, & se trouve très-éloignée du sternum, tandis que dans l'autruche, qu'un sort contraire semble attacher à la terre, cet os est à peine reconnoissable, & se confond immédiatement avec ceux de la poitrine.

Les muscles de cette région sont:

1.° Le souclavier interne; pour bien découvrir ce muscle, il faut détruire auparavant la partie du grand pectoral qui s'attache à la fourchette; il est situé le long & à la face interne de la clavicule, il est aplati & tendineux à sa surface; il s'insère à l'éminence moyenne du sternum & à la clavicule; de-là ses fibres se réunissent pour former un tendon qui accompagne celui du pectoral moyen, & qui s'insère tout auprès, de sorte qu'il doit être regardé comme un de ses accessoires; seulement le tendon ne fait pas un aussi grand contour & ne vient pas d'aussi loin.

2.° Le souclavier externe; ce muscle est presque semblable au précédent, il est placé le long du bord externe de la clavicule, au-dessous du petit pectoral; il est composé de trois portions, une s'insère à la clavicule, l'autre au sternum, la troisième à l'omoplate; cette dernière est la plus petite de toutes; le tendon combiné se porte vers la face interne de la tête humérale & s'y insère, son action est de porter le bras en arrière, en le rapprochant des côtes. On peut donc

le regarder comme le coopérateur des grands pectoraux, & comme l'antagoniste de l'autre souclavier.

Dans l'homme, on ne trouve qu'un souclavier dont les usages sont bien différens; mais si les muscles souclaviers & les pectoraux sont multipliés dans les oiseaux, les petits muscles rotateurs de l'humérus manquent dans ces derniers chez lesquels la supination & la pronation, auroient été des mouvemens inutiles.

3.° Le court claviculaire; ce muscle est le plus petit de tous ceux qui sont situés le long de la clavicule; il est placé vers la partie inférieure & externe de cet os, dont les fibres occupent le tiers inférieur; elles s'insèrent d'une autre part à l'éminence latérale & claviculaire du sternum : ce muscle est le vrai souclavier, c'est lui qui ressemble le plus au souclavier de l'homme, son usage est de maintenir la clavicule dans sa position naturelle : en dedans la fourchette empêche les clavicules de se rapprocher trop l'une de l'autre, en dehors elles sont fixées par ce muscle; les deux autres claviculaires contribuent au même mécanisme, & cet os étant par ce moyen fortement appuyé de toutes parts, peut être regardé comme un soutien assuré pour les mouvemens très-forts & très-rapides de l'os du bras.

4.° Le costo-scapulaire; c'est ainsi que j'appelle un très-petit muscle qui est placé auprès de la portion scapulaire du souclavier externe, qui s'insère à la première côte, & qui de-là va se terminer au quart supérieur de l'omoplate; il est arrondi, court, & ne peut avoir d'autre usage que celui de maintenir ce dernier os dans une certaine distance des vertèbres : on trouve encore quelques muscles qui ont la même fonction, & nous font voir que l'omoplate ne pouvoit être trop bien assujettie, pour résister aux efforts considérables qui tendent à la déplacer.

TROISIÈME RÉGION.

Région de l'omoplate.

Cette région comprend la face ſupérieure & inférieure de cet os, & l'eſpace contenu entre ſon bord interne & l'épine : nous avons trouvé pluſieurs différences entre la clavicule de l'homme & celle de l'oiſeau, qui eſt plus droite & plus longue par proportion; mais l'omoplate en offre encore de plus marquées : elle eſt étroite, alongée, légèrement concave en-deſſus, preſque égale en-deſſous, tranchante dans ſes bords & légèrement recourbée vers le bas.

On rencontre peu de variétés dans cette région; l'omoplate n'a cependant pas la même longueur, ni la même largeur dans tous les oiſeaux; celle de l'hirondelle eſt également large dans preſque toute ſon étendue; celle de la perdrix s'élargit un peu vers le bas; celle de la bécaſſe eſt longue & s'étend aſſez loin vers la foſſe iliaque externe; celle des perroquets ne va pas juſqu'à l'os des îles; enfin l'omoplate du caſoar & de l'autruche eſt continue avec la clavicule & avec la fourchette : ſon volume eſt très-petit & ſa forme très-irrégulière.

Les muſcles de cette région, ſont :

1.° Celui que j'appelle du nom de *trapézoïde*, parce qu'il répond au trapèze de l'omoplate humaine; il s'insère au bord ſupérieur de l'os qui porte ce nom dans les oiſeaux & aux épines des vertèbres; il s'étend juſqu'aux trois dernières cervicales, mais il ne monte pas auſſi haut que le trapèze dans l'homme; ſes fibres ſont obliques, elles rapprochent en ſe contractant l'omoplate de l'épine : le cou des oiſeaux étant très-flexible, & l'omoplate devant être d'ailleurs preſque immobile pour les raiſons expoſées ci-deſſus, il étoit inutile que le muſcle trapèze s'étendît dans cette claſſe d'animaux juſqu'à la tête, ou même juſqu'aux premières vertèbres cervicales.

2.° Le muſcle rhomboïde; celui-ci ſe trouve au-deſſous du précédent : ſes fibres ſont ſeulement un peu plus droites;

il a d'ailleurs à peu-près les mêmes usages & les mêmes insertions.

3.° Le sus-scapulaire; ce nom m'a paru convenir au muscle dont il va être question, parce qu'il est placé dans la petite excavation que nous avons remarquée sur la face externe de l'omoplate, plusieurs de ses fibres sont continues avec le trapèze & avec le muscle qui répond au grand dorsal. Antérieurement elles se réunissent pour former un tendon rond, accompagné d'un prolongement charnu, qui s'insère à la partie inférieure & externe de la tête humérale; ce muscle tire le bras en arrière & un peu en dessus : il le rapproche en même temps de l'omoplate, comme le costo-scapulaire, & s'il est élevé, il l'abaisse avec assez de force.

L'omoplate des oiseaux n'étant pas surmontée par une crête, le muscle sus-scapulaire tient lieu de ceux que l'on connoît dans l'homme sous les noms de *sus-épineux* & *sous-épineux*.

4.° Le muscle qui tient la place du grand dorsal; ce nom lui convient à raison de sa situation, & non à raison de son étendue; quoique d'un petit volume, il est composé, 1.° d'une portion charnue étroite & aplatie, qui s'insère aux côtes inférieures près de l'épine; 2.° d'une autre plus large, plus épaisse, qui s'insère à l'angle ou pointe de l'omoplate & aux côtes moyennes; 3.° d'un tendon grêle alongé, qui se porte vers l'humérus, & s'y attache au-dessous de son articulation supérieure entre le grand & le petit extenseur du coude; ce muscle, par sa portion scapulaire, fixe l'omoplate, & par sa portion humérale, il porte le bras en dedans & en dessus.

On trouve également ces deux portions dans le grand dorsal de l'homme, mais la portion qui va directement à l'humérus est la plus considérable; les mouvemens de rotation par lesquels le bras se porte en arrière, en roulant sur lui-même, sont très-importans dans l'homme; une pareille disposition n'est pas, à beaucoup près, également nécessaire dans les oiseaux, dont l'omoplate doit être solidement retenue pour résister aux mouvemens dont l'épaule est en quelque sorte le centre & la réunion.

5.° L'extenſeur de la membrane poſtérieure de l'aile; dans l'angle que fait le bras avec le trou au-deſſous de l'omoplate, on trouve un repli de la peau aſſez conſidérable; c'eſt-là que s'épanouit un petit muſcle fort mince, qui ſemble, dans la plupart des oiſeaux, être une portion du grand dorſal; les deux muſcles qui ſeront décrits dans la quatrième région, tendent de leur côté la membrane antérieure de l'aile; de ſorte que dans le vol, toutes les parties ſont auſſi tendues qu'elles peuvent l'être.

6.° Le ſous-ſcapulaire; le muſcle que nous appelons ainſi tient auſſi la place du grand dentelé: on y remarque en effet quelques digitations qui vont du milieu de la face interne de l'omoplate, aux côtes antérieures & moyennes; il eſt étroit & mince; ſes fibres ſont obliques & charnues juſqu'à leur inſertion; ſon uſage eſt d'éloigner un peu l'omoplate de l'épine, de la maintenir au moins dans une diſtance déterminée & de la fixer, ce qu'il fait conjointement avec la portion ſcapulaire du grand dorſal, uſage qui le rapproche encore du muſcle grand dentelé.

Nous ſommes maintenant en état de répondre aux queſtions ſuivantes; 1.° quel eſt l'uſage de l'os appelé *fourchette!* 2.° pourquoi l'omoplate des oiſeaux eſt-elle ſi étroite & ſi alongée?

1.° La fourchette eſt un os flexible & élaſtique, qui étant ſitué entre les clavicules, paroît très-propre à empêcher qu'elles ne s'éloignent & ne ſe rapprochent trop l'une de l'autre, en même temps elle conſerve un paſſage libre & une ſituation commode pour la trachée artère, pour ſes muſcles internes & inférieurs, & pour la poche ou dilatation de l'œſophage; de plus, elle fournit une inſertion néceſſaire au grand pectoral, & elle en dirige l'action; de plus, comme cet os eſt ployant & élaſtique, c'eſt lui qui briſe la colonne d'air dans le vol, & qui peut-être abſorbe une partie du mouvement dans ſes jointures & par ſes vibrations.

2.° La longueur & l'étroiteſſe de l'omoplate peuvent être expliquées de la manière ſuivante; deux muſcles très-forts ſont de chaque côté deſtinés au mouvement de l'aile; c'eſt le

le grand & le moyen pectoral; ce mouvement s'exécute dans la cavité articulaire qui est creusée précisément dans l'angle de la clavicule & de l'omoplate; l'effort de ces muscles tend donc à déplacer la clavicule & l'omoplate, en même temps qu'il tend à mouvoir le bras: la clavicule est retenue par des faces articulaires assez larges, par des ligamens qui l'assujettissent avec les éminences latérales & moyennes du sternum, par la fourchette & par un assez grand nombre de muscles; il falloit que l'autre extrémité du levier recourbé fût retenue avec une force égale, & c'est ajouter à cette force, que d'en augmenter la longueur : les petits muscles placés vers la pointe de l'omoplate, sont donc destinés à empêcher sa bascule, qui dans les grands efforts des pectoraux, n'auroit pas manqué d'arriver sans leur résistance. Le mécanisme de l'omoplate humaine est bien différent ; tout y est disposé pour la souplesse & pour la variété des mouvemens que la longueur de l'omoplate, la situation presque droite des clavicules, & l'existence d'un os qui les réuniroit ensemble auroient infailliblement empêchés : l'omoplate des oiseaux devoit donc être alongée aux dépens de sa largeur.

Nota. *La suite des détails anatomiques concernant la structure du squelette & des muscles des Oiseaux, ainsi que leur nomenclature, leur mécanisme & leur comparaison avec l'homme, sont réservés pour les Mémoires suivans.*





MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire ſuivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faiſant qu'un ſeul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi au mois de Février 1706.

MÉMOIRE

SUR LES ANASTOMOSES.

Par M. LA FOSSE.

ON appelle *Anaſtomoſe*, la réunion de deux vaiſſeaux dont les cavités communiquent ou s'abouchent. La partie des vaiſſeaux du corps des animaux, qui préſente cette communication, a reçu le nom d'*anaſtomoſe*, quelqu'eſpèce de liquide qu'elle tranſmette d'ailleurs.

Les variétés infinies qu'on obſerve dans le nombre, le volume, la ſituation des vaiſſeaux des différens individus, ne s'étendent que ſur le nombre & la poſition des anaſtomoſes, & il n'eſt aucun animal dont le ſyſtème vaſculaire n'offre une immenſe quantité de pareilles communications, ſoit dans les rameaux principaux, ſoit dans les ramifications capillaires: on peut même avancer qu'il eſt impoſſible d'aſſigner un point du corps des animaux, auquel ne réponde pas quelque anaſtomoſe vaſculaire ſenſible ou inſenſible.

Je diſtingue trois ſortes d'anaſtomoſes; les artérièles-veineuſes, ou la réunion des artères & des veines, les artérièles qui ſe font d'artère à artère, & les veineuſes, qui ſe font de veine à veine.

La communication immédiate des artères avec les veines eſt établie par une foule d'expériences (quoiqu'en diſe Bohn, *Circul. anat.)* M. Winſlow, a aſſuré dans les Mémoires de l'Académie, *année 1711,* qu'elle pouvoit même ſe démontrer à l'œil nu dans les glandes; & toutes les analogies s'accordent à prouver qu'elle eſt la même dans toutes les autres parties.

On ſait que c'eſt à la quantité de vaiſſeaux, qu'il faut attribuer le principal volume des parties des animaux; d'où il eſt aiſé de conclure que la maſſe des fluides excède conſidérablement celle des ſolides: or ces mêmes fluides ayant dans l'état d'organiſation & de vie, un mouvement progreſſif continuel qui leur fait parcourir les cavités des différens vaiſſeaux, ils ſont conſtamment renfermés par les parois de ces vaiſſeaux, & ne peuvent ſe diſſiper ou ſe répandre que lorſqu'ils ſont parvenus à la ſurface extérieure du corps ou des différens viſcères.

Cette dernière conſidération donne l'idée d'un mécaniſme particulier des anaſtomoſes dont aucun auteur n'a encore parlé. Le ſang pouſſé par le cœur dans les principales artères, pénètre rapidement & à la fois dans toutes les ouvertures des vaiſſeaux collatéraux; la colonne de ce liquide qui parcourt l'aorte eſt donc diviſée en autant de petites colonnes qu'il y a d'orifices collatéraux à l'aorte, & le diamètre de ces colonnes, eſt parfaitement proportionnel à celui des orifices. Il en eſt de même des rameaux principaux qui fourniſſent eux-mêmes d'autres diviſions.

Il eſt d'ailleurs prouvé que le mouvement du ſang dans une branche principale, ne diffère pas ſenſiblement du mouvement de ce liquide dans le tronc du vaiſſeau.

Ces principes admis, il ſuit que le ſang pénétrant à la fois du tronc d'une artère dans la cavité de deux rameaux qui

s'anaſtomoſent, préſente deux colonnes de liquide dont le mouvement très-rapide, eſt directement oppoſé. Qu'on prenne pour exemple la célèbre anaſtomoſe de Riolan, qui réunit les deux artères méſentériques: il eſt clair que le ſang pouſſé de l'aorte dans l'artère méſentérique ſupérieure, ira néceſſairement rencontrer dans l'anaſtomoſe, le ſang pouſſé de la même aorte dans l'artère méſentérique inférieure; & ce concours ſera plus ou moins rapproché de l'aorte, ſelon que l'eſpace parcouru par l'une des deux colonnes de liquide ſera plus ou moins grand.

Mais ces deux courans de liquide à peu-près égaux par la maſſe & la force, étant mus dans des ſens contraires & contenus par les parois des vaiſſeaux, doivent néceſſairement ſe heurter à leur point de concours & refluer avec une force proportionnée à celle du choc; il doit donc y avoir reflux dans les deux troncs qui forment l'anaſtomoſe. Il eſt évident que les fluides auſſi peu pénétrables que les ſolides, ne peuvent point ſe diſperſer tant qu'ils ſont contenus dans leurs vaiſſeaux, le mouvement de reflux eſt donc un effet néceſſaire du mouvement direct.

Le nombre infini d'anaſtomoſes & les effets qu'elles produiſent ſur le mouvement progreſſif des liquides, formoient donc un élément néceſſaire à conſidérer avant que d'établir les loix d'une circulation uniforme & non-interrompue.

Les obſervations & les expériences s'accordent à prouver les principes que je viens d'établir.

I.ere Expérience. Ayant découvert une partie du méſentère ſur un chien vivant, je liai, vers ſon milieu, une des anaſtomoſes artérielles les plus ſenſibles; la ligature étoit ſerrée au point d'interrompre le paſſage du ſang; j'ouvris enſuite le vaiſſeau au-deſſous de la ligature, le ſang ſortit avec impétuoſité par l'ouverture: ayant bouché cette ouverture, j'en fis une ſemblable au même vaiſſeau au-deſſus de la ligature, & le ſang ſortit avec la même rapidité par cette nouvelle ouverture; donc le ſang pénètre dans l'anaſtomoſe par l'une & l'autre des branches qui la forment.

J'adaptai une ſeringue remplie d'eau à chacune des extrémités d'un tuyau de verre recourbé; j'avois mêlé à l'eau contenue dans ces ſeringues, différens corpuſcules qu'on pouvoit facilement apercevoir à travers le verre; je frappai enſuite, par un même coup, les deux piſtons, & le liquide pénétra à la fois dans le tuyau par les deux extrémités; les deux courans s'étant heurtés vers le milieu du trajet du tuyau, la liqueur reflua vers les extrémités, & les piſtons furent repouſſés par le ſeul reflux du liquide : on voyoit très-diſtinctement à travers les parois du tuyau, les corpuſcules mêlés à l'eau, avoir un mouvement rétrograde. II.e Expérience.

J'attachai dans la cavité d'un tuyau de verre conſidérable, deux membranes qui imitoient aſſez bien la forme des valvules; chacune des membranes adhéroit à l'intérieur du tuyau par une partie de ſa circonférence; l'autre partie étoit libre ou flottante, & interceptoit preſque en entier la cavité du tuyau; la longueur totale du tuyau étoit de 15 pouces, & l'eſpace compris entre les deux membranes étoit de 9 pouces; ayant adapté les deux ſeringues, comme dans l'expérience précédente, & ayant frappé à la fois les deux piſtons, la liqueur, en pénétrant, ſouleva les deux membranes en les inclinant l'une vers l'autre; mais après la colliſion, le reflux du liquide ſouleva ces mêmes membranes dans un ſens tout oppoſé. III.e Expérience.

Il y a donc reflux du liquide après le choc dans l'une & dans l'autre des branches qui forment l'anaſtomoſe; donc ce mouvement de reflux du ſang de l'anaſtomoſe, s'oppoſera en partie au mouvement direct du nouveau ſang envoyé par une nouvelle contraction du cœur.

D'où il ſuit que le liquide, mu dans nos vaiſſeaux, préſente des oſcillations ou des *allées* & des *venues* perpétuelles, qui troublent ou modifient le mouvement direct & progreſſif.

On peut m'oppoſer que les parois d'un tuyau de verre ſont trop ſolides pour être comparées avec raiſon à celles des vaiſſeaux des animaux : c'eſt pour répondre à cette objection, que j'ai fait l'expérience ſuivante.

IV.e Expérience. Je détachai d'un cadavre l'artère-aorte, depuis son origine ou sa courbure, jusqu'à la division des iliaques primitives; je liai exactement tous les rameaux, qui s'en séparent dans ce trajet, de manière qu'elle ne présentoit qu'un même conduit, dont les seules extrémités étoient ouvertes. Ayant alors adapté les deux seringues, comme dans l'expérience ci-dessus, & ayant frappé les deux pistons, la liqueur injectée dans l'aorte gonfla ce vaisseau, & après le choc des deux jets de liqueur, les deux pistons furent repoussés comme dans la seconde expérience.

La ressemblance ici est donc parfaite & la souplesse des tuyaux ne s'oppose ni au choc, ni au reflux qui en est la suite.

Comme le sang se meut avec rapidité dans nos vaisseaux, & que la pulsation des différentes artères est sensiblement homochrone dans les différentes parties; on peut en conclure très-probablement que dans le même instant (exprimé par la systole du cœur), tous les rameaux des artères sensibles, reçoivent le sang envoyé par ce viscère. Il y aura donc des collisions ou des chocs simultanés dans les différentes anastomoses, & les reflux des liquides après le choc, offriront la même simultanéité.

On n'a que la seule conjecture pour évaluer la quantité de mouvement du sang avant le choc, la mesure des effets de ce choc sur les vaisseaux & la force du reflux; mais en abandonnant cette source de théories arbitraires, & reconnoissant l'impossibilité de donner l'exacte solution de ces problèmes, il reste toujours démontré que nos liquides se choquent dans nos vaisseaux & qu'ils refluent après le choc; d'où il suit que le sang & les différentes liqueurs, ont plusieurs forces qui leur sont imprimées.

La force directe imprimée par le cœur ou par l'action des vaisseaux.

Le mouvement de reflux produit par le choc des deux masses de liquides, mues en sens contraires, & la force expansive dont l'effet est prévenu par les parois des vaisseaux.

Il eſt aiſé de démontrer que ces différentes forces imprimées aux liquides exercent ſur les vaiſſeaux même une action mécanique, & la plus légère attention ſur ce que j'ai déjà dit, ſuffiroit pour le perſuader.

Qu'on injecte un peu rapidement un liquide dans un tuyau flexible & recourbé en différens ſens; qu'on place ce tuyau, ou ſi l'on veut, ce vaiſſeau, ſur un plan fixe; on verra au moment où le liquide y pénètre, le tuyau s'élever, ſe redreſſer pour ainſi dire, ſe raccourcir plus ou moins, & affecter la ligne droite.

V.e Expérience.

J'ai ſuſpendu un petit poids à l'une des extrémités d'une artère, & j'ai adapté une ſeringue remplie d'eau à l'autre extrémité; le vaiſſeau poſé ſur un plan étoit affaiſſé & recourbé: lorſque j'ai pouſſé la liqueur en prenant le piſton, le vaiſſeau s'eſt élevé comme par *ſoubreſaut*, en ſoulevant le poids ſuſpendu à l'autre bout, & les flexuoſités ont diſparu.

Les vaiſſeaux ſont donc mus mécaniquement par le liquide qui les parcourt, ou ce qui eſt de même, ils éprouvent une *loco-motion;* il paroît même en peſant les circonſtances de cette cinquième expérience, que la quantité de cette action mécanique ou de la loco-motion, eſt proportionnelle au mouvement du liquide & à la flexuoſité du vaiſſeau. En effet, le liquide injecté dans un vaiſſeau droit, imprime un *ſoubreſaut* moins ſenſible que dans un vaiſſeau fléchi ou recourbé. Il faut pourtant obſerver que ſi l'on pouſſe le liquide en preſſant ſucceſſivement le piſton des ſeringues, on n'aperçoit pas le *ſoubreſaut* vif & rapide dont il eſt ici queſtion; les vaiſſeaux changent ſeulement de poſition en ſe redreſſant, ils ſe gonflent & ſe raccourciſſent, & tous ces changemens ne ſont que ſucceſſifs; mais ſi l'on frappe les piſtons ou que leur preſſion s'opère avec quelque *preſteſſe*, alors on voit manifeſtement tout ce que j'ai dit ci-deſſus.

VI.e Expérience.

J'ouvris le bas-ventre d'un chien vivant & examinant avec attention le méſentère que j'avois étendu, je vis avec quelque étonnement tout le ſyſtème artériel de cette partie, ſe mouvoir ſenſiblement & s'élever comme un réſeau tendu

qu'on auroit pincé & ſoulevé; le mouvement des vaiſſeaux entraînoit & ſoulevoit les membranes, & les petits corps qui ſe trouvoient dans leur voiſinage: ayant placé mon doigt à une petite diſtance au-deſſus de quelques-uns de ces vaiſſeaux, je les vis très-manifeſtement aller à la rencontre du doigt, & les plus petites artères me préſentèrent un mouvement ſenſible à l'œil & au tact.

J'aſſurerai même (ſans craindre de m'être laiſſé éblouir par l'envie d'obſerver & de découvrir) qu'en conſidérant une anaſtomoſe, formée par la réunion de deux rameaux d'artères principales, j'aperçus dans cette anaſtomoſe un mouvement d'érection ou de redreſſement, qui ſuccédoit immédiatement à chaque ſyſtole du cœur; ce mouvement ſoulevoit l'origine des troncs artériels de l'anaſtomoſe, & le tiſſu cellulaire & la vraie lame du péritoine, étoient entraînés par le mouvement imprimé au vaiſſeau.

M. de la Mure, en éclairciſſant & rectifiant l'opinion de Weitbrecht, a démontré, contre l'opinion commune, que le battement ſenſible des artères ne peut pas être attribué à leur ſeule dilatation; ou, ce qui eſt de même, à l'écartement des parois de l'axe du vaiſſeau, produit par la preſſion latérale du ſang *(Mémoires de l'Acad. des Sciences, année 1765)*. C'eſt ce qui eſt démontré par les différentes expériences que je fis à ce ſujet ſur ſa demande, & dont il me fournit lui-même les premières idées; mais en accordant à cet illuſtre Médecin le plus juſte tribut d'éloges, il me paroît qu'il s'eſt trop précipitamment déterminé à prétendre que le *battement ou la loco-motion de tout le ſyſtème artériel, dépend du mouvement imprimé aux vaiſſeaux par la loco-motion du cœur.* En rappelant la faculté pulſifique de Galien, il ſemble ſuppoſer, non ſans obſcurité, que le mouvement eſt imprimé phyſiquement & mécaniquement tout-à-la-fois aux parois des artères.

Pour peu qu'on réfléchiſſe ſur la ſtructure des parties, on ſentira que le mouvement imprimé par le cœur aux parois de l'aorte, doit ſenſiblement diminuer à meſure qu'il ſe

communique

communique aux rameaux artériels, bridés dans tout leur trajet par des membranes, & comme ensévelis dans un tas de parties molles. En effet, ces parois des artères souples & molles, sont fléchies, comprimées, assujetties en des millions de sens dans leur trajet à travers les organes, de manière qu'il est impossible, même au premier abord, de supposer que le mouvement imprimé par le cœur, puisse s'étendre comme un éclair jusqu'aux extrémités du système artériel.

Qu'on pèse ces réflexions, & l'on conclura que le mouvement de vibration imprimé par le cœur à l'artère-aorte, s'étend à peine au-delà de la poitrine & s'évanouit insensiblement, en s'étendant d'une partie de ce vaisseau aux parties plus éloignées. L'assertion de cet illustre Auteur, seroit plus admissible, si l'on pouvoit concevoir le système artériel comme une suite de tuyaux inflexibles ou métalliques attachés *bout à bout*, ce qui répugne à l'observation & aux faits.

Le même Auteur avance, d'après ses principes, que *la branche artérielle battra d'autant plus fortement, qu'elle sera plus tendue & plus ferme ;* ce que l'observation ne démontre pas : en effet, le battement des artères du carpe est absolument le même, soit qu'on fléchisse, soit qu'on étende le bras ; on remarque la même chose sur les artères du pied, sur toutes les parties des animaux, dans quelque position que l'on place leurs membres, qu'on tende ou qu'on relâche leurs artères.

Consultons encore l'expérience.

VII.e Expérience.

Ayant ouvert à la fois la poitrine & le bas-ventre d'un chien très-robuste, je renversai les poumons vers le côté droit de la poitrine, pour découvrir l'artère-aorte dans tout son trajet depuis son origine ; j'étendis aussi le mésentère, & je vis d'un même coup-d'œil le cœur, l'aorte & les artères mésentériques se mouvoir dans le même temps ; en observant, avec plus d'attention, je vis très-clairement que le mouvement des artères mésentériques étoit (relativement, & toutes choses d'ailleurs égales) infiniment plus fort & plus vif que celui de l'aorte : je m'explique ; le mouvement du tronc de l'aorte suffisoit à peine pour l'élever à une ligne & demie ou

deux lignes au-dessus de sa position; c'est-à-dire, que la plus grande partie de ce vaisseau occupoit, pendant l'élévation ou le *soubresaut*, le même espace qu'elle occupoit avant l'élévation; mais une artériole mésentérique, que j'avois prise pour terme de comparaison, se déplaçoit entièrement pendant l'élévation ou le *soubresaut*, de manière que s'élevant très-sensiblement & à l'œil & au tact, elle quittoit entièrement la place qu'elle avoit précédemment occupée.

Cette expérience très-aisée à répéter, m'a constamment présenté les mêmes faits; & il n'est personne qui ne sente d'abord les conséquences intéressantes qu'on peut en déduire pour la théorie du pouls, & les forces du sang contenu dans nos vaisseaux.

Je me borne à en conclure ici, que la conservation & l'augmentation de mouvement d'une petite artère mésentérique, ne peuvent point dépendre de l'impulsion communiquée par le cœur aux parois de l'aorte, ce qui étoit à démontrer.

Il existe donc une autre cause génératrice de mouvement dans les vaisseaux, indépendamment de la *loco-motion* ou du déplacement du cœur & de l'aorte.

Si l'on dirige l'attention sur les différentes parties du système vasculaire, on ne peut s'empêcher d'y remarquer plusieurs circonstances qui rendent cette question facile à résoudre.

Plus on s'éloigne du cœur en allant vers les parties, plus les anastomoses artérielles sont grandes & multipliées.

On trouve dans les mains deux anastomoses aux deux arcades artérielles, qu'on appelle *arcades palmaires*, l'une superficielle, l'autre plus profonde; de ces arcades partent deux rameaux artériels pour chacun des doigts, & ces deux rameaux s'anastomosent eux-mêmes lorsqu'ils sont parvenus au bout des doigts auxquels ils se distribuent.

Chacune des arcades de la main, égale par son diamètre les artères cubitale & radiale qui la fournissent.

On voit de même au pied une anastomose considérable

appelée *arcade plantaire*, qui réunit l'artère tibiale avec la péronière ; de cette arcade partent des rameaux qui se distribuent aux orteils, comme ceux de la main ; l'artère tibiale antérieure s'insérant entre le gros orteil & la racine du doigt qui le touche, va se confondre avec cette arcade ; d'où il résulte une anastomose à trois branches.

Les différentes artères des bras & des jambes, communiquent très-fréquemment ensemble dans leur trajet, soit par des rameaux considérables aux environs du coude & du genou, telles sont les artères collatérales ; soit par des rameaux moins apparens, mais qui ne laissent pas d'être toujours sensibles.

Qu'on parcoure la tête, on verra extérieurement les rameaux des deux carotides externes se réunir en devant & en arrière ; sur la gorge, autour des lèvres, sur le nez, les yeux, le front, le sommet de la tête, la nuque. On verra intérieurement les artères épineuses se confondre plusieurs fois sur la dure-mère : les deux carotides internes s'anastomoser fréquemment dans toute la substance du cerveau, & se réunir enfin avec les deux artères vertébrales, soit au-dessus du corps calleux, soit au-dessous du cerveau sur l'apophyse basilaire de l'os occipital.

Bien plus ; l'artère qu'on appelle *basilaire* n'est qu'une quadruple anastomose très-considérable, formée par la réunion des deux vertébrales & des deux carotides internes ; comme si la Nature eût voulu prévenir par cet artifice, les effets du poids du cerveau !

L'anastomose des artères épygastriques avec les mammaires internes au-dessous des enveloppes de l'abdomen, les milliers d'arcades artérielles formées par les deux mésentériques ; tout le tissu des viscères & des glandes parsemé d'arcades semblables, témoignent bien clairement que cette disposition constante n'est point un jeu de la Nature.

Qu'on prenne les reins pour exemple, parmi les viscères ; qu'on injecte par les artères émulgentes, une liqueur concrescible & colorée, & qu'on coupe ensuite le rein par une section qui sépare ses deux faces, en commençant par la

grande courbure, comme on le pratique dans les démonſtrations anatomiques. On verra alors toute la ſurface interne miſe à nu par la ſection, préſenter des millions d'arcades vaſculaires d'inégale grandeur. L'œil muni d'un microſcope, découvrira une foule de tuyaux droits & comme parallèles qui partent de la convexité de ces arcades, pour ſe porter vers les mamelons du rein. On voit de pareils vaiſſeaux parallèles partir des petites anaſtomoſes méſentériques, pour ſe répandre ſur les inteſtins, & s'anaſtomoſer entr'eux ſur l'inteſtin même.

Si l'on pèſe ces différentes conſidérations, on verra, ſi je ne me trompe, quelle eſt la cauſe à laquelle il faut rapporter la loco-motion ou le mouvement des artères dans les parties éloignées du cœur. On trouvera même une nouvelle cauſe de mouvement ou de déplacement dans ce dernier viſcère, en conſidérant les anaſtomoſes conſidérables & multipliées des artères coronaires.

Le ſang ſe meut d'une partie dans une autre; mais tant qu'il eſt renfermé dans ſes vaiſſeaux, il forme des courans dont les directions ſont ſouvent contraires, il reflue, meut & ſoulève les vaiſſeaux, s'oppoſe aux courans partis du cœur, eſt de nouveau entraîné par une impulſion nouvelle, & confondant dans ces chocs répétés les différentes parties hétérogènes, il devient ſans doute plus propre à fournir la matière des ſécrétions.

Il faudroit peut-être s'arrêter ici pour réſoudre une objection qui dérive de ce que je viens de dire. D'où vient en effet que tant d'obſtacles multipliés, tant de mouvemens contraires dans le ſang, n'arrêtent point ſon mouvement direct, & n'éteignent point le mouvement du cœur?

Je deſtine la ſolution de cette difficulté pour un autre Mémoire: il me ſuffit d'obſerver que le mouvement direct du ſang eſt beaucoup moins conſidérable dans le fait, qu'on ne l'a préſumé d'après les loix de la circulation. Les expériences m'ont appris à douter de la vérité des hypothèſes généralement reçues.

Il me reste encore à considérer les autres espèces d'anastomoses.

Les dernières ramifications des artères vont aboutir aux extrémités des veines; le sang artériel passe dans les veines & revient au cœur, pour être de nouveau renvoyé vers les parties : telle est la loi de la circulation reconnue & démontrée par Harvée. Mais ce n'est point par un cours uniforme & non interrompu que le sang veineux va des parties au cœur; il a souvent des directions opposées dans sa marche, il reflue comme le sang artériel lui-même, & ses reflux sont même soumis à d'autres loix.

Les observations & les expériences de M.rs Schligting, Haller, de la Mure, ont démontré que le cerveau des animaux vivans dont on ouvre le crâne, a un mouvement sensible, parfaitement homochrone aux mouvemens de la respiration. Si l'on examine le cerveau durant ce mouvement, on voit les sinus & les autres veines de ce viscère se gonfler durant l'expiration, & se rider pendant l'inspiration *(Voyez les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1749)*. Qu'on mette à nu les veines jugulaires internes sur un chien vivant, en observant de ne point couper de vaisseau sanguin considérable; qu'on dépouille en grande partie ces veines du tissu cellulaire qui les couvre; on verra aisément à travers leurs parois le sang qu'elles contiennent refluer vers la tête pendant l'expiration, & revenir, par une direction contraire, au moment où l'animal inspire.

On observe le même reflux sur les veines iliaques où le sang semble aussi avoir, durant l'expiration, un mouvement rétrograde qui le porte vers les cuisses.

Il paroît que M. de la Mure a assigné la cause la plus probable de ce mouvement du sang veineux, en l'attribuant à la pression des poumons sur les veines-caves, au moment de l'expiration *(Voyez les Mém. de 1749)*.

Quoi qu'il en soit de la cause particulière de ce phénomène, le sang veineux reflue incontestablement du cœur vers les parties durant l'expiration.

J'omets à deſſein une foule d'autres cauſes accidentelles qui impriment au ſang veineux un mouvement rétrograde ou qui en ſuſpendent le cours pour des inſtans plus ou moins longs. Telles ſont les paſſions vives & ſubites, comme la colère, la peur, &c.

Mais les veines ne battent point, quoiqu'elles préſentent de fréquentes anaſtomoſes, & que d'ailleurs le ſang des groſſes veines aille ſouvent heurter, par un mouvement rétrograde, celui qui coule dans les petites; d'où il s'enſuivroit que le reflux ne peut être regardé comme la cauſe du déplacement ou du battement des vaiſſeaux. Qu'on pèſe les obſervations ſuivantes, & cette objection ſera nulle, ſi je ne me trompe.

Les valvules diſperſées dans la cavité des veines s'oppoſent ſans doute à la liberté du reflux; de-là le cours naturel du ſang veineux ſera moins troublé que celui du ſang artériel; les veines ſeront tout-au-plus diſtendues par le volume du ſang rétrograde vers l'inſertion des valvules, elles préſenteront des petits ſinus ou des eſpèces de varices momentanées juſqu'à ce que le cours naturel vers les gros troncs ſoit rétabli.

Le cours du ſang eſt d'ailleurs continu dans les veines, il ne s'y fait point par jet comme dans les artères, le choc des courans y ſera donc moindre, & par conſéquent le reflux moins conſidérable.

S'il eſt vrai que le mouvement rétrograde du ſang dans les veines jugulaires dépende de la cauſe indiquée par M. de la Mure, il s'enſuit néceſſairement (comme le prouvent les expériences que j'ai rapportées), qu'une cauſe qui agit ſucceſſivement & comme par degrés doit auſſi produire un reflux lent & ſucceſſif; il n'y aura donc point de choc dans le reflux veineux, mais il y aura ſimplement un gonflement du vaiſſeau. Et en effet, dans les fortes expirations, les veines jugulaires paroiſſent ſe gonfler & ſe diſtendre; que ſi par haſard l'expiration eſt ſubite & vive, comme on l'obſerve dans l'éternuement, on ſent alors ces mêmes vaiſſeaux battre plus ou moins ſenſiblement, comme il eſt aiſé à chacun de l'éprouver.

Je citerai en preuve de ceci un phénomène aſſez ſingulier

& nouveau, que j'ai aperçu une ſeule fois dans le cours de mes expériences.

M'appliquant à examiner les vaiſſeaux rénaux d'un chien encore vivant, il me parut que durant l'expiration, le ſang des veines rénales étoit repouſſé vers les reins par un mouvement rétrograde. Ayant renverſé tous les inteſtins du côté droit, je vis le rein gauche ſe mouvoir & ſe ſoulever à chaque reflux. Frappé par la ſingularité de ce mouvement, j'examinai avec beaucoup d'attention dans quel moment s'opéroit le mouvement de ce viſcère, & je me convainquis qu'à chaque inſpiration de l'animal, ſur-tout lorſqu'elle étoit vive & forte, il ſe faiſoit un reflux dans la veine émulgente qui communiquoit à la maſſe du rein un mouvement ſenſible. Je ſéparai le rein du tiſſu cellulaire, dans lequel il eſt comme enſéveli, dans le deſſein de m'aſſurer ſi ce mouvement ne dépendoit pas du mouvement convulſif, qui ſe faiſoit quelquefois dans l'abdomen, & ayant paſſé une main au-deſſous du rein, je comprimai fortement la région lombaire contre la table qui ſervoit à l'expérience; je plaçois le rein ſur la paume de ma main, en lui conſervant à peu-près ſa poſition naturelle, & j'aperçus encore le même ſoulèvement à chaque reflux du ſang, lorſque l'expiration étoit forte & rapide. VIII.e Expérience.

Les obſervations que j'ai faites ſur différens cadavres humains, m'ont démontré une variété ſingulière dans le nombre, la forme & la poſition des valvules des veines: je renvoie à un autre Mémoire le détail de ce que m'ont appris ces obſervations, & je crois qu'il en réſultera une nouvelle preuve de ce que je viens d'avancer.

Il ſemble que le mouvement du cœur communiqué à l'aorte, & qu'on peut regarder comme la cauſe principale du déplacement de ce vaiſſeau, doit auſſi ſe communiquer aux veines-caves, & y produire un déplacement ſemblable, & par conſéquent un battement.

On peut obſerver à cet égard, 1.° que le tiſſu des veines eſt beaucoup plus lâche & plus foible, elles ſeront donc moins propres à la communication du mouvement.

2.° Les veines-caves ne ſe joignent au cœur qu'au moyen des oreillettes, dont le tiſſu eſt auſſi fort lâche &, pour ainſi dire, membraneux.

3.° Ces veines marchent directement ou en ligne droite du cœur vers les parties. L'aorte, au contraire, d'un tiſſu très-fort, s'attachant immédiatement à la baſe du cœur, ſe recourbe très-près de ce viſcère, & ſon arc réſiſte ou s'oppoſe au premier jet du ſang lancé dans ſa cavité. On peut en dire autant de l'artère pulmonaire qui ſe diviſe en deux groſſes branches recourbées, pour aller aux deux lobes des poumons. Ces conſidérations réunies me paroiſſent détruire tout le ſpécieux de l'objection que je me ſuis faite.

Il reſteroit quelque choſe à ajouter ſur la circulation particulière du ſang dans les veines de la plupart des viſcères du bas-ventre qui ſervent à la digeſtion. Ces veines n'ont point de valvules & s'abouchent dans un réſervoir commun appelé *veine porte*. Les obſervations ſemblent indiquer que cette groſſe veine, qui fait fonction d'artère, jouit quelquefois d'un battement; & je n'oſerois nier que, dans l'état naturel, elle ne pût être entièrement comparable aux artères, & par le mouvement, & par les uſages. Je laiſſe à l'expérience à décider cette queſtion.

Il réſulte de tout ce que j'ai dit dans ce Mémoire, une foule de conſéquences utiles ſur le mécaniſme naturel du pouls, ſur ſes *anomalies* individuelles & particulières, ſur la théorie des ſécrétions & ſur le mouvement vital des parties, que je laiſſe à tirer à d'autres.

Nota. Depuis que nous avons reçu ce Mémoire, l'Auteur eſt mort à la fleur de ſon âge & au milieu de ſes travaux, fort regretté, & avec juſte raiſon, de ſes amis & de tous ceux qui le connoiſſoient. Nous nous ſommes cru obligés de prévenir de la mort de cet habile Anatomiſte, afin qu'on ne comptât pas ſur les Mémoires qu'il promet dans celui-ci; cependant il eſt fort à ſouhaiter que quelqu'un veuille continuer ſes recherches ſur une partie de la Phyſiologie auſſi intéreſſante que les anaſtomoſes & leurs effets.

FIN.

